Cvičení 1.2.

1. Axiom matematické indukce

<u>AXIOM MATEMATICKÉ INDUKCE.</u>

Nechť je $M \subset \mathbb{N}$ taková, že

(1) $1 \in M$,

(2) jestliže pro $n \in M$, je $(n+1) \in M$.

Pak je $M = \mathbb{N}$.

<u>ŘEŠENÉ PŘÍKLADY</u>

Příklad 1.1.r. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot 2^k = 2^{n+1}\big(n^2 - 2n + 3\big) - 6\,. \tag{1}$$

<u>Řešení:</u> Nechť je M množina všech $n \in \mathbb{N}$ takových, že pro ně platí (1). Protože

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 \cdot 2^k = 1^2 \cdot 2^1 = 2\,, \qquad 2^{1+1}\big(1^2 - 2\cdot 1 + 3\big) - 6 = 4 \cdot 2 - 6 = 2\,,$$

je $1 \in M$.

Nechť je $n \in M$, tj. pro toto n platí (1). Pak je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \cdot 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot 2^k + (n+1)^2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1}\big(n^2 - 2n + 3\big) - 6 + 2^{n+1}(n^2 + 2n + 1) = \\ &= 2^{n+1}\big(2n^2 + 4\big) - 6 = 2^{n+2}\big(n^2 + 2\big) - 6\,.\end{aligned}$$

A protože

$$2^{(n+1)+1}\big((n+1)^2 - 2(n+1) + 3\big) - 6 = 2^{n+2}\big(n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 3\big) - 6 = 2^{n+2}\big(n^2 + 2\big) - 6\,,$$

je $(n+1) \in M$. Podle axiomu matematiké indukce tedy je $M = \mathbb{N}$.

Příklad 1.2.r. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{18}{(3k+1)(3k+4)(3k+7)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+7}\,. \tag{2}$$

<u>Řešení:</u> Nechť je M množina všech $n \in \mathbb{N}_0$ takových, že pro ně platí (2). Protože pro $n = 0$ platí

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{18}{(3k+1)(3k+4)(3k+7)} = \frac{18}{28}\,, \qquad \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{9}{14}\,,$$

je $0 \in M$.

Nechť je $n \in M$, tj. pro toto n platí vztah (2). Pak je

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1} \frac{18}{(3k+1)(3k+4)(3k+7)} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{18}{(3k+1)(3k+4)(3k+7)} + \frac{18}{\bigl(3(n+1)+1\bigr)\bigl(3(n+1)+4\bigr)\bigl(3(n+1)+7\bigr)} = \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+7} + \frac{18}{(3n+4)(3n+7)(3n+10)} = \\
&= \frac{3}{4} - \frac{(3n+7)(3n+10) - (3n+4)(3n+10) - 18}{(3n+4)(3n+7)(3n+10)} = \\
&= \frac{3}{4} - \frac{9n+12}{(3n+4)(3n+7)(3n+10)} = \frac{3}{4} - \frac{3}{(3n+7)(3n+10)}\,.
\end{aligned}$$

A protože

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{3(n+1)+4} + \frac{1}{3(n+1)+7} = \frac{3}{4} - \frac{3n+10-3n-7}{(3n+7)(3n+10)} = \frac{3}{4} - \frac{3}{(3n+7)(3n+10)}\,,$$

je $(n+1) \in \mathbb{N}_0$. Podle axiomu matematické indukce tedy $M = \mathbb{N}_0$.

Příklad 1.3.r. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí vztah

$$\sum_{k=1}^{n} \sin 2k = \frac{\sin n \ \sin(n+1)}{\sin 1}\,. \tag{3}$$

__Řešení:__ Nechť je M množina všech $n \in \mathbb{N}$ takových, že pro ně platí (3). Protože pro $n = 1$ platí

$$\sum_{k=1}^{1} \sin 2k = \sin 2\,, \qquad \frac{\sin 1 \ \sin(1+1)}{\sin 1} = \sin 2\,,$$

je $1 \in M$.

