Cvičení 2.1.

1. Aritmetická posloupnost

Posloupnost a_n se nazývá aritmetická, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} - a_n = d$, kde d je konstantní a nazývá se diference.

Jestliže je a_n aritmetická posloupnost s diferencí d a a_1, resp. a_0, první, resp. nultý, člen posloupnosti, je

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,, \quad \text{resp.} \quad a_n = a_0 + nd\,. \tag{1}$$

Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \tfrac{1}{2}\,n\big(a_n + a_1\big) = na_1 + \tfrac{1}{2}\,n(n-1)d\,. \tag{2}$$

Řešené příklady

Příklad 1.1.r. Najděte n–tý člen a_n a součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti, pro kterou je $a_4 = 8$ a $a_{10} = 15$.

Řešení: Podle (1) platí pro první člen posloupnosti a_1 a pro její diferenci d vztahy

$$a_4 = a_1 + 3d = 8\,, \qquad a_{10} = a_1 + 9d\,,$$

ze kterých plyne $d = \frac{7}{6}$ a $a_1 = \frac{9}{2}$. Podle (1) a (2) je

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{6}\,(n-1) = \tfrac{7}{6}\,n + \tfrac{10}{3}\,, \\ s_n &= \tfrac{9}{2}\,n + \tfrac{7}{12}\,n(n-1) = \tfrac{7}{12}\,n^2 + \tfrac{47}{12}\,n\,. \end{aligned}$$

Příklad 1.2.r. Najděte n–tý člen a_n a součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti, pro kterou je $a_8 = 10$ a $s_4 = 7$.

Řešení: Podle (1) a (2) musí platit

$$a_8 = a_1 + 7d = 10\,, \qquad s_4 = 4a_1 + 6d = 7\,.$$

Tato soustava rovnic má řešení $d = \frac{3}{2}$ a $a_1 = -\frac{1}{2}$. Podle (1) a (2) je

$$\begin{aligned} a_n &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\,(n-1) = \tfrac{3}{2}\,n - 2\,, \\ s_n &= -\tfrac{1}{2}\,n + \tfrac{3}{4}\,n(n-1) = \tfrac{3}{4}\,n^2 - \tfrac{5}{4}\,n\,. \end{aligned}$$

Příklad 1.3.r. Najděte posloupnost a_n, pro kterou je součet jejich prvních n členů roven $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = An^2 + Bn + C$, kde A, B a C jsou daná reálná čísla.

Řešení: Protože pro každé $n \ge 0$ platí

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n\,, \qquad s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}\,,$$

je

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n = A(n+1)^2 + B(n+1) + C - \big(An^2 + Bn + C\big) = 2An + A + B\,.$$

Protože $n+1 \geq 1$, definuje tento vztah členy posloupnosti a_n pro $n \geq 1$. A protože je $a_{n+1} - a_n = 2A$ konstantní, jedná se o aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 2A$ a prvním členem $a_1 = A + B$.

Nultý člen posloupnosti a_0 není pomocí rozdílu $s_{n+1} - s_n$ definován. Ale z předpisu pro s_n dostaneme $a_0 = s_0 = C$.

Hledaná posloupnost tedy je

$$a_0 = C\,, \qquad a_n = A + B + 2A(n-1) = 2An + B - A \quad \text{pro} \quad n \geq 1\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 1.1. Najděte součet n lichých čísel $s_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$. $\big[s_n = n^2.\big]$

Příklad 1.2. Najděte n–tý člen a_n aritmetické posloupnosti a součet s_n jejích prvních n členů, pokud je $a_7 = 5$ a $a_{11} = 13$. $\big[a_n = 2n - 9, \quad s_n = n(n-8)\,.\big]$

Příklad 1.3. Najděte n–tý člen a_n aritmetické posloupnosti a součet s_n jejích prvních n členů, pokud je $a_7 = 25$ a $a_{15} = 9$. $\big[a_n = 39 - 2n\,, \quad s_n = n(38-n)\big]$

Příklad 1.4. Najděte n–tý člen a_n aritmetické posloupnosti a součet s_n jejích prvních n členů, pokud je $a_7 = 17$ a $s_5 = 25$. $\big[a_n = 3n - 4\,, \quad s_n = \frac{1}{2}\,n(3n-5)\,.\big]$

