Cvičení 11.2.

Lokální vázané extrémy

<u>Věta.</u> (Metoda Lagrangeových multiplikátorů – *nutná podmínka pro extrém*)
Nechť jsou funkce $f(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ diferencovatelné na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ a pro každé $\mathbf{x} \in M$ je $\|\mathrm{grad}\, g(\mathbf{x}\| \neq 0$. Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ na množině $g(\mathbf{x}) = 0$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, existuje reálné číslo λ takové, že $\mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) + \lambda \mathrm{d}g(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) = 0$.

Jestliže defunujeme Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x})$$

lze uvedenou podmínku zapsat jako $\mathrm{d}L(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) = 0$ neboli

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0 \quad \text{pro každé } i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

<u>Věta.</u> (Metoda Lagrangeových multiplikátorů – *postačující podmínka pro extrém*)
Nechť mají funkce $f(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ druhý diferenciál a pro každé $\mathbf{x} \in M$ je $\|\mathrm{grad}\, g(\mathbf{x}\| \neq 0$. a v bodě $\mathbf{a}$ jsou splněny nutné podmínky pro lokální extrém funkce $f(\mathbf{x})$ na množině $g(\mathbf{x}) = 0$. Jestliže je kvadratická forma $\mathrm{d}^2 L(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x})$ na množině $\mathrm{d}g(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) = 0$

pozitivně definitní má funkce $f(\mathbf{x})$ na množině $g(\mathbf{x}) = 0$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální minimum
negativně definitní má funkce $f(\mathbf{x})$ na množině $g(\mathbf{x}) = 0$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum
indefinitní nemá funkce $f(\mathbf{x})$ na množině $g(\mathbf{x}) = 0$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém

<u>Věta.</u> (Metoda Lagrangeových multiplikátorů – *nutná podmínka pro extrém*)
Nechť jsou funkce $f(\mathbf{x})$ a $g_k(\mathbf{x})$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, r < n$, diferencovatelné na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ a pro každé $\mathbf{x} \in M$ je hodnost matice

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_r}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}(\mathbf{x})$$

rovna r. Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ na množině $g_k(\mathbf{x}) = 0$, kde $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, r$, v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, existují reálná čísla $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_r$ taková, že

$$\mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathrm{d}g_k(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) = 0\,.$$

Jestliže defunujeme Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k g_k(\mathbf{x})$$

lze uvedenou podmínku zapsat jako $\mathrm{d}L(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) = 0$ neboli

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0 \quad \text{pro každé } i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Věta. (Metoda Lagrangeových multiplikátorů – *postačující podmínka pro extrém*)
Nechť mají funkce $f(\mathbf{x})$ a $g_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots, r < n$, na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ druhý diferenciál a pro každé $\mathbf{x} \in M$ je hodnost matice

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_r}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}(\mathbf{x})$$

rovna r a v bodě $\mathbf{a}$ jsou splněny nutné podmínky pro lokální extrém funkce $f(\mathbf{x})$ na množině $g_k(\mathbf{x}) = 0$, kde $k = 1, 2, \dots, r$. Jestliže je kvadratická forma $\mathrm{d}^2 L(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x})$ na množině $\mathrm{d}g_k(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) = 0$, kde $k = 1, 2, \dots, r$,

pozitivně definitní má funkce $f(\mathbf{x})$ na množině $g_k(\mathbf{x}) = 0$, $k = 1, \dots, r$, v bodě $\mathbf{a}$ lokální minimum
negativně definitní má funkce $f(\mathbf{x})$ na množině $g_k(\mathbf{x}) = 0$, $k = 1, \dots, r$, v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum
indefinitní nemá funkce $f(\mathbf{x})$ na množině $g_k(\mathbf{x}) = 0$, $k = 1, \dots, r$, v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém

Řešené příklady

Příklad 1.r. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ za podmínky $4x^2 + y^2 = 25$.
Řešení: Protože se jedná o vázaný extrém, zavedeme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 25)\,.$$