Nechť je $n \in M$, tj. pro toto n platí (3). Pak je

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin 2k = \sum_{k=1}^{n} \sin 2k + \sin 2(n+1) = \frac{\sin n \ \sin(n+1)}{\sin 1} + \sin 2(n+1)\,. \tag{4}$$

`Poznámka.` Měli byste vědět, že v pravoúhlém trojúhelníku s odvesnami a, b, přeponou c a úhlem α, který leží proti odvěsně a je

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\,, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}\,.$$

Z definičních vztahů a z Pythagorovy věty $a^2 + b^2 = c^2$ plynou vztahy

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1\,.$$

Pro speciální pravoúhlé trojúhelníky, rovnoramenný a polovina rovnostranného trojúhelníka, lze najít hodnoty těchto funkcí pro úhly $\alpha = 0°$, $30°$, $45°$, $60°$ a $90°$. Tyto hodnoty jsou

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není definován
$\operatorname{cotg}\alpha$	není definován	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

V anlýze budeme velikost úhlu popisovat v radianech, tj. délkou jednotkové kružnice, které odpovídá středový úhel α. Protože délka jednotkové kružnice je rovna 2π je vztah mezi popisem velikosti úhlu pomocí stupňů a radiánů

$$a = \tfrac{\pi}{180}\,\alpha$$

kde α je velikost úhlu ve stupních a a jeho velikost v radiánech. Pro speciální úhly je

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$90\frac{pi}{2}$
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} a$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není definován
$\operatorname{cotg} a$	není definován	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Měli byste si pamatovat součtové vzorce pro sinus a kosinus

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,, \tag{5}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,. \tag{6}$$

Z těchto rovnic pro $\beta = \alpha$ plynou vztahy pro dvojnásobné úhly

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,. \tag{7}$$

Jestliže v (5) a (6) položíme $\beta = -\beta$, dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,, & \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,, & \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned}$$

Když tyto rovnice vhodně sečteme, resp. odečteme, a vydělíme dvěma, dostaneme

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\,, \tag{8}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\,, \tag{9}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\,. \tag{10}$$

Jestliže v těchto vztazích položíme

$$\alpha+\beta = a\,,\quad \alpha-\beta = b\,,\quad \text{tj.}\quad \alpha = \frac{a+b}{2}\,,\quad \beta = \frac{a-b}{2}\,,$$

získáme vztahy

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{a-b}{2}\,, \tag{11}$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{a-b}{2}\,, \tag{12}$$
$$\cos a - \cos b = -2\,\sin\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}\,. \tag{13}$$

Když použijeme v (4) první vztah v (7), dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\sin n\ \sin(n+1)}{\sin 1} + \sin 2(n+1) &= \frac{\sin n\ \sin(n+1)}{\sin 1} + 2\sin(n+1)\cos(n+1) = \\ &= \frac{\sin(n+1)}{\sin 1}\big(\sin n + 2\sin 1\cos(n+1)\big)\,. \end{aligned}$$

Pokud použijeme vztah (10), zjisíme, že

$$2\sin 1\cos(n+1) = \sin(n+2) + \sin(-n) = \sin(n+2) - \sin n\,.$$

Tedy

$$\sum_{k=1}^{n} \sin 2k = \frac{\sin(n+1)}{\sin 1}\big(\sin n + 2\sin 1\cos(n+1)\big) = \frac{\sin(n+1)}{\sin 1}\sin(n+2)\,.$$

To znamená, že $(n+1) \in M$, a podle axiomu matematické indukce je $M = \mathbb{N}$.

Neřešené příklady

Příklad 1.1. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2$.

Příklad 1.2. Nechť je $q \neq 1$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = \dfrac{q(1-q^n)}{1-q}$.

Příklad 1.3. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 3^k = \frac{1}{4}\,(2n-1) \cdot 3^{n+1} + \frac{3}{4}$.

Příklad 1.4. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot (-1)^k = \frac{1}{4}\,(2n+1) \cdot (-1)^n - \frac{1}{4}$.

Příklad 1.5. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$.

Příklad 1.6. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \cdot (-1)^k = \frac{1}{2}\, n(n+1) \cdot (-1)^n$.

Příklad 1.7. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{2^k} = 6 - \dfrac{n^2+4n+6}{2^n}$.

