Cvičení 12.1.

Globální extrémy

Při hledání největší a nejmenší hodnoty spojité funkce $f(\mathbf{x})$ na kompaktní, tj. uzavřené a omezené, podmnožině $M \subset \mathbb{R}^n$ se používá následující věta.

<u>VĚTA.</u> Nechť je funkce $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak v množině M existují $\mathbf{x}_{\min}$ a $\mathbf{x}_{\max}$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in M$ je

$$f(\mathbf{x}_{\min} \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_{\max})\,.$$

Jinými slovy lze říct, že spojitá funkce $f(\mathbf{x})$ má na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^n$ minimum a maximum. Při hledání globálních extrémů hledáme body, ve kterých minimum nebo maximum může nastat.

Uvnitř množiny M jsou to body, ve kterých může být lokální minimum, tj. body $\mathbf{a} \in M^\circ$, ve kterých je $\mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathrm{d}\mathbf{x}) = 0$, neboli, ve kterých je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0 \qquad \text{pro každé } i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Na hranici množiny M se pak často jedná o vázané extrémy. Proto na hranici množiny M najdene body $\mathbf{a}$, ve kterých může nastat vázaný lokální extrém.

Tímto způsobem dostaneme jistou množinu bodů P, ve kterých může mít funkce $f(\mathbf{x})$ na množině M nejmenší a největší hodnotu. Proto stačí najít globální extrém funkce $f(\mathbf{x})$ na množině P. Pokud je množina P konečná, je globální minimum, resp. globální maximum, funkce $f(\mathbf{x})$ na množině M rovno minimu, resp. maximu, konečné množiny $f(P)$.

<u>Řešené příklady</u>

Příklad 1.r. Najděte maximum a minimum funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $M \subset \mathbb{R}^2$ dané nerovností $|x| + |y| \le 1$.

<u>ŘEŠENÍ:</u> V tomto případě se jedná o globální extrémy spojité funkce $f(x, y)$ na kompaktní, tj. omezené a uzavřené, množině. Proto budeme její extrémy nejprve hledat ve vnitřních bodech množiny M, tj. na množině $|x| + |y| < 1$, a pak na hranici M, tj. na množině $|x| + |y| = 1$.

Ve vnitřních bodech množiny M jsou nutné podmínky pro lokální extrém

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y = 0\,.$$

Tato soustava má jediné řešení $x = y = 0$. A protože bod $\mathbf{a}_0 = [0, 0]$ leží uvnitř množiny, může být bodem, v němž je globální extrém.

Hranice množiny M je tvořena čtyřmi úsečkami:
úsečkou $\mathcal{U}_1$ danou nerovnostmi $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y = 1$;
úsečkou $\mathcal{U}_2$ danou nerovnostmi $x \le 0$, $y \ge 0$, $-x + y = 1$;
úsečkou $\mathcal{U}_3$ danou nerovnostmi $x \le 0$, $y \le 0$, $-x - y = 1$;
úsečkou $\mathcal{U}_4$ danou nerovnostmi $x \ge 0$, $y \le 0$, $x + y = 1$.

Na úsečce $\mathcal{U}_1$ je $y = 1 - x$, $0 \le x \le 1$. Proto budeme hledat globální extrém funkce

$$F_1(x) = f(x, 1-x) = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = 3x^2 - 3x + 1\,.$$

Protože $F_1'(x) = 6x - 3$, může pro $x \in (0,1)$ nabývat funkce $F_1(x)$ extrém pouze v bodě, kde $F_1'(x) = 0$, tj. pro $x = \frac{1}{2}$. Tak dostaneme další bod $\mathbf{a}_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Podobně dostaneme na otevřených úsečkách $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ a $\mathcal{U}_4$ body $\mathbf{a}_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\mathbf{a}_3 = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ a $\mathbf{a}_4 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Zatím jsme se nezabývali krajními body úseček $\mathcal{U}_k$, tj. vrcholy čtverce M. Proto je přidáme k bodům, kde funkce $f(x,y)$ může mít extrém. Tak dostaneme další čtyři body $\mathbf{a}_5 = [1,0]$, $\mathbf{a}_6 = [0,1]$, $\mathbf{a}_7 = [-1,0]$ a $\mathbf{a}_8 = [0,-1]$.