Protože

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 12y + 8\lambda x = (2 + 8\lambda)x + 12y\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 12x + 4y + 2\lambda x = 12x + (4 + 2\lambda)y\,,$$

jsou nutné podmínky pro extrém

$$(1 + 4\lambda)x + 6y = 0\,, \quad 6x + (2 + \lambda)y = 0\,, \quad 4x^2 + y^2 = 25\,. \tag{1}$$

Z první rovnice dostaneme

$$y = -\tfrac{1}{6}(1 + 4\lambda)x$$

a když tento výraz dosadíme do druhé rovnice, zjistíme, že musí platit

$$\big((2 + \lambda)(1 + 4\lambda) - 36\big)x = \big(4\lambda^2 + 9\lambda - 34\big)x = 0\,.$$

Je-li $x = 0$, je také $y = 0$, ale tento bod nesplňuje podmínku $4x^2 + y^2 = 25$. Proto musí být

$$4\lambda^2 + 9\lambda - 34 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \lambda_1 = 2\,, \quad \lambda_2 = -\tfrac{17}{4}\,.$$

Pro $\lambda = 2$ jsou první dvě rovnice v (1)

$$9x + 6y = 0\,, \qquad 6x + 4y = 0\,,$$

a tedy jsou lineárně závislé. Jejich obecné řešení je $x = 2t$, $y = -3t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Jestliže dosadíme toto vyjádření x a y do podmínky $4x^2 + y^2 = 25$, dostaneme rovnici $t^2 = 1$, tj.

$t = \pm 1$. Pro $\lambda = 2$ jsme tedy našli dva body $\mathbf{a}_1 = [2, -3]$ a $\mathbf{a}_2 = [-2, 3]$, ve kterých může být lokální vázaný extrém.

Pro $\lambda = -\frac{17}{4}$ vedou první dvě rovnice v (1) na soustavu

$$-16x + 6y = 0\,, \qquad 6x - \tfrac{9}{4}\,y = 0\,,$$

ve které jsou obě rovnice lineárně závislé. Obecné řešení této soustavy je $x = 3t$, $y = 8t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Po dosazení do vazbové podmínky $4x^2 + y^2 = 25$, dostaneme pro t rovnici $t^2 = \frac{1}{4}$, tj. $t = \pm\frac{1}{2}$. Pro $\lambda = -\frac{17}{4}$ máme tedy další dva body $\mathbf{a}_3 = \left[\frac{3}{2}, 4\right]$ a $\mathbf{a}_4 = \left[-\frac{3}{2}, -4\right]$, ve kterých může mít funkce $f(x, y)$ vázaný extrém.

Protože druhé parciální derivace Lagrangeovy funkce jsou

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 + 8\lambda\,, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 12\,, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 4 + 2\lambda\,,$$

je druhý diferenciál Lagrangeovy funkce

$$\mathrm{d}^2 L = (2 + 8\lambda)\,\mathrm{d}x^2 + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (4 + 2\lambda)\,\mathrm{d}y^2\,.$$

Speciálně pro $\lambda = 2$ je

$$\mathrm{d}^2 L = 18\,\mathrm{d}x^2 + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 8\,\mathrm{d}y^2 = 2(3\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y)^2$$

a pro $\lambda = -\frac{17}{4}$ dostaneme

$$\mathrm{d}^2 L = -32\,\mathrm{d}x^2 + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \tfrac{9}{2}\,\mathrm{d}y^2 = -\tfrac{1}{2}\,(8\,\mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y)^2\,.$$

V obou případech je druhý diferenciál Lagrangeovy funkce pouze semidefinitní. Ale z vazbové podmínky dostaneme pro proměnné $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ vztah

$$\mathrm{d}g(x, y) = 8x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Pro $\lambda = 2$ splňují x a y rovnici $3x + 2y = 0$ a proto platí $\mathrm{d}y = \frac{8}{3}\,\mathrm{d}x$. Tedy v tomto případě nás zajímá kvadratická forma jedné proměnné $\Phi = 2\left(\frac{25}{3}\right)^2 \mathrm{d}x^2$, která je pozitivně definitní. Proto má funkce $f(x, y)$ na elipse $4x^2 + y^2 = 25$ v bodech $\mathbf{a}_1 = [2, -3]$ a $\mathbf{a}_2 = [-2, 3]$ lokální minimum.