Příklad 1.8. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}\,.$$

Příklad 1.9. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{18}{(3k-2)(3k+1)(3k+4)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4}\,.$$

Příklad 1.10. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+3)} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}\,.$$

Příklad 1.11. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin 2k = \frac{(-1)^n \sin(2n+1) - \sin 1}{2\cos 1}\,.$$

2. Supremum a infimum množiny

Definice. Číslo S (resp. s) se nazývá supremum (resp. infimum) množiny $M \subset \mathbb{R}$, když:

1. pro každé $x \in M$ je $x \leq S$ (resp. $x \geq s$);
2. pro každé $\widehat{S} < S$ (resp. $\widehat{s} > s$) existuje $x \in M$ takové, že $x > \widehat{S}$ (resp. $x < \widehat{s}$).

Pokud je supremum S (resp. infimum s) množiny M prvkem této množiny, nazývá se maximum (resp. minimum) množiny M.
Pokud není množina M shora (resp. zdola) omezená, značíme její supremum (resp. infimum) symbolem $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Řešené příklady

Příklad 2.1.r. Najděte supremum a infimum množiny

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ 6x^2 + x - 2 < 0\right\}$$

Řešení. Protože funkce $f(x) = 6x^2 + x - 2$ je na množině $\mathbb{R}$ "spojitá", může měnit znaménko pouze v bodech, ve kterých je $f(x) = 6x^2 + x - 2 = 0$, tj. v bodech $x_1 = -\frac{2}{3}$ a $x_2 = \frac{1}{2}$. Proto nabývá na každém z intervalů $\mathcal{I}_1(-\infty, -\frac{2}{3})$, $\mathcal{I}_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ a $\mathcal{I}_3 = (\frac{1}{2}, \infty)$ kladných nebo záporných hodnot.
Protože pro $x_1 = -1 \in \mathcal{I}_1$ je $f(-1) = 3$, je funkce $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}_1$ kladná.
Protože pro $x_2 = 0 \in \mathcal{I}_2$ je $f(0) = -2$, je funkce $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}_2$ záporná.
Protože pro $x_1 = 1 \in \mathcal{I}_3$ je $f(1) = 5$, je funkce $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}_1$ kladná.

Tedy množina M je interval $M = \mathcal{I}_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$. Proto je $\sup M = \frac{1}{2}$ a $\inf M = -\frac{2}{3}$. Protože body $\frac{1}{2}$ a $-\frac{2}{3}$ nepatří do množiny M, nejedná se o maximum a minimum.

Příklad 2.2.r. Najděte supremum a infimum množiny

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ 3 \leq \frac{5}{x+1}\right\}$$

Řešení. Definiční obor D_f fukce

$$f(x) = 3 - \frac{5}{x+1} = \frac{3x-2}{x+1}$$

je $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Protože je funkce $f(x)$ na svém definičním oboru "spojitá", může měnit znaménko pouze v bodech, kde je $f(x) = 0$, tj. v bodě $x = \frac{2}{3}$. Proto je funkce $f(x)$ na každém z intervalů $\mathcal{I}_1 = (-\infty, -1)$, $\mathcal{I}_2 = (-1, \frac{2}{3})$ a $\mathcal{I}_3 = (\frac{2}{3}, +\infty)$ pořád kladná nebo záporná.

Jestliže do funkce $f(x)$ dosadíme vhodně zvolenou hodnotu z každého z těchto intervalů, zjistíme, že funkce $f(x)$ je záporná pouze na intervalu $\mathcal{I}_2$.

Tedy množina $M = (-1, \frac{2}{3}\rangle$. Proto je $\sup M = \frac{2}{3}$ a $\inf M = -1$. Protože bod $x = \frac{2}{3} \in M$ je tento bod také maximem množiny M, tj. $\max M = \frac{2}{3}$. Minimum množina M nemá.

Příklad 2.3.r. Najděte supremum a infimum množiny

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ x + 2 < \frac{4}{x-1}\right\}$$

Řešení. Nerovnost, která definuje množinu M, můžeme řešit tak, že ji nejprve vynásobíme výrazem $x - 1$.

