Cvičení 12.2.

Slovní úlohy na extrém funkce

Na hledání minima nebo maxima spojité funkce $f(\mathbf{x})$ na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^n$ vedou mnohé slovní úlohy.

Řešené příklady

Příklad 1.r. Daným bodem $\mathbf{a} = [a, b, c]$, který leží v prvním oktantu veďte rovinu $\mathcal{P}$ tak, aby byl objem čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou počátek souřadnic a průnik roviny $\mathcal{P}$ s kladnými osami x, y a z nejmenší.

Řešení: Jestliže jsou průsečíky roviny $\mathcal{P}$ se souřadnými osami $[p, 0, 0]$, $[0, q, 0]$ a $[0, 0, r]$, p, q, $r > 0$ je rovina $\mathcal{P}$ dána rovnicí $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$. Objem čtyřstěnu je $V = \frac{1}{6}\,pqr$. Protože bod $\mathbf{a}$ leží v rovině $\mathcal{P}$, musí platit

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 1\,. \tag{1}$$

Naším úkolem je najít minimum funkce $F(p, r, q) = \frac{1}{6}\,pqr$, kde p, q, $r > 0$, za podmínky (1).

Tuto úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů. Zavedeme Lagrangeovu funkci

$$L(p, q, r) = \tfrac{1}{6}\,pqr + \lambda\Big(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - 1\Big)\,.$$

Nutné podmínky pro lokální extrém jsou

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{qr}{6} - \frac{\lambda a}{p^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{pr}{6} - \frac{\lambda b}{q^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{pq}{6} - \frac{\lambda c}{r^2} = 0$$

a rovnice (1). Jestliže vynásobíme první rovnici p, druhou q a třetí r a sečteme, dostaneme vzhledem k podmínce (1) vztah $\lambda = \frac{1}{2}\,pqr$. A když dosadíme toto λ do nutných podmínek pro lokální extrém, zjistíme, že

$$p = 3a\,, \qquad q = 3b\,, \qquad r = 3c\,.$$

Pro tuto rovinu $\mathcal{P}$ je $V = \frac{9}{2}\,abc$. Z názoru je zřejmé, že se jedná o nejmenší objem. Bylo by to možné ukázat tak, že bychom hledali infimum funkce $F(p, q, r) = \frac{1}{6}\,prq$ na množině $p > a$, $q > b$, $r > c$ s podmínkou (1), ale tím by se to zbytečně prodloužilo.

Příklad 2.r. Do úseče eliptického paraboloidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$, $z = c$ vepište kvádr s největším objemem.

Řešení: Souřadnice vrcholů kvádru stěny, která leží v rovině $z = c$, označme $[\pm x, \pm y, c]$ a jeho výšku h. Objem tohoto kvádru je $V = 4xyh$. Aby mohl být objem maximální, musí ležet vrcholy $[\pm x, \pm y, c - h]$ na elipsoidu, tj. musí pro ně platit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c - h}{c}\,. \tag{2}$$

Budeme tedy hledat maximum funkce $F(x, y, h) = 4xyh$, kde x, $y > 0$, $0 < h < c$, na množině dané rovností (2).

Úlohu budeme řešit pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Zavedeme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, h) = 4xyh + \lambda\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{c-h}{c}\Big).$$

Nutné podmínky pro extrém jsou

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4yh + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 4xh + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial h} = 4xy + \frac{\lambda}{c} = 0$$

a podmínka (2). Jestliže první rovnici vynásobíme x, druhou y a třetí h a srovnáme, dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{h}{2c}\,.$$

A když tyto vztahy dosadíme do podmínky (2), dostaneme pro h rovnici

$$\frac{c}{h} = \frac{c-h}{c}\,, \quad \text{tj.} \quad h = \tfrac{1}{2}\,c\,.$$

Pak je $x = \frac{1}{2}\,a$ a $y = \frac{1}{2}\,b$ a objem kvádru je $V = \frac{1}{2}\,abc$.

Příklad 3.r. Najděte trojúhelník s daným obvodem $2p$, který vytvoří rotací kolem jedné ze svých stran těleso s největším objemem.

<u>Řešení:</u> U slovních úloh je většinou nejsložitější formulovat úloha vhodně matematicky. V uvedeném příkladě to lze udělat například následující způsobem.

V trojúhelníku $\triangle ABC$ označme c délku strany AB, b délku strany AC a a délku strany BC. Předpokládejme, že trojúhelník rotuje kolem strany AB a označme v výšku na tuto stranu. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat že $a \le b$. Nechť je P pata výšky na stranu AB a x délka úsečky AP. Leží-li bod P na úsečce AB, označíme y délku úsečky PB a jestliže leží bod P za bodem B, označíme délku této úsečky $-y$. Pak je

$$c = x + y\,, \quad a = \sqrt{v^2 + y^2}\,, \quad b = \sqrt{v^2 + x^2}$$

a objem tělesa vzniklého rotací kolem přímky AB je $V = \frac{1}{3}\,\pi(x+y)v^2$. Podmínka $a \le b$ vede k nerovnosti $|y| \le x$ a podmínka na obvod trojúhelníka je

$$x + y + \sqrt{x^2 + v^2} + \sqrt{y^2 + v^2} = 2p\,. \tag{3}$$

Matematicky máme tedy najít největší hodnotu funkce

$$f(x, y, v) = \tfrac{1}{3}\,\pi(x+y)v^2\,,$$

na množině M, která je dána rovnicí (3) a nerovnicí $|y| \le x$. Protože je množina M kompaktní a funkce $f(x, y, v)$ spojitá maximum existuje.