Takto jsme získali 9 bodů množiny M, kde funkce $f(x,y)$ může nabývat nejmenší a největší hodnotu. A protože

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{a}_0) = 0\,, \quad f(\mathbf{a}_1) = f(\mathbf{a}_3) = \tfrac{1}{4}\,, \quad f(\mathbf{a}_2) = f(\mathbf{a}_4) = \tfrac{3}{4}\,, \\ &f(\mathbf{a}_5) = f(\mathbf{a}_6) = f(\mathbf{a}_7) = f(\mathbf{a}_8) = 1\,, \end{aligned}$$

je minimum funkce $f(x,y)$ na množině M rovno $f(0,0) = 0$ a maximum je $f(1,0) = f(0,1) = f(-1,0) = f(0,-1) = 1$.

Příklad 2.r. Najděte supremum a infimum funkce $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-x-2y-3z}(x+y+z)$ na množině $M \subset \mathbb{R}^3$ dané nerovností $x \ge 0$, $y \ge 0$ a $z \ge 0$.

Řešení: Protože množina M není kompaktní, nejsou splněny předpoklady věty, a proto na množině M nemusí existovat ani maximum ani minimum funkce $f(x,y,z)$. Proto budeme nejprve hledat globální extrémy na kompaktní množině M_R, která je dána nerovnostmi x, y, $z \ge 0$ a $x + 2y + 3z \le R$, kde $R > 0$. Protože množina M_R je kompaktní, lze pro ni použít větu. Nakonec pak přejdeme k limitě $R \to \infty$.

Uvnitř množiny M_R jsou nutné podmínky pro extrém

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \mathrm{e}^{-x-2y-3z}(-x-y-z+1) = 0\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \mathrm{e}^{-x-2y-3z}(-2x-2y-2z+1) = 0\,, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \mathrm{e}^{-x-2y-3z}(-3x-3y-3z+1) = 0\,. \end{aligned}$$

Tato soustava nemá řešení, a proto uvnitř množiny M_R nemá funkce $f(x,y,z)$ extrém.

Hranice množiny M je tvořena čtyřmi trojúhelníky:

$\triangle_1$ je trojúhelník $x = 0$, y, $z \ge 0$, $2y + 3z \le R$;

$\triangle_2$ je trojúhelník $y = 0$, x, $z \ge 0$, $x + 3z \le R$;

$\triangle_3$ je trojúhelník $z = 0$, x, $y \ge 0$, $x + 2y \le R$;

$\triangle_4$ je trojúhelník $x + 2y + 3z = R$, x, y, $z \ge 0$.

Na množině $\triangle_1$ je $f(x,y,z) = f(0,y,z) = F(y,z) = \mathrm{e}^{-2y-3z}(y+z)$. Budeme tedy hledat extrémy funkce $F(y,z)$ na množině $M_1 \subset \mathbb{R}^2$ dané nerovnostmi y, $z \ge 0$, $2y+3z \le R$. Protože množina M_1 je kompaktní, platí pro ni tvrzení věty. Uvnitř množiny M_1 jsou nutné podmínky pro extrém

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{e}^{-2y-3z}(-2y-2z+1) = 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \mathrm{e}^{-2y-3z}(-3y-3z+1) = 0\,.$$

Tyto rovnice nemají řešení. Hranice trojúhelníka M_1 je tvořena třemi úsečkami:

$\mathcal{U}_1$, která je dána vztahy $y = 0$, $0 \le z \le \frac{1}{3}R$;

$\mathcal{U}_2$, která je dána vztahy $z = 0$, $0 \le y \le \frac{1}{2}R$;

$\mathcal{U}_3$, která je dána vztahy $2y + 3z = R$, y, $z \ge 0$.

Na úsečce $\mathcal{U}_1$ je $F(y,z) = f(0,z) = G(z) = \mathrm{e}^{-3z}z$. Protože $G'(z) = \mathrm{e}^{-3z}(-3z+1)$, může extrém nastat pouze v bodech $z = \frac{1}{3}$, $z = 0$ nebo $z = \frac{1}{3}R$. Tomu odpovídají body $\mathbf{a}_0 = [0,0,0]$, $\mathbf{b}_3 = \left[0,0,\frac{1}{3}\right]$ a $\mathbf{a}_3 = \left[0,0,\frac{1}{3}R\right]$. Protože nakonec přejdeme k limitě $R \to \infty$, můžeme předpokládat, že $R > 1$.