Pro $x-1>0$, tj. $x>1$, dostaneme nerovnost

$$x^2+x-2<4\,,\quad \text{tj.}\quad x^2+x-6=(x+3)(x-2)<0\,.$$

Podobně jako v příkadu 2.1.r. zjistí, že tato nerovnost je splněna na intervalu $(-3,2)$. Ale protože $x>1$, musí být v tomto případě $x\in\mathcal{I}_+=(1,2)$.

Pro $x-1<0$, tj. pro $x<1$, dostaneme nerovnost

$$x^2+x-2>4\,,\quad \text{tj.}\quad x^2+x-6=(x+3)(x-2)>0\,.$$

To je splněno pro $x\in(-\infty,-3)$ nebo pro $x\in(2,+\infty)$. A protože $x<1$, musí být $x\in\mathcal{I}_2=(-\infty,-3)$.

Tedy množina $M=\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2=(-\infty,-3)\cup(1,2)$. Proto je $\sup M=2$ a $\inf M=-\infty$. Maximum ani minimum množina M nemá.

Příklad 2.4.r. Najděte supremum a infimum množiny

$$M=\left\{x\in\mathbb{R}\,;\ x+2<\frac{4}{x-1}\ \text{ a }\ |x+1|\le 4\right\}$$

Řešení. Množina M je průnik množin

$$M_1=\left\{x\in\mathbb{R}\,;\ x+2<\frac{4}{x-1}\right\}\qquad\text{a}\qquad M_2=\left\{x\in\mathbb{R}\,;\ |x+1|\le 4\right\}.$$

Množinu $M_1=(-\infty,-3)\cup(1,2)$ jsme našli v příkladě 2.3.r. Množina M_2 je množina všech reálných čísel, které mají od bodu $x_0=-1$ vzdálenost menší nebo rovnou 4, tj. $M_2=\langle -5,3\rangle$. Tedy

$$M=M_1\cap M_2=\langle -5,-3)\cup(1,2)$$

Proto je $\sup M=2$ a $\inf M=-5$, což je také minimum M. Maximum množina M nemá.

3. Hromadné body množiny

Definice. Bod $x\in\mathbb{R}^*$ se nazývá hromadný bod množiny M, když pro každé jeho okolí $U(x)$ obsahuje množina $M\cap U(x)$ aspoň jeden bod $y\in M$, kde $y\neq x$.
Bod $x\in M$ se nazývá izolovaný bod množiny M, když existuje jeho okolí $U(x)$ takové, že $U(x)\cap M=\{x\}$.

Řešené příklady

Příklad 3.1.r. Ukažte, že každý bod množiny $M=\left\{\dfrac{2n-3}{n+1}\,;\ n\in\mathbb{N}\right\}$ je izolovaný bod množiny M a bod $x=2$ je její hromadný bod.
Řešení. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ označme

$$a_n=\frac{2n-3}{n+1}\,.$$

Nejprve ukážeme, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ je a_{n_0} izolovaný bod množiny M. To znamená, že pro každé, ale pevné n_0, musíme najít $\delta > 0$ takové, že interval $I_\delta = (a_{n_0} - \delta, a_{n_0} + \delta)$ neobsahuje žádný bod a_n, kde $n \neq n_0$, tj. $|n - n_0| \geq 1$.

Vzdálenost bodů a_{n_0} a a_n je

$$\left|a_{n_0} - a_n\right| = \left|\frac{2n_0 - 3}{n_0 + 1} - \frac{2n - 3}{n + 1}\right| = \left|\frac{5(n_0 - n)}{(n_0 + 1)(n + 1)}\right| = \frac{5}{n_0 + 1} \frac{|n_0 - n|}{n + 1}$$

Poslední výraz je pro možné hodnoty n nejmenší pro $n = n_0 - 1$. Proto pro každé $n \neq n_0$ platí

$$\left|a_{n_0} - a_n\right| \geq \frac{5}{n_0(n_0 + 1)} .$$

Jestliže tedy zvolíme

$$\delta < \frac{5}{n_0(n_0 + 1)} , \quad \text{např.} \quad \delta = \frac{1}{n_0(n_0 + 1)} ,$$

neobsahuje interval $\mathcal{I}_\delta$ kromě bodu a_{n_0} žádný bod množiny M. To podle definice znamená, že bod a_{n_0} je pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ izolovaný bod množiny M.

