Cvičení 10.1.

Funkce definované implicitně

Věta. Nechť je $A = [\mathbf{a}, b] = [a_1, a_2, \dots, a_n; b]$. Nechť je funkce $F(\mathbf{x}, y) = F(x_1, \dots, x_n, y)$ spojitá v jistém okolí bodu A a má v tomto okolí parciální derivaci $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, y)$, která je spojitá v bodě A. Nechť platí $F(\mathbf{a}, b) = 0$ a $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$.
Pak existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že ke každému $\mathbf{x} \in \mathcal{I} = \big\{\mathbf{x}\,;\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta\big\}$ odpovídá právě jedno $y \in \mathcal{J} = \big\{y\,;\ |y - b| < \Delta\big\}$ takové, že $F(\mathbf{x}, y) = 0$.
Tím je definována funkce

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,$$

která je spojitá na množině $\mathcal{I}$.
Jestliže má funkce $F(\mathbf{x}, y)$ na množině $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ diferenciál k–tého řádu, má funkce $y = \varphi(\mathbf{x})$ diferenciál k–tého řádu na množině $\mathcal{I}$.
Jestliže je funkce $F(\mathbf{x}, y) \in C_k(\mathcal{I} \times \mathcal{J})$, je i funkce $y = \varphi(\mathbf{x}) \in C_k(\mathcal{I})$.

Věta. Nechť je $A = [\mathbf{a}; \mathbf{b}] = [a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_s]$. Nechť jsou funkce

$$F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_k(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)\,, \qquad k = 1,\, 2,\, \dots,\, s\,,$$

spojité v jistém okolí bodu A a mají v tomto okolí všechny parciální derivace $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, které jsou spojité v bodě A. Nechť platí

1. $F_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, pro každé $k = 1,\, 2,\, \dots,\, s$;
2. $\det \mathbf{C} \neq 0$, kde $\mathbf{C}$ je matice se složkami $C_{k\ell} = \dfrac{\partial F_k}{\partial y_\ell}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Pak existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že ke každému $\mathbf{x} \in \mathcal{I} = \big\{\mathbf{x}\,;\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta\big\}$ odpovídá právě jedno $\mathbf{y} \in \mathcal{J} = \big\{\mathbf{y}\,;\ \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\| < \Delta\big\}$ takové, že pro všechna $k = 1,\, 2,\, \dots,\, s$ platí $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.
Souřadnice y_k tohoto bodu definují funkce

$$y_k = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_r)\,, \qquad k = 1,\, 2,\, \dots,\, s\,,$$

které jsou spojité na množině $\mathcal{I}$.
Jestliže mají všechny funkce $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ na množině $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ diferenciál n–tého řádu, mají všechny funkce $y_k = \varphi_k(\mathbf{x})$ diferenciál n–tého řádu na množině $\mathcal{I}$.
Jestliže jsou všechny funkce $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C_n(\mathcal{I} \times \mathcal{J})$, jsou i všechny funkce $\varphi_k(\mathbf{x}) \in C_n(\mathcal{I})$.

Řešené příklady

Příklad 1.r. Najděte všechny funkce $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, které jsou řešením rovnice $y^2 - y = 0$.
Řešení: Funkce $y = y(x)$ může nabývat pouze dvou hodnot, 0 nebo 1. Tedy každá funkce $y : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ je řešením této rovnice. Jedno řešení je například Dirichletova funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální,} \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální.} \end{cases}$$

Tento příklad ukazuje, že kdybychom z věty o implicitních funkcích vynechali zdánlivě nepodstatnou poznámku, že řešení hledáme v jistém okolí bodu b, tj. v podstatě předpoklad, že hledáme pouze spojité funkce, bylo by v obecném případě najít nekonečně mnoho řešení.

Příklad 2.r. Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu (a,b). Kdy má rovnice $yf(x)=0$ v intervalu (a,b) jediné spojité řešení $y(x)=0$?
Řešení: Z rovnice plyne, že $y=y(x)=0$ nebo $f(x)=0$. Protože nás zajímají spojitá řešení, nevadí nám bod x_0, ve kterém je $f(x_0)=0$, pokud je to hromadný bod množiny $M=\{x\in(a,b)\,;\ f(x)\neq 0\}$. Pak totiž musí být $y(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in M}} y(x)=0$.

