Cvičení 10.2.

Regulární zobrazení

<u>Definice:</u> Nechť je $M \subset \mathbb{R}^3$ otevřená množina. Zobrazení množiny M do $\mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$x = x(u,v,w)\,, \qquad y = y(u,v,w)\,, \qquad y = y(u,v,w)$$

se nazývá regulární na množině M, když mají funkce $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ a $z(u,v,w)$ na množině M spojité parciální derivace a jakobián zobrazení

$$J(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{pro každé } (u,v,w) \in M.$$

<u>Řešený příklad</u>

Příklad 1.r. Dokažte, že zobrazení definované na množině $M = (0,\infty)\times(0,\infty)$ rovnicemi $u = \dfrac{x^2}{y}$ a $v = \dfrac{y^2}{x}$ je regulární a najděte inverzní zobrazení.

<u>*Řešení:*</u> Funkce $u = u(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ a $v = v(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ mají na množině $M = (0,\infty)\times(0,\infty)$ spojité parciální derivace všech řádů. Jejich Jacobiho matice

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix}$$

Protože její determinant, tj. jakobián $J = 3 \neq 0$, je zobrazení regulární.

Abychom našli inverzní zobrazení, vyjádříme z první rovnice $y = \dfrac{x^2}{u}$. Po dosazení do druhé rovnice dostaneme

$$v = \frac{x^4}{u^2 x}\,, \quad \text{tj.} \quad x = \sqrt[3]{u^2 v}$$

Ze vztahu pro y pak plyne $y = \sqrt[3]{uv^2}$. To znamená, že inverzní zobrazení $(u,v) \mapsto (x,y)$ je dáno vztahy

$$x = x(u,v) = \sqrt[3]{u^2 v}\,, \qquad y = y(u,v) = \sqrt[3]{uv^2}\,.$$

<u>Neřešený příklad</u>

Příklad 1. Nechť jsou funkce $u = u(x,y)$ a $v = v(x,y)$ definovány jako řešení soustavy rovnic

$$xu - yv = 0\,, \qquad yu + xv = 1\,.$$

Najděte Jacobiho matici tohoto zobrazení a největší množinu, na které je zobrazení regulární.

$$\left[\mathbf{J} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -xu - yv & xv - yu \\ -xv + yu & -xu - yv \end{pmatrix}, \quad \text{regulární na } \mathbb{R} \setminus [0;0].\right]$$

Některá důležitá regulární zobrazení

Nyní uvedeme několik příkladů regulárních zobrazení, které se často používají při výpočtu vícenásobných integrálů.

POLÁRNÍ SOUŘADNICE

Uvažujme zobrazení $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^2$, které je definované vztahy

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad M = \bigl\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2\,;\; r > 0\,,\; \varphi \in (-\pi,\pi)\bigr\}\,. \tag{1}$$

Pro toto zobrazení je $\mathbf{f}(M) = \mathbb{R}^2 \setminus \bigl\{(x,0)\,,\; x \le 0\bigr\}$. Jacobiho matice a jakobián J je

$$\mathbf{f}'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad J(r,\varphi) = r \ne 0\,.$$

A protože je $\mathbf{f} \in C_\infty(M)$, jedná se o regulární zobrazení. Toto zobrazení je prosté a jeho inverzní zobrazení,

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad \varphi = \operatorname{sgn}(y)\cdot \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

je regulární zobrazení na $\mathbf{f}(M)$, jehož jakobián se rovná $J^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Jestliže interpretujeme $[x,y]$ jako souřadnice bodu v rovině $\mathbb{R}^2$, nazývají se $[r,\varphi]$ *polární souřadnice*. Geometricky je r vzdálenost bodu $[x,y]$ od počátku souřadnic a φ je úhel, který svírá rádius–vektor $\mathbf{r} = (x,y)$ s kladný směrem osy x.