Pro $\lambda = -\frac{17}{4}$ splňují x a y rovnici $8x - 3y = 0$ a proto platí $\mathrm{d}y = -\frac{3}{2}\,\mathrm{d}x$. Tedy v tomto případě nás zajímá kvadratická forma jedné proměnné $\Phi = -\frac{1}{2}\left(\frac{25}{2}\right)^2 \mathrm{d}x^2$, která je negativně definitní. Proto má funkce $f(x, y)$ na elipse $4x^2 + y^2 = 25$ v bodech $\mathbf{a}_3 = \left[\frac{3}{2}, 4\right]$ a $\mathbf{a}_4 = \left[-\frac{3}{2}, -4\right]$ lokální maximum.

Příklad 2.r. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy^2z^3$ za podmínky $x + y + z = 1$, x, y, $z > 0$.

Řešení: Jedná se o vázaný extrém, ale podmínka je velmi jednoduchá. Proto nepoužijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů, ale podmínku vyřešíme. Nejjednodušší bude vyjádřit $x = 1 - y - z$. Po dosazení do funkce $f(x, y, z)$ dostaneme funkci dvou proměnných

$$F(y, z) = (1 - y - z)y^2z^2\,.$$

Podmínky x, y, $z > 0$ pak vedou na podmínky pro $y > 0$, $z > 0$ a $y + z < 1$. Budeme tedy hledat lokální extrémy funkce $F(y, z)$ na otevřeném trojúhelníku $y > 0$, $z > 0$ a $y + z < 1$. Protože se jedná o lokální extrémy funkce na otevřené množině, jsou nutné podmínky pro extrém

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= -y^2z^3 + 2yz^3(1 - y - z) = yz^3(2 - 3y - 2z) = 0\,, \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= -y^2z^3 + 3y^2z^2(1 - y - z) = y^2z^2(3 - 3y - 4z) = 0\,.
\end{aligned}$$

Protože y, $z > 0$ plyne z těchto podmínek soustava rovnic

$$3y + 2z = 2\,, \qquad 3y + 4z = 3 \implies y = \tfrac{1}{2}\,, \quad z = \tfrac{1}{3}\,.$$

Protože pro tyto hodnoty platí $y + z = \frac{5}{6} < 1$ našli jsme bod $\mathbf{a} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$, ve kterém může mít funkce $F(y, z)$ lokální extrém.

O jeho typu rozhodneme pomocí druhého diferenciálu $\mathrm{d}^2F(\mathbf{a}, \mathbf{h})$. Protože

$$\begin{aligned}
F''_{,yy} &= z^3(2 - 3y - 2z) - 3yz^3\,, \\
F''_{,yz} &= 3yz^2(2 - 3y - 2z) - 2yz^3\,, \\
F''_{,zz} &= 2y^2z(3 - 3y - 4z) - 4y^2z^2\,,
\end{aligned}$$

je matice $\mathbf{A}$, která odpovídá kvadratické formě $\mathrm{d}^2F(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ rovna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12}, & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

A protože $D_1 = -\frac{1}{8} < 0$ a $D_2 = \frac{1}{72} - \frac{1}{144} > 0$, je kvadratická forma $\mathrm{d}^2F(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ negativně definitní. Tedy v bodě $\mathbf{a}$ má funkce $F(y, z)$ lokální maximum.

Protože $x = 1 - y - z$ má funkce $f(x, y, z)$ na množině $x + y + z = 1$ v bodě $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ lokální maximum.

Příklad 3.r. Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$, která je dána jako řešení rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z + 2 = 0\,. \tag{2}$$

Řešení: Ukážeme dvě metody řešení dané úlohy. V první budeme předpokládat, že je rovnicí (2) implicitně definována funkce $z = z(x, y)$ a ve druhé budeme pomocí Lagrangeových multiplikátorů hledat lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = z$ za podmínky (2).