Pokud je ale bod x_0 vnitřní bod množiny $N=\{x\in(a,b)\,;\ f(x)=0\}$ lze hodnotu funkce $y=y(x)$ definovat libovolně.

Proto je řešení jediné právě tehdy, když je vnitřek množiny N prázdná množina.

Příklad 3.r. Nechť je funkce $y=y(x)$, $x\in\langle -1,1\rangle$ řešení rovnice $x^2+y^2=1$.

1. kolik existuje takových funkcí?
2. kolik existuje takových spojitých funkcí?
3. kolik existuje takových spojitých funkcí, pro které je $y(0)=1$?
4. kolik existuje takových spojitých funkcí, pro které je $y(1)=0$?

Řešení: Všechna řešení dané rovnice lze zapsat ve tvaru $y=\epsilon(x)\sqrt{1-x^2}$, kde $\epsilon(x)$ je funkce definovaná na intervalu $\langle -1,1\rangle$, která v intervalu $(-1,1)$ nabývá pouze hodnot 1 nebo -1. Protože pro $x=\pm 1$ je $y=0$, nezávisí na hodnotě funkce $\epsilon(\pm 1)$.

1. Protože v tomto případě nepožadujeme spojitost funkce $y=y(x)$, lze zvolit funkci $\epsilon(x)$ libovolně a rovnice má nekonečně mnoho řešení.
2. Pro $x=0$ musí být $y(0)=1$ nebo $y(0)=-1$. Protože pro $x\in(-1,1)$ je $\sqrt{1-x^2}\neq 0$, musí být kvůli spojitosti funkce $y=y(x)$ na tomto intervalu stále kladná nebo záporná. Proto existují pouze dvě takové funkce $y=y_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ a $y=y_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$.
3. V tomto případě musí být funkce $y=y(x)$ na celém intervalu $(-1,1)$ kladná, a tedy existuje pouze jedno řešení $y=\sqrt{1-x^2}$.
4. Protože pro každou funkci $y=y(x)$, která je řešení uvedené rovnice, platí $y(1)=0$, je tato podmínka vlastně zbytečná a úloha vede na případ 2.

Příklad 4.r. Najděte všechny druhé parciální derivace funkce $z=z(x,y)$, která je definována rovnicí
$$F(x,y,z)=2x^2-y^2+z^3+6xyz+2x=0 \tag{1}$$
v bodě $[1,2,0]$.
Řešení: Nejprve ověříme předpoklady věty o implicitních funkcích. Dosazením snadno zjistíme, že $F(1,2,0)=0$. Funkce $F(x,y,z)\in C_\infty(\mathbb{R}^3)$ a protože $F'_{,z}(x,y,z)=3z^2+6xy$, je $F'_{,z}(1,2,0)=12\neq 0$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty, definuje rovnice (1) na okolí bodu $[1,2]$ funkci $z=z(x,y)$, jejíž hodnoty leží v jistém okolí bodu $z=0$.

Abychom našli parciální derivace této funkce, derivujeme rovnici
$$2x^2-y^2+z^3(x,y)+6xyz(x,y)+2x=0$$

podle proměnných x a y. Tyto derivace dávají

$$\begin{aligned} &4x + 3z^2\,\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\,\frac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad 6yz + 4x + 2 + \bigl(6xy + 3z^2\bigr)\,\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,, \\ &-2y + 3z^2\,\frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \text{tj.} \quad 6xz - 2y + \bigl(6xy + 3z^2\bigr)\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Toto jsou rovnice, ze kterých můžeme za podmínky $6xy + 3z^2 \neq 0$ najít parciální derivace $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Speciálně pro $x = 1$, $y = 2$ a $z = 0$ dostaneme

$$6 + 12\,\frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = 0\,, \quad -4 + 12\,\frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = -\frac{1}{2}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{3}\,.$$

Abychom našli druhé parciální derivace, derivujeme rovnice (2). Jestliže derivujeme první rovnici podle proměnné x, dostaneme

$$6y\,\frac{\partial z}{\partial x} + 4 + \left(6y + 6z\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \bigl(6xy + 3z^2\bigr)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,.$$

Protože pro $x = 1$, $y = 2$ a $z = 0$ je $z'_{,x} = -\frac{1}{2}$, dostaneme z této rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,2) = \dfrac{2}{3}$.