Křivky dané rovnicí $r = R = \text{konst.}$ jsou kružnice se středem v počátku souřadnic s poloměrem R bez bodu $[-R,0]$ a křivky $\varphi = \alpha = \text{konst.}$ jsou polopřímky, které vycházejí z počátku a mají směrnici $k = \operatorname{tg}\alpha$.

CYLINDRICKÉ SOUŘADNICE

Nyní zobecníme polární souřadnice zavedené v předchozím příkladě. Definujeme zobrazení $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^3$, kde $M = \bigl\{(r,\varphi,\zeta)\,;\; r > 0\,,\; \varphi \in (0,2\pi)\,,\; \zeta \in \mathbb{R}\bigr\}$, rovnicemi

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad z = \zeta\,. \tag{2}$$

Zobrazení (2) je prosté a obraz množiny M je $\mathbf{f}(M) = \mathbb{R}^3 \setminus \bigl\{(x,0,z)\,;\; x \ge 0\,,\; z \in \mathbb{R}\bigr\}$. Jakobián zobrazení je $J(r,\varphi,\zeta) = r \ne 0$, a tedy $\mathbf{f}$ je regulární zobrazení.

Protože plochy dané rovnicí $r = R > 0$ jsou válcové plochy s poloměrem R, jejichž osa je souřadnicová osa z a poloměrem a, nazývají se (r,φ,ζ) *válcové* nebo *cylindrické souřadnice*.

SFÉRICKÉ SOUŘADNICE

Vecylindrických souřadnicích (r, φ, ζ) leží proměnné r a ζ leží v polorovině $r > 0$. Jestliže zavedeme ještě jedno regulární zobrazení $\mathbf{g}$ dané rovnicemi

$$r = \rho \cos\theta\,, \quad \zeta = \rho \sin\theta\,, \quad \varphi = \varphi\,, \qquad (\rho, \varphi, \theta) \in N = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\tfrac{1}{2}\,\pi, \tfrac{1}{2}\,\pi)\,,$$

je složené zobrazení $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : N \to \mathbb{R}^3$ regulární. Toto zobrazení je definováno vztahy

$$x = \rho \cos\theta \cos\varphi\,, \qquad y = \rho \cos\theta \sin\varphi\,, \qquad z = \rho \sin\theta \tag{3}$$

a zobrazuje množinu N prostě na množinu $\mathbf{h}(N) = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(x, 0, z)\,;\ x \ge 0\,,\ z \in \mathbb{R}\big\}$. Jakobián tohoto zobrazení je roven součinu jakobiánů zobrazeni $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$, tj.

$$J = r\rho = \rho^2 \cos\theta\,.$$

Protože plochy dané rovnicí $\rho = R > 0$ jsou v souřadnicích (x, y, z) kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, nazývají se souřadnice $(\rho, \varphi, \theta) \in N$ *sférické souřadnice.*

ZOBECNĚNÍ POLÁRNÍCH A SFÉRICKÝCH SOUŘADNIC

Jisté zobecnění polárních nebo sférických souřadnic dostaneme tak, že místo (1) položíme

$$x = ar \cos\varphi\,, \quad y = br \sin\varphi\,, \tag{4}$$

kde a, $b > 0$ jsou konstanty, $r > 0$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Při tomto zobrazení jsou křivky $r = R > 0$ v proměnných x a y popsány rovnicí $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = R^2$. Jsou to tedy elipsy se středem v počátku a poloosami aR a bR, které jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Protože toto zobrazení lze složit pomocí dvou zobrazení $x = au$, $y = bv$ a $u = r\cos\varphi$, $v = r \sin\varphi$, které mají jakobiány $J_1 = ab$ a $J_2 = r$, je jakobián tohoto zobrazení roven $J = abr$.

