Cvičení 11.1.

Lokální extrémy funkce ve vnitřním bodě množiny

<u>Věta.</u> (*Nutná podmínka pro lokální extrém*)
Nechť je funkce $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferencovatelná na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Má-li funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$ lokální extrém, je $\mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) = 0$.

Tuto podmínku je možné zapsat jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0 \quad \text{pro každé } i = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

<u>Věta.</u> (*Postačující podmínka pro lokální extrém*)
Nechť má funkce $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ druhý diferenciál a v bodě $\mathbf{a} \in M$ je $\mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) = 0$. Jestliže je kvadratická forma $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x})$

pozitivně definitní má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální minimum
negativně definitní má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum
indefinitní nemá funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém

<u>Řešené příklady</u>

Příklad 1.r. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$, kde $x^2+y^2<1$.
<u>Řešení:</u> Parciální derivace funkce $f(x,y)$ jsou

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= y\sqrt{1-x^2-y^2} + xy \cdot \tfrac{1}{2}\,(1-x^2-y^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{y(1-2x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x(1-x^2-2y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,.
\end{aligned}$$

Nutné podmínky pro lokální extrém $f'_{,x} = f'_{,y} = 0$ vedou na soustavu rovnic

$$y(1-2x^2-y^2) = 0\,, \qquad x(1-x^2-2y^2) = 0\,.$$

Z první rovnice dostaneme $y=0$ nebo $2x^2+y^2=1$.

Je-li $y=0$ plyne z druhé rovnice $x(1-x^2)=0$. Protože $y=0$ nemůže být $x^2=1$, a proto je $x=0$. Tím jsme našli jeden bod $\mathbf{a}_1 = [0,0]$, ve kterém může mít funkce $f(x,y)$ lokální extrém.

Je-li $y \neq 0$, musí být $y^2 = 1-2x^2$. Když dosadíme do druhé rovnice, dostaneme $x(3x^2-1)=0$. Kdyby bylo $x=0$, dostali bychom $y^2=1$, což není možné. Proto musí být $x^2=\frac{1}{3}$, tj. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pak ale je $y^2=\frac{1}{3}$. Tak dostaneme další čtyři body $\mathbf{a}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\mathbf{a}_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\mathbf{a}_4 = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ a $\mathbf{a}_5 = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Takto jsme získali pět bodů, ve kterých může mít funkce $f(x,y)$ lokální extrém. Musíme ještě rozhodnout, jaká je v těchto bodech kvadratická forma, která odpovídá druhému diferenciálu. Protože

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-4xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{xy(1-2x^2-y^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{xy(-3+2x^2+3y^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1-2x^2-3y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^2(1-2x^2-y^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{1-3x^2-3y^2+2x^4+3x^2y^2+2y^4}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-4xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{xy(1-x^2-2y^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{xy(-3+3x^2+2y^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\,.$$

Tedy v bodě $\mathbf{a}_1 = [0,0]$ je kvadratická forma

$$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}) = 2h_1h_2$$

indefinitní a v tomto bodě nemá funkce $f(x,y)$ lokální extrém.
V bodě $\mathbf{a}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ je matice $\mathbf{A}$, která odpovídá kvadratické formě $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}_2, \mathbf{h})$ rovna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\sqrt{3}, & -\frac{2}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{2}{3}\sqrt{3}, & -\frac{4}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

A protože $D_1 = -\frac{4}{3}\sqrt{3} < 0$ a $D_2 = 4 > 0$, má funkce $f(x,y)$ v bodě $\mathbf{a}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ lokální maximum.
Podobně se ukáže, že v bodě $\mathbf{a}_5$ je lokální maximum a v bodech $\mathbf{a}_3$ a $\mathbf{a}_4$ je lokální minimum.

Příklad 2.r. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x+3y}\big(8x^2 - 6xy + 3y^2\big)$.
<u>Řešení:</u> Parciální derivace funkce $f(x,y)$ jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{2x+3y}\big(2(8x^2-6xy+3y^2)+16x-6y\big)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{2x+3y}\big(3(8x^2-6xy+3y^2)-6x+6y\big)\,.$$

Protože $\mathrm{e}^{2x+3y} \neq 0$ vedou nutné podmínky na extrém k soustavě rovnic

$$(8x^2 - 6xy + 3y^2) + 8x - 3y = 0\,, \qquad (8x^2 - 6xy + 3y^2) - 2x + 2y = 0\,.$$

Jestliže druhou rovnici odečteme od první, dostaneme z této soustavy vztah $y = 2x$. Jestliže dosadíme do první rovnice, zjistíme, že $4x^2 + x = 0$. Proto jsou body, ve kterých může mít funkce $f(x,y)$ lokální extrém $\mathbf{a}_1 = [0,0]$ a $\mathbf{a}_2 = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right]$.