Jestliže derivujeme první rovnici v (2) podle proměnné y, dostaneme vztah

$$6z + 6y\,\frac{\partial z}{\partial y} + \left(6x + 6z\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \bigl(6xy + 3y^2\bigr)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0\,,$$

ze kterého pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $z'_{,x} = -\frac{1}{2}$ a $z'_{,y} = \frac{1}{3}$ plyne $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,2) = -\dfrac{1}{12}$.

Když bychom derivovali druhou rovnici v (2) podle proměnné x, dostali bychom opět $z''_{,xy}$. Derivací této rovnice podle proměnné y, získáme rovnici

$$6x\,\frac{\partial z}{\partial y} - 2 + \left(6x + 6z\,\frac{\partial z}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \bigl(6xy + 3z^2\bigr)\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,,$$

ze které v daném bodě plyne $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,2) = -\dfrac{1}{6}$.

Ukážeme ještě postup, který používá diferenciálů funkce $F(x,y,z)$. Pro její diferenciál platí

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(x,y,z) &= 4x\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y + 3z^2\,\mathrm{d}z + 6yz\,\mathrm{d}x + 6xz\,\mathrm{d}y + 6xy\,\mathrm{d}z + 2\,\mathrm{d}x = \\ &= (6yz + 4x + 2)\,\mathrm{d}x + (6xz - 2y)\,\mathrm{d}y + (6xy + 3z^2)\,\mathrm{d}z = 0\,. \end{aligned}$$

Všimněte si, že tento vztah je součet první rovnice v (2) vynásobené $\mathrm{d}x$ a druhé vynásobené $\mathrm{d}y$, a tedy obsahuje obě tyto rovnice zároveň. Pro $x = 1$, $y = 2$ a $z = 0$ dostaneme

$$6\,\mathrm{d}x - 4\,\mathrm{d}y + 12\,\mathrm{d}z = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}z = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{d}y\,.$$

A protože $\mathrm{d}z = z'_{,x}\,\mathrm{d}x + z'_{,y}\,\mathrm{d}y$, dostaneme opět $z'_{,x}(1,2) = -\frac{1}{2}$ a $z'_{,y}(1,2) = \frac{1}{3}$.

Při výpočtu druhého diferenciálu si musíme uvědomit, že proměnné x a y jsou nezávislé, a proto je $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = 0$. Naopak z je závislá na proměnných x a y, a proto nemusí platit $\mathrm{d}^2z = 0$. Druhý diferenciál funkce $F(x, y, z)$ dává

$$(6z\,\mathrm{d}y + 6y\,\mathrm{d}z + 4\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x + (6z\,\mathrm{d}x + 6x\,\mathrm{d}z - 2\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y+ \\ +(6y\,\mathrm{d}x + 6x\,\mathrm{d}y + 6z\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}z + (6xy + 3z^2)\mathrm{d}^2z = 0\,.$$

Protože pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$ je $\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y$, plyne z této rovnice

$$-8\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\,\mathrm{d}y^2 + 12\,\mathrm{d}^2z = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}^2z = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{d}x^2 - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{d}y^2\,.$$

A protože $\mathrm{d}^2z = z''_{,xx}\,\mathrm{d}x^2 + 2z''_{,xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + z''_{,yy}\,\mathrm{d}y^2$, dostaneme srovnáním těchto vztahů opět

$$z''_{,xx}(1, 2) = \tfrac{2}{3}\,, \qquad z''_{,xy}(1, 2) = -\tfrac{1}{12}\,, \qquad z''_{,yy}(1, 2) = -\tfrac{1}{6}\,.$$

Příklad 5.r. Nechť jsou funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ řešením soustavy rovnic

$$x^2 - y^2 + z^3 = 1\,, \qquad xy + xz + yz = 3 \tag{3}$$

v okolí bodu $[1, 1, 1]$. Najděte Taylorovy polynomy stupně 2 funkcí $y = y(x)$ a $z = z(x)$ se středem v bodě $x = 1$.