Příklad 1.5. Najděte n–tý člen a_n aritmetické posloupnosti a součet s_n jejích prvních n členů, pokud je $s_4 = 8$ a $s_{10} = 17$. $\big[a_n = \frac{9}{4} - \frac{1}{10}\,n\,, \quad s_n = \frac{1}{20}\,n(44-n)\,.\big]$

2. Geometrická posloupnost

Posloupnost a_n se nazývá geometrická, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = qa_n$, kde q je konstanta. Jestliže je $a_n \neq 0$, je pro geometrickou posloupnost $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ konstantní a nazývá se kvocient geometrické posloupnosti.

Je-li a_n geometrická posloupnost s kvocientem q a prvním, resp. nultým, členem a_1, resp. a_0, je

$$a_n = q^{n-1} a_1\,, \quad \text{resp.} \quad a_n = q^n a_0\,. \tag{3}$$

Jestliže $q \neq 1$, je součet prvních n členů geometrické posloupnosti a_n

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1\,\frac{1-q^n}{1-q}\,. \tag{4}$$

Pro $q = 1$, je $a_n = a_1$, a tedy $s_n = na_1$.

<u>Řešené příklady</u>

Příklad 2.1.r. Nechť je a_n reálná geometrická posloupnost, pro kterou je $a_4 = 3$ a $a_9 = 96$. Najděte n–tý člen a_n a součet prvních n členů této posloupnosti.
<u>Řešení:</u> Podle (3) je

$$a_4 = q^3 a_1 = 3\,, \qquad a_9 = q^8 a_1 = 96\,.$$

Pokud tyto členy vydělíme, dostaneme

$$\frac{a_9}{a_4} = q^5 = 32\,, \quad \text{neboli} \quad q = \sqrt[5]{32} = 2\,.$$

Pak například ze vztahu pro a_4 plyne, že $a_1 = \frac{3}{8}$. Tedy podle (3) a (4) je

$$a_n = \tfrac{3}{8} \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-4}\,, \qquad s_n = \tfrac{3}{8} \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \tfrac{3}{8}\left(2^n - 1\right).$$

Příklad 2.2.r. Nechť je a_n reálná geometrická posloupnost, pro kterou je $a_4 = 7$ a $a_8 = 28$. Najděte n–tý člen a_n a součet prvních n členů této posloupnosti.
<u>Řešení:</u> Podle (3) je

$$a_4 = q^3 a_1 = 7\,, \qquad a_8 = q^7 a_1 = 112\,.$$

Po vydělení dostaneme pro q rovnici

$$\frac{a_8}{a_4} = q^4 = 16\,.$$

Tato rovnice má dvě reálná řešení $q = 2$ nebo $q = -2$.

Pro $q = 2$ dostaneme $a_1 = \frac{7}{8}$ a podle (3) a (4) je

$$a_n = \tfrac{7}{8} \cdot 2^{n-1} = 7 \cdot 2^{n-4}\,, \qquad s_n = \tfrac{7}{8}\,\frac{2^n - 1}{2 - 1} = \tfrac{7}{8}\big(2^n - 1\big)\,.$$

Pro $q = -2$ dostaneme $a_1 = -\frac{7}{8}$ a podle (3) a (4) je

$$a_n = -\tfrac{7}{8}(-2)^{n-1} = 7 \cdot (-2)^{n-4}\,, \qquad s_n = -\tfrac{7}{8}\,\frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \tfrac{7}{24} \cdot \big((-2)^n - 1\big)\,.$$

<u>Neřešené příklady</u>

Příklad 2.1. Najděte n–tý člen a_n a součet s_n prvních n členů reálné geometrické posloupnosti, ve které je $a_6 = 6$ a $a_{11} = -192$. $\left[a_n = -3 \cdot (-2)^{n-5}, \quad s_n = \frac{1}{16}\big((-2)^n - 1\big)\,.\right]$

Příklad 2.2. Najděte n–tý člen a součet prvních n členů pro všechny reálné geometrické posloupnosti, ve kterých je $a_7 = 8$ a $a_{13} = 1$.