Abychom rozhodli o typu extrému funkce $f(x,y)$ v bodech $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$, budeme zkoumat druhý diferenciál funkce $f(x,y)$ a těchto bodech. První parciální derivace mají tvar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{2x+3y} F(x,y)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{2x+3y} G(x,y)\,,$$

kde

$$F(x,y) = 16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y\,, \qquad G(x,y) = 24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y\,.$$

Pro druhé parciální derivace dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\mathrm{e}^{2x+3y}F(x,y) + \mathrm{e}^{2x+3y}(32x - 12y + 16)\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 3\mathrm{e}^{2x+3y}F(x,y) + \mathrm{e}^{2x+3y}(-12x + 12y - 6)\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 3\mathrm{e}^{2x+3y}G(x,y) + \mathrm{e}^{2x+3y}(-18x + 18y + 6)\,.
\end{aligned}$$

Protože nutné podmínky pro extrém jsou $F(\mathbf{a}) = G(\mathbf{a}) = 0$, je v bodě $\mathbf{a}_1 = [0,0]$

$$f''_{,xx}(0,0) = 16\,, \qquad f''_{,xy}(0,0) = -6\,, \qquad f''_{,yy}(0,0) = 6\,.$$

Matice $\mathbf{A}$, která odpovídá kvadratické formě $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}_1, \mathbf{h})$ proto je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16, & -6 \\ -6, & 6 \end{pmatrix}.$$

A protože $D_1 = 16 > 0$ a $D_2 = 60 > 0$ má funkce $f(x,y)$ v bodě $\mathbf{a}_1 = [0,0]$ lokální minimum.
V bodě $\mathbf{a}_2 = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right]$ je

$$f''_{,xx}(0,0) = 14\mathrm{e}^{-2}\,, \qquad f''_{,xy}(0,0) = -9\mathrm{e}^{-2}\,, \qquad f''_{,yy}(0,0) = \tfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2}\,.$$

Matice $\mathbf{A}$, která odpovídá kvadratické formě $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}_2, \mathbf{h})$ proto je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14\mathrm{e}^{-2}, & -9\mathrm{e}^{-2} \\ -9\mathrm{e}^{-2}, & \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}.$$

A protože $D_1 = 14\mathrm{e}^{-2} > 0$ a $D_2 = -60\mathrm{e}^{-4} < 0$ nemá funkce $f(x,y)$ v bodě $\mathbf{a}_2 = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right]$ lokální extrém.

Příklad 3.r. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}\,z^2 - 3xz - 2y + 2z$.
<u>ŘEŠENÍ:</u> Protože parciální derivace funkce $f(x,y,z)$ jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3z\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = z - 3x + 2\,,$$

získáme nutné podmínky pro lokální extrém

$$x^2 - z = 0\,, \qquad y - 1 = 0\,, \qquad z - 3x + 2 = 0\,.$$

Tato soustava nám dává dva body $\mathbf{a}_1 = [1,1,1]$ a $\mathbf{a}_2 = [2,1,4]$, ve kterých může mít funkce $f(x,y,z)$ lokální extrém. O jeho typu rozhodneme pomocí druhého diferenciálu funkce $f(x,y,z)$ v bodech $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$. Protože druhé parciální derivace jsou

$$f''_{,xx} = 6x\,, \quad f''_{,xy} = 0\,, \quad f''_{,xz} = -3\,, \quad f''_{,yy} = 2\,, \quad f''_{yz} = 0\,, \quad f''_{,zz} = 1\,,$$

Je matice $\mathbf{A}$, která odpovídá kvadratické formě $\mathrm{d}^2 f$ rovna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6x, & 0, & -3 \\ 0, & 2, & 0 \\ -3, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

V bodě $\mathbf{a}_1 = [1, 1, 1]$ dostaneme

$$D_1 = 6 > 0\,, \quad D_2 = 12 > 0\,, \quad D_3 = -6 < 0\,,$$

a tedy v bodě $\mathbf{a}_1 = [1, 1, 1]$ nemá funkce $f(x, y, z)$ lokální extrém.
V bodě $\mathbf{a}_2 = [2, 1, 4]$ je

$$D_1 = 12 > 0\,, \quad D_2 = 24 > 0\,, \quad D_3 = 6 > 0\,,$$

a tedy v bodě $\mathbf{a}_2 = [2, 1, 4]$ má funkce $f(x, y, z)$ lokální minimum.

Neřešené příklady

Příklad 1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

$\left[\text{v bodě } \left[1; \tfrac{1}{2}\right] \text{ je lokální minimum,} \quad \text{v bodě } [0; 0] \text{ není lokální extrém.}\right]$

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$.

$\left[\text{v bodě } [5; 2] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Příklad 3. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \dfrac{1 + x + y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

$\left[\text{v bodě } [1; 1] \text{ je lokální maximum.}\right]$

Příklad 4. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$.

$\left[\text{v bodě } [1; -2] \text{ není lokální extrém.}\right]$

Příklad 5. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2 - xy - y^2}(5x + 7y - 25)$.

$\left[\text{v bodě } [1; 3] \text{ je lokální maximum,} \quad \text{v bodě } \left[-\tfrac{1}{26}; \tfrac{3}{26}\right] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Příklad 6. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

$\left[\text{v bodě } [1; 2] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Příklad 7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$.

$\left[\text{v bodě } [1; 1] \text{ není lokální extrém.}\right]$

Příklad 8. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy\ln(x^2 + y^2)$.

$\left[\begin{array}{l}\text{v bodech } \left[\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}; \tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right] \text{ a } \left[-\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}; -\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right] \text{ jsou lokální minima}\,, \\ \text{v bodech } [\pm 1; 0] \text{ a } [0; \pm 1] \text{ nejsou lokální extrémy.}\end{array}\right]$

Příklad 9. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, kde $x,\ y,\ z > 0$.

$\left[\text{v bodě } \left[\tfrac{1}{2}; 1; 1\right] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Příklad 10. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + 8z^2$, $x,\ y,\ z > 0$.

$\left[\text{v bodě } \left[1; \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{4}\right] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Příklad 11. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz)$.

$\left[\text{v bodě } [2; 2; 2] \text{ je lokální minimum,} \quad \text{v bodě } [0; 0; 0] \text{ není lokální extrém.}\right]$