Řešení: Taylorův polynom stupně dva funkce $f(x)$ se středem v bodě $x = 1$ je

$$T_2(f; x) = f(1) + f'(1)\,(x - 1) + \tfrac{1}{2}\,f''(1)\,(x - 1)^2\,.$$

Proto musíme najít první dvě derivace funkcí $y = y(x)$ a $z = z(x)$ v bodě $x = 1$.

Pro $x = y = z = 1$ jsou obě rovnice splněny a obě funkce v rovnicích jsou třídy $C_\infty(\mathbb{R}^3)$. Podmínka na determinant z věty o implicitních funkcích zaručuje jednoznačnou řešitelnost následující soustavy a ověříme ji během výpočtu.

Jestliže derivujeme obě rovnice v (3) podle x (protože $y = y(x)$ a $z = z(x)$ tam jiná nezávislá proměnná vlastně ani není), dostaneme vztahy

$$2x - 2yy' + 3z^2z' = 0\,, \qquad y + z + (x + z)y' + (x + y)z' = 0\,. \tag{4}$$

V bodě $x = y = z = 1$ je to soustava

$$2 - 2y' + 3z' = 0\,, \qquad 2 + 2y' + 2z' = 0\,,$$

která má jediné řešení $y'(1) = -\frac{1}{5}$, $z'(1) = -\frac{4}{5}$. Protože má uvedená rovnice právě jedno řešení, je podmínka na determinant ve větě o implicitních funkcí splněna.

Druhé derivace funkcí $y = y(x)$ a $z = z(x)$ dostaneme tak, že derivujeme obě rovnice v (4). To dává

$$2 - 2(y')^2 + 6z(z')^2 - 2yy'' + 3z^2z'' = 0\,, \\ y' + z' + (1 + z')y' + (1 + y')z' + (x + z)y'' + (x + y)z'' = 0\,.$$

Když dosadíme $x = y = z = 1$ a $y' = -\frac{1}{5}$, $z' = -\frac{4}{5}$, dostaneme soustavu

$$-2y'' + 3z'' = -\tfrac{54}{25}\,, \qquad 2y'' + 2z'' = \tfrac{42}{25}\,.$$

Její řešení je $y'' = \frac{117}{125}$ a $z''(1) = -\frac{12}{125}$.

Hledané Taylorovy polynomy tedy jsou

$$y(x) \sim 1 - \tfrac{1}{5}\,(x-1) + \tfrac{117}{250}\,(x-1)^2\,, \qquad z(x) \sim 1 - \tfrac{4}{5}\,(x-1) - \tfrac{6}{125}\,(x-1)^2\,.$$

Příklad 6.r. Najděte všechny parciální derivace do řádu 2 včetně funkcí $u = u(x,y)$ a $v = v(x,y)$, které jsou definovány jako řešení soustavy rovnic

$$(u^2 - v^2)x - 2uvy = 1\,, \qquad 2uvx + (u^2 - v^2)y = 0 \tag{5}$$

v okolí bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 0, -1, 0]$.

Řešení: Obě funkce v rovnicích (5) jsou třídy $C_\infty(\mathbb{R}^4)$ a pro daný jsou obě rovnice (5) splněny. Jestliže spočítáme diferenciály obou rovnic, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} &(u^2 - v^2)\,\mathrm{d}x - 2uv\,\mathrm{d}y + 2(xu - yv)\,\mathrm{d}u - 2(xv + yu)\,\mathrm{d}v = 0\,,\\ &2uv\,\mathrm{d}x + (u^2 - v^2)\,\mathrm{d}y + 2(xv + yu)\,\mathrm{d}u + 2(xu - yv)\,\mathrm{d}v = 0\,, \end{aligned} \tag{6}$$

pro neznámé $\mathrm{d}u$ a $\mathrm{d}v$. Pro uvedené hodnoty je to soustava

$$\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}u = 0\,, \quad \mathrm{d}y - 2\,\mathrm{d}v = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Z toho plyne, že $u'_{,x}(1,0) = v'_{,y}(1,0) = \frac{1}{2}$ a $u'_{,y}(1,0) = v'_{,x}(1,0) = 0$.