$$\left[\begin{array}{ll} a_n = \big(\sqrt{2}\big)^{13-n}, & s_n = 64\sqrt{2}\,\frac{1-(\sqrt{2})^{-n}}{\sqrt{2}-1} \\ \text{nebo} & \\ a_n = \big(-\sqrt{2}\big)^{13-n}, & s_n = 64\sqrt{2}\,\frac{1-(-\sqrt{2})^{-n}}{\sqrt{2}+1} \end{array}\right]$$

3. Limity posloupností v $\mathbb{R}$

Některé známé limity

1. pro $p > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$;
2. pro $p < 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = 0$;
3. pro $a > 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$;
4. pro $|a| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$;
5. pro $a \le -1$ limita $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje;
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$;
8. jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + a_n\big)^{b_n} = \mathrm{e}^\alpha$, kde $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \big(a_n b_n\big)$.

Algebraické operace s limitami a neurčité výrazy

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \big(c_1 a_n + c_2 b_n\big) = c_1 \lim\limits_{n\to\infty} a_n + c_2 \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; neurčitý výraz typu $+\infty - \infty$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \big(a_n b_n\big) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{A}{B}$, kde $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; neurčité výrazy jsou typu $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Některé věty o limitách

1. Když pro každé $n > n_0$ platí $a_n \le b_n \le c_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$;
3. Když je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a b_n omezená posloupnost, je $\lim\limits_{n\to\infty} \big(a_n b_n\big) = 0$;
4. Každá monotonní posloupnost má limitu v $\mathbb{R}^*$;
5. Monotonní posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je omezená.

Řešené příklady

Příklad 3.1.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 - 7n^2 + 5n - 2}{2 - 4n^2 - 5n^3}$.

Řešení: Limita výrazu v čitateli je neurčitý výraz typu $\infty - \infty$, a tedy nemůžeme přímo použít větu o limitě podílu (pro úplnost je limita jmenovatele rovna $2 - \infty - \infty = -\infty$). Proto výraz v limitě nejprve upravíme. Abychom našli limitu čitatele, napíšeme jej jako výraz typu $\infty \cdot a$, kde $a \ne 0$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 7n^2 + 5n - 2}{2 - 4n^2 - 5n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\big(3 - 7n^{-1} + 5n^{-2} - 2n^{-3}\big)}{2 - 4n^2 - 5n^3}\,.$$

Z toho je vidět, že limita čitatele je $3 \cdot \infty = \infty$ a limita jmenovatele je $-\infty$ neustále se jedná o neurčitý výraz nyní typu $\frac{\infty}{\infty}$. Je zřejmé, že za nekonečna mohou členy n^3. Proto se můžeme pokusit tyto členy ve výraze vykrátit. Tak dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 7n^2 + 5n - 2}{2 - 4n^2 - 5n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 7n^{-1} + 5n^{-2} - 2n^{-3}}{2n^{-3} - 4n^{-1} - 5} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}\,.$$

Příklad 3.2.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{(2n+3)(1-3n)(5n+2)}}{\sqrt{5n^2-4n+2}}$.

Řešení: Je snadno vidět, že uvedená limita je neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$. Jak v čitateli tak ve jmenovateli mohou za tato nekonečna nejvyšší mocniny n. Proto je v čitateli i ve jmenovateli vytkneme. Tak dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{(2n+3)(1-3n)(5n+2)}}{\sqrt{5n^2-4n+2}} &= \frac{\sqrt[3]{n^3(2+3n^{-1})(n^{-1}-3)(5+2n^{-1})}}{\sqrt{n^2(5-4n^{-1}+2n^{-2})}} = \\ &= \frac{n\sqrt[3]{(2+3n^{-1})(n^{-1}-3)(5+2n^{-1})}}{n\sqrt{5-4n^{-1}+2n^{-2}}} = \frac{\sqrt[3]{(2+3n^{-1})(n^{-1}-3)(5+2n^{-1})}}{\sqrt{5-4n^{-1}+2n^{-2}}}\,.\end{aligned}$$

Tedy hledaná limita je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(2n+3)(1-3n)(5n+2)}}{\sqrt{5n^2-4n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(2+3n^{-1})(n^{-1}-3)(5+2n^{-1})}}{\sqrt{5-4n^{-1}+2n^{-2}}} = -\frac{\sqrt[3]{30}}{\sqrt{5}}\,.$$

Příklad 3.3.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{(2n+3)(1-3n)(5n+2)}}{\sqrt[3]{5n^2-4n+2}}$.