Abychom ukázali, že $x = 2$ je hromadný bod množiny M, musíme pro každý interval $\mathcal{I}_\varepsilon = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, ukázat, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n \in= \mathcal{I}_\varepsilon$, neboli $|2 - a_n| < \varepsilon$.

Vzdálenost bodu $a_n \in M$ od bodu 2 je

$$\left|2 - a_n\right| = \left|2 - \frac{2n - 3}{n + 1}\right| = \frac{5}{n + 1}$$

Nechť je ε libovolné, ale pevně dané, kladné reálné číslo. Naším úkolem je ukázat, že pro toto ε existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\left|2 - a_n\right| = \frac{5}{n + 1} < \varepsilon , \quad \text{neboli} \quad n > \frac{5}{\varepsilon} - 1 .$$

Ale protože množina přirozených čísel není shora omezená, takové n existuje. Stačí například vzít

$$n = \left[\frac{5}{\varepsilon} - 1\right] + 1 ,$$

kde $[x]$ je tzv. celá část reálného čísla x, tj. celé číslo, pro které platí $x \leq [x] < x + 1$.

Příklad 3.2.r. Ukažte, že body $x_+ = \sqrt{3}$ a $x_- = -\sqrt{3}$ jsou hromadné body množiny

$$M = \left\{\frac{4n + 1}{2n - 1} \sin\frac{2\pi n}{3} \,;\, n \in \mathbb{N}\right\} .$$

Řešení. Protože

$$\sin\frac{2\pi n}{3} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad n = 3k , \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{pro} \quad n = 3k + 1 , \qquad \text{kde} \quad k \in \mathbb{N} , \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{pro} \quad n = 3k + 2 \end{cases}$$

lze zapsat množinu M jako sjednocení tří množin $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, kde

$$
\begin{aligned}
M_0 &= \left\{ \frac{4n+1}{2n-1} \sin \frac{2\pi n}{3}\,;\ n = 3k\,, \quad k \in \mathbb{N} \right\} = \{0\} \\
M_1 &= \left\{ \frac{4n+1}{2n-1} \sin \frac{2\pi n}{3}\,;\ n = 3k+1\,, \quad k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{12k+5}{6k+1}\,;\ k \in \mathbb{N} \right\} \\
M_2 &= \left\{ \frac{4n+1}{2n-1} \sin \frac{2\pi n}{3}\,;\ n = 3k+2\,, \quad k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{12k+9}{6k+3}\,;\ k \in \mathbb{N} \right\}.
\end{aligned}
$$

Pak stačí ukázat, že $x_+ = \sqrt{3}$ hromadný bod množiny $M_1 \subset M$ a bod $x_- = -\sqrt{3}$ je hromadný bod množiny $M_2 \subset M$. To se provede stejně jako v předcházejícím příkladě.

Příklad 3.3.r. Ukažte, že $x = 0$ je hromadný bod množiny

$$
M = \left\{ \frac{1}{n^2+3n+2}\,;\ n \in \mathbb{N} \right\}.
$$

__Řešení.__ Naším úkolem je ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$
\left| a_n - 0 \right| = \frac{1}{n^2+3n+2} < \varepsilon\,,
$$

tj. ukázat, že uvedená nerovnost má pro každé $\varepsilon > 0$ v množině $\mathbb{N}$ řešení. Proto nemusíme tuto nerovnost řešit, tj. najít všechna její řešení. V tomto příkladě stačí použít následující obrat. Pro kadždé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$
\left| a_n - 0 \right| = \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n+1}
$$

Tedy pokud zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$
\frac{1}{n+1} < \varepsilon\,, \quad \text{tj.} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1\,,
$$

bude

$$
\left| a_n - 0 \right| = \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon\,,
$$

a tedy toto $a_n \in M$ je prvkem intervalu $(-\varepsilon, \epsilon)$.