Druhé diferenciály dostaneme tak, že najdeme diferenciály rovnic v soustavě (6). Protože jsou x a y nezávisle proměnné, je $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = 0$, a tedy

$$\begin{aligned} &2(u\,\mathrm{d}u - v\,\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}x - 2(v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}y + 2(u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u - v\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}u -\\ &\qquad -2(v\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}v + u\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}v + 2(xu - yv)\,\mathrm{d}^2u - 2(xv + yu)\,\mathrm{d}^2v = 0\,,\\ &2(v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}x + 2(u\,\mathrm{d}u - v\,\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}y + 2(v\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}v + u\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}u +\\ &\qquad +2(u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u - v\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}v + 2(xv + yu)\,\mathrm{d}^2u + 2(xu - yv)\,\mathrm{d}^2v = 0\,. \end{aligned}$$

Jestliže do těchto vztahů dosadíme $x = -u = 1$, $y = v = 0$ a nalezené hodnoty $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$, dostaneme soustavu

$$-\tfrac{3}{2}\,\mathrm{d}x^2 + \tfrac{3}{2}\,\mathrm{d}y^2 - 2\mathrm{d}^2u = 0\,, \qquad -3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\mathrm{d}^2v = 0\,,$$

která má řešení

$$\mathrm{d}^2u = -\tfrac{3}{4}\,\mathrm{d}x^2 + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{d}y^2\,, \qquad \mathrm{d}^2v = -\tfrac{3}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Tedy druhé parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} &u''_{,xx}(1,0) = -\tfrac{3}{4}\,, \qquad &&u''_{,xy}(1,0) = 0\,, \qquad &&u''_{,yy}(1,0) = \tfrac{3}{4}\,,\\ &v''_{,xx}(1,0) = 0\,, &&v''_{,xy}(1,0) = -\tfrac{3}{4}\,, &&v''_{,yy}(1,0) = 0\,. \end{aligned}$$

Úlohu lze samozřejmě řešit tak, že místo diferenciálů bychom, podobně jako v příkladě 4, počítali přímo parciální derivace.

Neřešené příklady

Příklad 1. V bodě $x = 0$ najděte první tři derivace funkce $y = y(x)$, která je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [0, 1]$ definována rovnicí $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$.

$$\Big[y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = -\tfrac{2}{3}\,, \quad y'''(0) = -\tfrac{2}{3}\,. \Big]$$

Příklad 2. Najděte první dvě derivace funkce $y = y(x)$, která je definována rovnicí

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

$$\left[y'(x) = \frac{x + y}{x - y}\,, \quad y''(x) = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}\,. \right]$$

Příklad 3. Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 + \operatorname{tg}\big((x - y)z\big) = x^2 + y^2 - 1\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$. $\quad \big[-\tfrac{8}{9}\,. \big]$

Příklad 4. V bodě $[x_0, y_0] = [1, -2]$ najděte druhý diferenciál funkce $z = z(x, y)$, která je v okolí bodu $[1, -2, 1]$ definována rovnicí

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0\,.$$

$$\Big[\mathrm{d}^2 z = -\tfrac{2}{5}\,\mathrm{d}x^2 - \tfrac{2}{5}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \tfrac{349}{125}\,\mathrm{d}y^2. \Big]$$

Příklad 5. Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 - xyz^2 + x^2 z - y^3 = 0\,.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě $[1, 1]$.

$$\Big[\mathrm{d}z = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y\,, \quad \mathrm{d}^2 z = -\tfrac{3}{2}\,\mathrm{d}x^2 + 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}y^2\,. \Big]$$

Příklad 6.

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, -1]$ jako řešení rovnice

$$yz^3 + x^2 z + xy^2 - y^2 = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, -1]$.

$$\Big[T_2 = -1 + \tfrac{3}{2}\,(x - 1) - \tfrac{1}{2}\,(y + 1) + \tfrac{35}{8}\,(x - 1)^2 - \tfrac{3}{2}\,(x - 1)(y + 1) - \tfrac{3}{8}\,(y + 1)^2 \Big]$$

Příklad 7. Najděte všechny druhé parciální derivace funkce $z = z(x, y)$, která je řešením rovnice $z^3 - 3xyz = 1$.