Řešení: Stejně jako v předcházejícím příkladě jde o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$. Po podobné úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{(2n+3)(1-3n)(5n+2)}}{\sqrt[3]{5n^2-4n+2}} &= \frac{\sqrt[3]{n^3(2+3n^{-1})(n^{-1}-3)(5+2n^{-1})}}{\sqrt[3]{n^2(5-4n^{-1}+2n^{-2})}} = \\ &= \frac{n\sqrt[3]{(2+3n^{-1})(n^{-1}-3)(5+2n^{-1})}}{n^{2/3}\sqrt[3]{5-4n^{-1}+2n^{-2}}} = n^{1/3}\,\frac{\sqrt[3]{(2+3n^{-1})(n^{-1}-3)(5+2n^{-1})}}{\sqrt[3]{5-4n^{-1}+2n^{-2}}}\,.\end{aligned}$$

Tedy hledaná limita je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(2n+3)(1-3n)(5n+2)}}{\sqrt[3]{5n^2-4n+2}} &= \lim_{n\to\infty} n^{1/3}\,\frac{\sqrt[3]{(2+3n^{-1})(n^{-1}-3)(5+2n^{-1})}}{\sqrt[3]{5-4n^{-1}+2n^{-2}}} = \\ &= +\infty\cdot(-\sqrt[3]{6}) = -\infty\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.4.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{(2n+3)(3n-1)(5n+2)}}{\sqrt{5n^2-4n+2}}$.

Řešení: Opět se jedná o limitu typu $\dfrac{\infty}{\infty}$. Podobná úprava jako dříve dává

$$\frac{\sqrt[4]{(2n+3)(3n-1)(5n+2)}}{\sqrt{5n^2-4n+2}} = \frac{\sqrt[4]{n^3(2+3n^{-1})(3-n^{-1})(5+2n^{-1})}}{\sqrt{n^2(5-4n^{-1}+2n^{-2})}} =$$
$$= \frac{n^{3/4}\sqrt[4]{(2+3n^{-1})(3-n^{-1})(5+2n^{-1})}}{n\sqrt{5-4n^{-1}+2n^{-2}}} = n^{-1/4}\,\frac{\sqrt[4]{(2+3n^{-1})(3-n^{-1})(5+2n^{-1})}}{\sqrt{5-4n^{-1}+2n^{-2}}}\,.$$

Tedy hledaná limita je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{(2n+3)(3n-1)(5n+2)}}{\sqrt{5n^2-4n+2}} = \lim_{n\to\infty} n^{-1/4}\,\frac{\sqrt[4]{(2+3n^{-1})(3-n^{-1})(5+2n^{-1})}}{\sqrt{5-4n^{-1}+2n^{-2}}} = 0\,.$$

Příklad 3.5.r. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3-(2n-3)^3}{n^2+n+1}$.

Řešení: V čitateli zlomku je neurčitý výraz typu $\infty-\infty$. Pokud bychom použili podobnou úpravu jako v předcházejících příkladech dostali bychom v čitateli

$$(2n+1)^3-(2n-3)^3 = n^3\big((2+n^{-1})^3-(2-3n^{-1})^3\big)\,,$$

což by v limitě vedlo k neurčitému výrazu typu $0\cdot\infty$. Ale protože

$$(2n+1)^3-(2n-3)^3 = 8n^3+12n^2+6n+1-\big(8n^3-36n^2+54n-27\big) = 48n^2-48n+28\,,$$

v čitateli vlastně člen n^3 není. Snadno zjistíme, že hledaná limita je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3-(2n-3)^3}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{48n^2-48n+28}{n^2+n+1} = 48\,.$$

Příklad 3.6.r. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\big(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\big)$.

Řešení: Jedná se o limitu typu $\infty-\infty$. I v tomto případě vede úprava

$$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1} = n\big(\sqrt{1+n^{-1}+n^{-2}}-\sqrt{1-n^{-1}+n^{-2}}\big)$$

k limitě typu $0\cdot\infty$. V příkladech tohoto typu se můžeme zbavit rozdílu druhých odmocnin, když použijeme vztah $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Platí totiž

$$\big(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\big)\big(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\big) = n^2+n+1-(n^2-n+1) = 2n\,.$$

Proto je výhodné rozšířit výraz v limitě výrazem $\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}$. Tato úprava dává

$$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1} =$$
$$= \big(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\big)\,\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$
$$= \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}\,.$$

Hledaná limita pak je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=1\,.$$

Příklad 3.7.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}-n\right)$.

