Cvičení 1.1.

1. Rovnice přímky v rovině

Obecná rovnice přímky $\mathcal{P}$ v rovině xy je

$$ax + by = c\,, \tag{1}$$

kde a, b, $c \in \mathbb{R}$ a a, b nejsou současně rovna nule, tj. $a^2 + b^2 \neq 0$.
Pro $a = 0$, je přímka $\mathcal{P}$ rovnoběžná s osou x a její rovnice je $y = y_0$, kde y_0 je reálné číslo
Pro $b = 0$ je přímka $\mathcal{P}$ rovnoběžná s osou y a její rovnice je $x = x_0$, kde x_0 je reálné číslo.

Pro $b \neq 0$ lze rovnici přímky $\mathcal{P}$ napsat ve tvaru

$$y = kx + q\,. \tag{2}$$

Taková přímka je graf lineární funkce. Číslo k v rovnici (2) se nazývá směrnice přímky $\mathcal{P}$.

Jestliže je $q = 0$, prochází přímka $\mathcal{P}$ počátkem souřadnic. Její rovnice $y = kx$ je pak grafem funkce, které se říká přímá úměrnost.

Příklad 1.1.r. Najděte rovnici (2) přímky, která prochází body $A = [1; -2]$ a $B = [2; 3]$.
Řešení: Protože přímka $\mathcal{P}$ má procházet body A a B, musí platit

$$-2 = k + q\,, \qquad 3 = 2k + q\,.$$

Jestliže odečteme první rovnici od druhé, dostaneme $k = 5$. Po dosazení za k do jedné z uvedených rovnic, zjistíme, že $q = -7$. Tedy hledaná rovnice přímky je $y = 5x - 7$.

Příklad 1.2.r. Najděte rovnici (2) přímky, která prochází body $A_1 = [x_1; y_1]$ a $A_2 = [x_2; y_2]$, kde $x_1 \neq x_2$.
Řešení: Protože má přímka procházet body A_1 a A_2, musí platit

$$y_1 = kx_1 + q\,, \qquad y_2 = kx_2 + q\,.$$

Jestliže odečteme první rovnici od druhé, dostaneme

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)\,, \quad \text{tj.} \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu k do první rovnice, dostaneme

$$q = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}\,.$$

Tedy rovnice hledané přímky je

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}\,.$$

Když označíme $\Delta x = x_2 - x_1$ přírůstek na ose x a $\Delta y = y_2 - y_1$ přírůstek na ose y, lze směrnici přímky zapsat ve tvaru

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha\,,$$

kde α je úhel, který svírá přímka $\mathcal{P}$ s kladným směrem osy x.

Příklad 1.3.r. Najděte rovnici přímky, která má směrnici $k = 2$ a prochází bodem $A = [3; -1]$.
<u>*Řešení:*</u> V rovnici přímky (2), je zadána hodnota $k = 2$. A protože má přímka prochazet bodem A, musí platit

$$-1 = 2 \cdot 3 + q\,, \quad \text{tj.} \quad q = -7$$

a hledaná rovnice přímky je $y = 2x - 7$.

Jestliže je dána směrnice k přímky $\mathcal{P}$ a bod $A = [x_0; y_0]$, který přímka prochází, musí platit

$$y_0 = kx_0 + q\,, \quad \text{tj.} \quad q = y_0 - kx_0\,.$$

Rovnice takové přímky $y = kx + y_0 - kx_0$ se často zapisuje ve tvaru

$$y - y_0 = k(x - x_0)\,.$$

Množina všech přímek, které procházejí daným bodem $A = [x_0; y_0]$ a nejsou rovnoběžné s osou y, je popsána rovnicemi

$$y - y_0 = k(x - x_0)\,, \qquad k \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 1.3.r. Nechť má přímka $\mathcal{P}$ směrnici $k \neq 0$ Najděte směrnici přímky $\mathcal{N}$ kolmé na přímku $\mathcal{P}$.
<u>*Řešení:*</u> Nechť je $k = \operatorname{tg}\alpha$, kde $\alpha \neq 0$. Směrnice kolmé přímky pak je $k_\perp = \operatorname{tg}\big(\alpha + \frac{1}{2}\,\pi\big)$, neboli

$$k_\perp = \frac{\sin(\alpha + \frac{1}{2}\,\pi)}{\cos(\alpha + \frac{1}{2}\,\pi)} = \frac{\sin\alpha\cos\frac{1}{2}\,\pi + \cos\alpha\sin\frac{1}{2}\,\pi}{\cos\alpha\cos\frac{1}{2}\,\pi - \sin\alpha\sin\frac{1}{2}\,\pi}\,.$$