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2xy^3 z}{(z^2 - xy)^3}\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2x^3 yz}{(z^2 - xy)^3}\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2 y^2)}{(z^2 - xy)^3}\,. \right]$$

Příklad 8. Nechť p je tlak, V objem a T teplota plynu a $F(p,V,T)=0$ jeho stavová rovnice. V termodynamice se pro parciální derivace většinou píše $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$, kde index T naznačuje, že se derivuje při konstantní teplotě T, a podobně pro další parciální derivace. Dokažte, že platí vztah

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p=-1\,.$$

Příklad 9. Nechť jsou funkce $x=x(z)$ a $y=y(z)$ dány jako řešení soustavy rovnic

$$x^2+y^2+z^2=1\,,\qquad x+y+z=0\,.$$

Najděte derivace $x'(z)$ a $y'(z)$. $\left[x'(z)=\dfrac{y-2z}{x-y}\,,\quad y'(z)=\dfrac{x-2z}{y-x}\,.\right]$

Příklad 10. Nechť jsou funkce $y=y(x)$ a $z=z(x)$ definovány v okolí bodu $[x_0,y_0,z_0]=[1,1,1]$ jako řešení soustavy rovnic

$$x^2+2y^2+3z^2=6\,,\qquad 2x-yz=1\,.$$

Najděte diferenciály $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ v bodě $x=1$. $\left[\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\,,\quad \mathrm{d}z=-\mathrm{d}x\,.\right]$

Příklad 11. Nechť jsou v okolí bodu $[0,-1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^2+y^2+z^2+xy-xz=2\,,\qquad z^2+2xz+yz+y\sin xz=0$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(0)$ a $z''(0)$.
$\left[y''(0)=\frac{3}{2}\,,\quad z''(0)=\frac{1}{2}\,.\right]$

Příklad 12. Nechť jsou funkce $y=y(x)$ a $z=z(x)$ definovány v okolí bodu $[x_0,y_0,z_0]=[1,1,1]$ jako řešení soustavy rovnic

$$x^3-xy^2+z^3=1\,,\qquad x+y+z=3\,.$$

Aproximujte funkce $y=y(x)$ a $z=z(x)$ v okolí bodu $x_0=1$ Taylorovým polynomem druhého stupně.
$\left[Y_2=1-\frac{1}{5}\,(x-1)+\frac{132}{125}\,(x-1)^2,\quad Z_2=1-\frac{4}{5}\,(x-1)-\frac{132}{125}\,(x-1)^2.\right]$

Příklad 13. Nechť je $x=t+t^{-1}$, $y=t^2+t^{-2}$ a $z=t^3+t^{-3}$. Najděte $y'(x)$, $z'(x)$, $y''(x)$ a $z''(x)$. $\left[y'=2\big((t+t^{-1}\big)=2x\,,\quad z'=3\big(t^2+1+t^{-2}\big)=3x^2-3\,,\quad y''(x)=2\,,\quad z''(x)=6x\,.\right]$

Příklad 14. Nechť je $x=u+\ln v$, $y=v-\ln u$ a $z=2u+v$. V bodě, který odpovídá hodnotám $u=v=1$ aproximujte funkci $z=z(x,y)$ Taylorovým polynomem prvního stupně.
$\left[T_1=3+\frac{3}{2}\,(x-1)-\frac{1}{2}\,(y-1)\,.\right]$

Příklad 15. Nechť je funkce $z=z(x,y)$ definována soustavou rovnic

$$x=\mathrm{e}^{u+v}\,,\qquad y=\mathrm{e}^{u-v}\,,\qquad z=uv\,.$$

Najděte diferenciály $\mathrm{d}z$ a $\mathrm{d}^2 z$ v bodě, který odpovídá hodnotám $u = v = 0$.

$$\left[\mathrm{d}z = 0\,, \quad \mathrm{d}^2 z = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y^2.\right]$$

Příklad 16. Nechť a, b a c jsou konstanty a funkce $z = z(x, y)$ je definována jako řešení rovnice $ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$, kde $\Phi(u)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. Dokažte, že funkce $z(x, y)$ splňuje vztah

$$(cy - bz)\,\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\,\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay\,.$$