Když předpokládáme, že je rovnicí (2) implicitně definována funkce $z = z(x, y)$, platí pro její parciální derivace vztahy

$$\begin{aligned}
2x + 2zz'_{,x} - z - xz'_{,x} - yz'_{,x} + 2 + 2z'_{,x} &= 2x - z + 2 + (2z - x - y + 2)z'_{,x} = 0\,, \\
2y + 2zz'_{,y} - xz'_{,y} - z - yz'_{,y} + 2 + 2z'_{,y} &= 2y - z + 2 + (2z - x - y + 2)z'_{,y} = 0\,.
\end{aligned}$$

Protože hledáme lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$, budou nás zajímat body, ve kterých je $z'_{,x} = z'_{,y} = 0$. Pro takové body musí platit

$$2x - z + 2 = 0\,, \qquad 2y - z + 2 = 0$$

a rovnice (2). Z předcházející soustavy rovnic plyne $y = x$ a $z = 2x + 2$. Jestliže dosadíme do (2), dostaneme pro x kvadratickou rovnici $x^2 + 6x + 5 = 0$, která má řešení $x_1 = -1$ a $x_2 = -5$. Tak jsme získali dva body $\mathbf{a}_1 = [-1, -1, 0]$ a $\mathbf{a}_2 = [-5, -5, -8]$, ve kterých může být extrém.

Abychom našli jeho typ, měli bychom ještě najít druhý diferenciál funkce $z = z(x, y)$ v těchto bodech. Pro druhé parciální derivace získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} &2 - z'_{,x} + \big(2z'_{,x} - 1\big)z'_{,x} + (2z - x - y + 2)z''_{,xx} = 0\,, \\ &-z'_{,y} + \big(2z'_{,y} - 1\big)z'_{,x} + (2z - x - y + 2)z''_{,xy} = 0\,, \\ &2 - z'_{,y} + \big(2z'_{,y} - 1\big)z'_{,y} + (2z - x - y + 2)z''_{,yy} = 0\,. \end{aligned}$$

Druhý diferenciál hledáme v bodech $\mathbf{a}_1 = [-1, -1, 0]$ a $\mathbf{a}_2 = [-5, -5, -8]$. V obou těchto bodech je $z'_{,x} = z'_{,y} = 0$.

V bodě $\mathbf{a}_1$ dostaneme

$$2 + 4z''_{,xx} = 0\,, \quad z''_{xy} = 0\,, \quad 2 + 4z''_{,yy} = 0\,.$$

Tedy v tomto bodě je

$$\mathrm{d}^2 z(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}) = -\tfrac{1}{2}\left(h_1^2 + h_2^2\right).$$

Jedná se proto o negativně definitní kvadratickou formu a proto má funkce $z = z(x, y)$ v bodě $\mathbf{a}_1 = [-1, -1, 0]$ lokální maximum.

V bodě $\mathbf{a}_2$ dostaneme

$$2 - 4z''_{,xx} = 0\,, \quad z''_{xy} = 0\,, \quad 2 - 4z''_{,yy} = 0\,.$$

Tedy v tomto bodě je

$$\mathrm{d}^2 z(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}\left(h_1^2 + h_2^2\right).$$

Jedná se proto o pozitivně definitní kvadratickou formu a proto má funkce $z = z(x, y)$ v bodě $\mathbf{a}_2 = [-5, -5, -8]$ lokální minimum.

Když budeme příklad řešit tak, že budeme hledat lokální extrém funkce $f(x, y, z) = z$ za podmínky (2), sestrojíme nejprve Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = z + \lambda\big(x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z + 2\big)\,.$$

Nutné podmínky pro lokální extrém nyní jsou

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda(2x - z + 2) = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda(2y - z + 2) = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 1 + \lambda(2z - x - y + 2) = 0$$

a vazbová podmínka (2). Ze třetí rovnice plyne, že $\lambda \neq 0$ a pro x, y a z dostaneme tedy stejnou soustavu rovnic jako v první metodě. Navíc pro bod $\mathbf{a}_1 = [-1, -1, 0]$ dostaneme ze třetí rovnice $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$ a pro bod $\mathbf{a}_2 = [-5, -5, -8]$ získáme $\lambda_2 = \frac{1}{4}$.