Analogicky lze zobecnit sférické souřadnice tak, že místo (3) položíme

$$x = ar \cos\theta \cos\varphi\,, \quad y = br \cos\theta \sin\varphi\,, \quad z = cr \sin\theta\,, \tag{5}$$

kde a, b, $c > 0$ a $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\theta \in (-\frac{1}{2}\,\pi, \frac{1}{2}\,\pi)$. Plochy s rovnicí $r = R > 0$ jsou tomto případě elipsoidy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = R^2$. Jakobián tohoto zobrazení $J = abcr^2 \cos\theta$ lze najít podobně jako v dvourozměrném případě.

SFÉRICKÉ SOUŘADNICE V $\mathbb{R}^n$

V tomto příkladě zobecníme sférické souřadnice v prostoru $\mathbb{R}^3$ na sférické souřadnice v prostoru $\mathbb{R}^n$. Postup nejprve ukážeme v prostoru $\mathbb{R}^4$. Pro první tři souřadnice bodu $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4$ zavedeme sférické souřadnice (r, φ, θ_1) podobně jako v (3) a čtvrtou souřadnici označíme $x_4 = z$. Pak je $r > 0$ a $z \in \mathbb{R}$. Pro souřadnice r a z zavedeme polární souřadnice $r = \rho\cos\theta_2$, $z = \rho \sin\theta_2$, kde $\rho > 0$ a $\theta_2 \in \big(-\frac{1}{2}\,\pi, \frac{1}{2}\,\pi\big)$. Tak dostaneme zobrazení

$$x_1 = \rho \cos\theta_2 \cos\theta_1 \cos\varphi\,, \quad x_2 = \rho \cos\theta_2 \cos\theta_1 \sin\varphi\,, \quad x_3 = \rho \cos\theta_2 \sin\theta_1\,, \quad x_4 = \rho \sin\theta_2\,,$$

kde $\rho > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ a θ_1, $\theta_2 \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Toto složené zobrazení je opět regulární a jeho jakobián je $J = \rho\, r^2 \cos\theta_1 = \rho^3 \cos^2\theta_2 \cos\theta_1$.

Zobecnění na případ $\mathbb{R}^n$ je analogické. Pro prvních $n-1$ souřadnic bodu $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ zavedeme sférické souřadnice $(r, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-3})$ v $\mathbb{R}^{n-1}$ a poslední složku označíme $x_n = z$. Pro proměnné $r > 0$ a $z \in \mathbb{R}$ zavedeme souřadnice $r = \rho \cos\theta_{n-2}$, $z = \rho \sin\theta_{n-2}$, kde $\rho > 0$ a $\theta_{n-2} \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Tak dostaneme regulární zobrazení množiny M, $\rho > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ a $\theta_k \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, kde $k = 1, \ldots, n-2$, definované vztahy

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\theta_{n-2} \ldots \cos\theta_1 \cos\varphi\,, & x_2 &= \rho \cos\theta_{n-2} \ldots \cos\theta_1 \sin\varphi\,,\\
x_3 &= \rho \cos\theta_{n-2} \ldots \cos\theta_2 \sin\theta_1\,, & x_4 &= \rho \cos\theta_{n-2} \ldots \cos\theta_3 \sin\theta_2\,,\\
&\ldots & &\ldots\\
x_{n-1} &= \rho \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-3}\,, & x_n &= \rho \sin\theta_{n-2}\,.
\end{aligned}$$

Indukcí lze ukázat, že jakobián tohoto zobrazení je

$$J = \rho\, r^{n-2} \cos^{n-3}\theta_{n-3} \ldots \cos^2\theta_2 \cos\theta_1 = \rho^{n-1} \cos^{n-2}\theta_{n-2} \cos^{n-3}\theta_{n-3} \ldots \cos^2\theta_2 \cos\theta_1\,.$$

Při tomto zobrazení je nadplocha $\rho = R > 0$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ dána rovnicí $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$. Je to tedy n–rozměrná sféra s poloměrem R. Proto se tyto souřadnice nazývají sférické souřadnice v $\mathbb{R}^n$.