A protože $\cos\frac{1}{2}\,\pi = 0$ a $\sin\frac{1}{2}\,\pi = 1$, je

$$k_\perp = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{k}\,.$$

2. Aproximace funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $A = \big[x_0; y_0 = f(x_0)\big]$ přímkou

Uvažujme graf funkce $y = f(x) = x^2$ a jeho bod $A = [x_0; y_0]$, kde $x_0 = 2$ a $y_0 = (x_0)^2 = 4$. Označme $\Delta x = x - x_0 = x - 2$ přírůstek proměnné x. Hodnota funkce y v bodě $x = 2 + \Delta x$ je

$$y = (2 + \Delta x)^2 = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2\,.$$

Přírůstek závisle proměnné y, který odpovídá přírůstku Δx nezávisle proměnné x.

$$\Delta y = y - y_0 = y - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Dále uvažujme množinu přímek, které procházejí bodem $A = [x_0; y_0] = [2; 4]$. Přímky této množiny jsou popsány vztahem

$$y - y_0 = k(x - x_0)\,, \quad \text{tj.} \quad y - 4 = k(x - 2)$$

kde k je libovolné reálné číslo. Přírůstek proměnné y, který odpovídá přírůstku nezávisle proměnné $\Delta x = x - 2$, je na každé z těchto přímek

$$\Delta_P y = k\Delta x\,.$$

Pro rodíl přírůstku proměnné y na grafu funkce a přímce platí

$$\Delta y - \Delta_P y = 4\Delta x + (\Delta x)^2 - k\Delta x = (4-k)\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Pokud tato veličina neobsahuje veličiny prvního řádu v proměnné Δx, tj. pokud $4 - k = 0$, říkáme, že graf funkce $y = x^2$ a přímka $y - 4 = k(x-2)$ mají v bodě $A = [2; 4]$ dotyk prvního řádu. Přímka $y - y_0 = k(x - x_0)$, která má s grafem funkce $y = f(x)$ v bodě $A = [x_0; y_0]$, kde $y_0 = f(x_0)$, dotyk prvního řádu, se nazývá tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ a její směrnice k se nazývá derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0; značí se $f'(x_0)$.

V našem případě je rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x) = x^2$ v bodě $A = [2; 4]$

$$y - 4 = 4(x-2)$$

a derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 2$ je rovna 4.

Příklad 2.1.r. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = x^3$ v obecném bodě x.
Řešení. Pro přírůstek závisle proměnné $y = f(x) = x^3$ v bodě x, který odpovídá přírůstku závisle proměnné Δx, dostaneme

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Přírůstek na přímce je $\Delta_P x = k\Delta x$. Aby rozdíl těchto přírůstků

$$\Delta y - \Delta_P y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - k\Delta x = \left(3x^2 - k\right)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

neobsahoval člen prvného řádu v Δx, musí být $k = 3x^2$. Tedy pro funkci $f(x) = x^3$ je $f'(x) = 3x^2$.

Hodnotu derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 lze často najít také tak, že pro $\Delta x \neq 0$ spočítáme výraz

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

a pokud do něj mužeme dosadit $\Delta x = 0$, je

$$f'(x_0) = \left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0}. \tag{3}$$

Příklad 2.2.r. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ a rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $A = [-\frac{1}{2}; 4]$.
Řešení Protože

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x+\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2} = \frac{-2x\Delta x - (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

je podle vztahu (3)

$$f'(x) = \left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} = \left(\frac{-2x - \Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}\right)_{\Delta x = 0} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

Směrnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $A = \big[x_0; f(x_0)\big]$ je rovna $k = f'(x_0)$, což je v našem případě rovno 16. A protože $y_0 = f(x_0) = f(-\frac{1}{2}) = 4$, je rovnice tečny

$$y - y_0 = f'(x_0)\big(x - x_0\big)\,, \quad \text{tj.} \quad y - 4 = 16(x + \tfrac{1}{2})\,.$$

Příklad 2.3.r. Na grafu funkce $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ najděte body, ve kterých je tečna k tomuto grafu rovnoběžná s osou x.