Druhé parciální derivace Lagrangeovy funkce $L(x, y, z)$ jsou

$$L''_{,xx} = 2\lambda\,, \quad L''_{,xy} = 0\,, \quad L''_{,xz} = -\lambda\,, \quad L''_{,yy} = 2\lambda\,, \quad L''_{,yz} = -\lambda\,, \quad L''_{,zz} = 2\lambda\,.$$

Tedy druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je

$$\mathrm{d}^2 L = 2\lambda(\,\mathrm{d}x^2 - \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \,\mathrm{d}y^2 - \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \,\mathrm{d}z^2)\,.$$

Ten je pozitivně definitní pro $\lambda = \frac{1}{4} > 0$ a negativně definitní pro $\lambda = -\frac{1}{4}$.

Opět jsme dostali, že funkce $z = z(x, y)$ definovaná rovnicí (2) má lokální maximum v bodě $\mathbf{a}_1 = [-1, -1, 0]$ a lokální minimum v bodě $\mathbf{a}_2 = [-5, -5, -8]$.

Neřešené příklady

Příklad 1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

$$\Big[\text{v bodě } [0;0] \text{ je lokální minimum,} \quad \text{v bodě } [2;-2] \text{ je lokální maximum.}\Big]$$

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 - 3xy + y^2 = 20$.

$$\Big[\text{v bodech } [2;-2] \text{ a } [-2;2] \text{ jsou lokální minima.}\Big]$$

Příklad 3. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 + 5xy + 4y^2 = 18$.

$$\Big[\text{v bodech } [2;1] \text{ a } [-2;-1] \text{ jsou lokální maxima.}\Big]$$

Příklad 4. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1$.

$$\Big[\text{v bodě } [4;6] \text{ je lokální minimum.}\Big]$$

Příklad 5. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ za podmínky $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$\Big[\text{v bodě } \left[\tfrac{1}{3}; -\tfrac{2}{3}; \tfrac{2}{3}\right] \text{ je lokální maximum,} \quad \text{v bodě } \left[-\tfrac{1}{3}; \tfrac{2}{3}; -\tfrac{2}{3}\right] \text{ je lokální minimum.}\Big]$$

Příklad 6. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = xyz$ za podmínky $x + y + z = 3$.

$$\begin{bmatrix} \text{v bodě } [1;1;1] \text{ je lokální maximum,} \\ \text{v bodech } [3;0;0],\ [0;3;0] \text{ a } [0;0;3] \text{ nejsou lokální extrémy.} \end{bmatrix}$$

Příklad 7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ za podmínky $xyz = 1$.

$$\Big[\text{v bodě } [1;1;1] \text{ je lokální minimum.}\Big]$$

Příklad 8. Najděte lokální extrémy funkce $y = y(x)$, která je dána jako řešení rovnice $x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

$$\begin{bmatrix} \text{v bodě } x = 1 \text{ je lokální maximum } y = 0, \\ \text{v bodě } x = -1 \text{ je lokální minimum } y = -4. \end{bmatrix}$$

Příklad 9. Najděte lokální extrémy funkce $y = y(x)$, která je dána jako řešení rovnice $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

$$\begin{bmatrix} \text{v bodě } x = \sqrt[3]{2} \text{ je lokální maximum } y = \sqrt[3]{4}, \\ \text{v okolí bodu } [0;0] \text{ není funkce } y = y(x) \text{ rovnicí definována.} \end{bmatrix}$$

Příklad 10. Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x,y)$, která je dána jako řešení rovnice $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xz + 4y - z + 4 = 0$.

$$\begin{bmatrix} \text{v bodě } [-1,-1] \text{ je lokální maximum } z = 1, \\ \text{v bodě } [2;-1] \text{ je lokální minimum } z = -4. \end{bmatrix}$$