Podobně najdeme sedm bodů $\mathbf{a}_0 = [0,0,0]$, $\mathbf{a}_1 = [R,0,0]$, $\mathbf{a}_2 = \left[0,\frac{1}{2}R,0\right]$, $\mathbf{a}_3 = \left[0,0,\frac{1}{3}R\right]$, $\mathbf{b}_1 = [1,0,0]$, $\mathbf{b}_2 = \left[0,\frac{1}{2},0\right]$ a $\mathbf{b}_3 = \left[0,0,\frac{1}{3}\right]$, ve kterých může mít funkce $f(x,y,z)$ na kompaktní množině M_R extrém. Po dosazení těchto bodů do funkce $f(x,y,z)$ dostaneme

$$
\begin{array}{llll}
f(\mathbf{a}_0) = 0\,, & f(\mathbf{a}_1) = R\mathrm{e}^{-R}\,, & f(\mathbf{a}_2) = \frac{1}{2}R\mathrm{e}^{-R}\,, & f(\mathbf{a}_3) = \frac{1}{3}R\mathrm{e}^{-R}\,, \\
f(\mathbf{b}_1) = \mathrm{e}^{-1}\,, & f(\mathbf{b}_2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\,, & f(\mathbf{b}_3) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}\,. &
\end{array}
$$

A protože $\lim\limits_{R\to\infty} R\mathrm{e}^{-R} = 0$, je

$$
\sup_{[x,y,z]\in M} f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-1} \quad \text{a} \quad \inf_{[x,y,z]\in M} f(x,y,z) = 0\,.
$$

Neřešené příklady

Příklad 1. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{největší hodnota je } f_{\max} = 6 \text{ v bodech } \left[\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right] \text{ a } \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right], \\ \text{nejmenší hodnota je } f_{\min} = 2 \text{ v bodech } [1;1] \text{ a } [-1;-1].\end{array}\right]$$

Příklad 2. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = 2x^3 + 5x^2 + y^2 - 2xy$ na elipse $2x^2 - 2xy + y^2 = 1$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{největší hodnota je } f_{\max} = 6 \text{ v bodě } [1;1], \\ \text{nejmenší hodnota je } f_{\min} = 1 \text{ v bodech } [0;1] \text{ a } [0;-1].\end{array}\right]$$

Příklad 3. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ na množině $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y \le 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{největší hodnota je } f_{\max} = 12 \text{ v bodě } [2;-2], \\ \text{nejmenší hodnota je } f_{\min} = 0 \text{ v bodě } [0;0].\end{array}\right]$$

Příklad 4. Najděte maximum a minimum funkce $f(x,y,z) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + z^2$ na množině $M \subset \mathbb{R}^3$ dané nerovností $x^2 + y^2 + z^2 \le 100$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{největší hodnota je } f_{\max} = 400 \text{ v bodech } \left[5\sqrt{2}; -5\sqrt{3}; 0\right] \text{ a } \left[-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}; 0\right], \\ \text{nejmenší hodnota je } f_{\min} = 0 \text{ v bodě } [0;0;0].\end{array}\right]$$

Příklad 5. Najděte maximum a minimum funkce $f(x,y,z) = x + y + z$ na množině $M \subset \mathbb{R}^3$ dané nerovnostmi $x^2 + y^2 \le z \le 1$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{největší hodnota je } f_{\max} = 1 + \sqrt{2} \text{ v bodě } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right], \\ \text{nejmenší hodnota je } f_{\min} = -\frac{1}{2} \text{ v bodě } \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].\end{array}\right]$$

Příklad 6. Najděte supremum a infimum funkce $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ na množině $x + y + z = 3$, x, y, $z > 0$.

$$\left[\sup\bigl(f(x,y,z)\bigr) = 3 = f(1,1,1) = f_{\max}, \quad \inf\bigl(f(x,y,z)\bigr) = 0.\right]$$