Řešení. Přímka rovnoběžná s osou x má rovnici $y = y_0$, kde y_0 je nějaké reálné číslo. Tedy její směrnice je rovna nule. Stejně jako v předcházejících příkladech najdeme

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\ &= (x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - 2 - \big(x^3 - 2x^2 + x - 2\big) = \\ &= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 4x\Delta x - 2(\Delta x)^2 + \Delta x = \\ &= \big(3x^2 - 4x + 1\big)\Delta x + \big(3x - 2\big)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.\end{aligned}$$

Směrnice k tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $A = \big[x; f(x)\big]$ je rovna koeficienu u Δx v tomto výrazu, tj. $k = 3x^2 - 4x + 1$. Našim úkolem je najít hodnoty x, ve kterých je $k = 0$, tj. ve kterých platí

$$k = 3x^2 - 4x + 1 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad x = 1 \quad \text{nebo} \quad x = \tfrac{1}{3}\,.$$

Na grafu funkce $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ tedy existují dva body, ve kterých je tečna k tomu to grafu rovnoběžná a osou x. Konkrétně jsou to body $A_1 = [1; -2]$, ve kterém je tečna $y = -2$ a bod $A_2 = \big[\frac{1}{3}; -\frac{50}{27}\big]$, kde je rovnice tečny $y = -\frac{50}{27}$.

V mnohých případech nelze do vztahu (3) přímo dosadit $\Delta x = 0$. Například pro funkci $f(x) = 2^x$ dostaneme

$$\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2^{x+\Delta x} - 2^x}{\Delta x} = 2^x \cdot \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\,,$$

do kterého ale hodnotu $\Delta x = 0$ dosadit nemůžeme, protože bychom dělili nulou (dostaneme tzv. neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$). V takovém případě se "dosazení $\Delta x = 0$" provádí pomocí tzv. limity $\Delta x \to 0$.

Při výpočtu limit se často používají vhodné úpravy.

Příklad 2.4.r. Pro $x > 0$ najděte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$.

Řešení. Do výrazu

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

nelze dosadit přímo hodnotu $\Delta x = 0$, protože bychom dostali neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$. Ale lze psát

$$\begin{aligned}\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

kde už $\Delta x = 0$ dosadit lze. Tak dostaneme

$$\big(\sqrt{x}\big)' = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Aby nebylo nutné dělat při výpočtu neurčitých výrazů poměrně složité úpravy, je jednodušší se naučit některé derivace nazpaměť.

Vzorce pro derivace

Definice derivace funkce $y = f(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \left(= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

Tabulka derivací

$f(x)$	$f'(x)$	**poznámka**
x^a	ax^{a-1}	a je konstantní, speciálně pro $a = 0$ je $x^0 = 1$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$ je konstanta, $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$
$\ln \lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	
$\log_a \lvert x\rvert$	$\frac{1}{x \ln a}$	pro $a > 0,\ a \neq 1,\ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$
$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$
$\operatorname{cotgh} x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$
$\operatorname{argsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
$\operatorname{argcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
$\operatorname{argtgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argtgh} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
$\operatorname{argcotgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argcotgh} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Další vztahy pro derivace

<u>Linearita derivace:</u> Když jsou a, b konstanty, je

$$\big(af(x)+bg(x)\big)' = af'(x)+bg'(x)\,.$$

<u>Derivace součinu:</u>

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,.$$

<u>Derivace podílu:</u>

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,.$$

<u>Derivace složené funkce:</u> Pro složenou funkci $h(x)=g\big(f(x)\big)$ je

$$h'(x) = g'\big(f(x)\big)\,f'(x)\,.$$

Zkráceně lze pro funkci $z(x)=z\big(y(x)\big)$ zapsat derivaci složené funkce jako

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,.$$

<u>Derivace inverzní funkce:</u> Je-li $y=f(x)$ inverzní funkce k funkci $x=g(y)$, pak je

$$f'(x) = \frac{1}{g'\big(f(x)\big)} \quad \text{nebo zkráceně} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^{-1}.$$

<u>Derivace obecné mocniny funkcí:</u> Derivace funkce $y=\big(f(x)\big)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\,\ln f(x)}$ je

$$\Big(\big(f(x)\big)^{g(x)}\Big)' = \big(f(x)\big)^{g(x)}\left(g'(x)\,\ln f(x) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

<u>Logaritmická derivace funkce $y=f(x)$:</u> je derivace funkce $\ln f(x)$, tj.

$$\big(\ln f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$