Protože se jedná o vázaný extrém, sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, v) = \tfrac{1}{3}\,\pi(x+y)v^2 + \lambda\Big(x + y + \sqrt{x^2 + v^2} + \sqrt{y^2 + v^2} - 2p\Big).$$

Z nutných podmínek pro extrém ve vnitřním bodě množiny M, tj. pro $|y| < x$, dostaneme rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \tfrac{1}{3}\,\pi v^2 + \lambda\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+v^2}}\Big) = 0\,,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \tfrac{1}{3}\,\pi v^2 + \lambda\Big(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+v^2}}\Big) = 0\,,$$

ze kterých plyne $x = y$. To ale není vnitřní bod. Proto budeme hledat extrémy funkce $f(x,y,v) = \frac{1}{3}\,\pi(x+y)v^2$ na množině dané rovností (3) a $|y| = x$. Protože pro $y = -x$ je $f(x,-x,v) = 0$, není v tomto bodě maximum.

Pro $y = x$ dostaneme úlohu najít maximum funkce $F(x,v) = \frac{2}{3}\,\pi x v^2$ na množině M_1 dané vztahy

$$x + \sqrt{x^2+v^2} = p\,, \qquad x \geq 0\,.$$

Z této rovnice plyne

$$x^2 + v^2 = (p-x)^2\,, \qquad \text{tj.} \qquad v^2 = p(p-2x)\,, \quad 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}\,p\,.$$

Jestliže do funkce $F(x,v)$ dosadíme za v^2, dostaneme úlohu najít největší hodnotu funkce

$$G(x) = \tfrac{2}{3}\,\pi p x(p-2x)\,, \qquad 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}\,p\,.$$

Protože $G'(x) = \frac{2}{3}\,\pi p(p-4x)$, může být maximum pouze v bodech $x = 0$, $x = \frac{1}{4}\,p$ nebo $x = \frac{1}{2}\,p$. A protože

$$G(0) = G(\tfrac{1}{2}\,p) = 0 \quad \text{a} \quad G\big(\tfrac{1}{4}\,p\big) = \tfrac{1}{12}\,\pi p^3\,,$$

dostaneme největší hodnotu $\frac{1}{12}\,\pi p^3$ pro $x = \frac{1}{4}\,p$.

Pro tuto hodnotu x je

$$V_{\max} = \tfrac{1}{12}\,\pi p^3\,, \qquad a = b = \tfrac{3}{4}\,p\,, \quad c = \tfrac{1}{2}\,p\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 1. Jaké rozměry musí mít bazén ve tvaru kvádru, aby měl při daném objemu V nejmenší povrch?

[podstava kvádru je čtverec se stranou $a = \sqrt[3]{2V}$ a jeho výška je $v = \frac{1}{2}\,a$.]

Příklad 2. Jaké rozměry má otevřená vana, která má půlkruhový průřez a daný povrch S a která má největší objem?

[$r = d = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\,S}$, kde r je poloměr podstavy a d délka vany.]

Příklad 3. Najděte obdélník s daným obvodem $2p$, který vytvoří rotací kolem jedné ze svých stran těleso s největším objemem.

[obdélník rotuje kolem strany $a = \frac{1}{3}\,p$ a délka druhé strany je $b = \frac{2}{3}\,p$.]

Příklad 4. Do polokoule s poloměrem R vepište kvádr s největším objemem.

Příklad 5. Do kužele s poloměrem podstavy R a výškou h vepište kvádr s největším objemem.

$\left[\text{stěna kvádru, která leží v rovině je čtverec se stranou } a = \frac{2}{\sqrt{3}}\, R \text{ a výška je } v = \frac{1}{\sqrt{3}}\, R.\right]$

Příklad 6. Do elipsoidu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ vepište kvádr s největším objemem.

$\left[\text{strany kvádru jsou } x = \frac{2}{\sqrt{3}}\, a,\ y = \frac{2}{\sqrt{3}}\, b \text{ a } z = \frac{2}{\sqrt{3}}\, c.\right]$

Příklad 7. Najděte poloosy elipsy $x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$.

Návod: Daná elipsa má střed v počátku souřadnic. Proto jsou poloosy rovny maximální a minimální vzdálenosti bodu elipsy od počátku souřadnic.

$\left[\text{elipsa má púoloosy } a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} \text{ a } b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}.\right]$

Příklad 8. Najděte obsah elipsy, která je dána jako průnik válce $x^2 + y^2 \leq 1$ a roviny $x + 2y + 3z = 0$.

Návod: Obsah elipsy s poloosami a, b je $P = \pi ab$. Daná elipsa má střed v počátku souřadnic. Proto jsou poloosy rovny maximální a minimální vzdálenosti bodu elipsy od počátku souřadnic.

$\left[P = \frac{1}{3}\, \pi \sqrt{14}\, .\right]$