Řešení: V příkladech tohoto typu je možné použít vztah $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, tj.

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}-n\right)\left(\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}+n^2\right)=\\&=n^3-2n^2+2-n^3=-2n^2+2\,.\end{aligned}$$

Po rozšíření výrazem $\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}+n^2$ pak dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+2}{\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}+n^2}=-\frac{2}{3}\,.$$

Příklad 3.8.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+4}+3^n}}$.

Řešení: Jedná se o limitu typu $\dfrac{\infty}{\infty}$. Za nekonečna v čitateli i jmenovateli může člen 3^n. Proto jej vytkneme a zkrátíme. Tak dostaneme

$$\frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+4}+3^n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{16\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}\,.$$

A protože $-1<\frac{2}{3}<1$, je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$. Tedy hledaná limita je

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+4}+3^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{16\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}}=\sqrt{3}\,.$$

Příklad 3.9.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-n}+3^{-n+1}}{2^{-n+2}+3^{-n}}$.

Řešení: Nyní se jedná o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Abychom dostali konečné nenulové limity, rozšíříme výraz 2^n, protože $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n\cdot 3^{-n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$. Pak dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}+3^{-n+1}}{2^{-n+2}+3^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{4+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{4}\,.$$

Příklad 3.10.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{3n+2}\right)^{3n-1}$.

Řešení: To je limita typu 1^∞. Všechny limity tohoto typu lze najít tak, že je napíšeme ve tvaru $(1+a_n)^{b_n}$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)=1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak je

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(1+a_n\bigr)^{b_n} = \mathrm{e}^\alpha, \quad \text{kde} \quad \alpha = \lim_{n\to\infty}\bigl(a_n b_n\bigr)\,. \tag{5}$$

V našem případě je $b_n = 3n-1$ a

$$\frac{3n-5}{3n+2} = 1 + \frac{-7}{3n+2}\,, \quad \text{tj.} \quad a_n = \frac{-7}{3n+2}\,.$$

A protože $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\bigl(a_n b_n\bigr) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-7(3n-1)}{3n+2} = -7$, je podle (5)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{3n+2}\right)^{3n-1} = \mathrm{e}^{-7}.$$

Příklad 3.11.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{1-4n}$.

Řešení: Protože se jedná o limitu typu 1^∞, budeme postupovat jako v předchozí příkladě. Napíšeme $\dfrac{2n+1}{2n-3} = 1 + \dfrac{4}{2n-3}$, a protože $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4(1-4n)}{2n-3} = -8$, je podle (5)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{1-4n} = \mathrm{e}^{-8}.$$

Příklad 3.12.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{2n-5}\right)^{n+2}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\left(\frac{3}{2}\right)^\infty$. Proto je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{2n-5}\right)^{n+2} = +\infty$.

Příklad 3.13.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{5n+3}\right)^{2n-1}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\left(\frac{3}{5}\right)^\infty$. Proto je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{5n+3}\right)^{2n-1} = 0$.

Příklad 3.14.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^n(2n+3)}{(n+3)^{n+1}}$.

Řešení: Když napíšeme

$$\frac{(n+1)^n(2n+3)}{(n+3)^{n+1}} = \frac{(n+1)^n}{(n+3)^n}\cdot\frac{2n+3}{n+3} = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n\cdot\frac{2n+3}{n+3}$$

a použijeme větu o limitě součinu, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(2n+3)}{(n+3)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+3} = 2\mathrm{e}^{-2}.$$

Příklad 3.15.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n+1}}$.

<u>*Řešení:*</u> Pokud napíšeme

$$\sqrt{\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n+1}} = \left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{(3n+1)/2},$$

dostaneme podle (5)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{(3n+1)/2} = \mathrm{e}^{-3}.$$

Příklad 3.16.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{n+2}-2\right)^{3-2n}$.

<u>*Řešení:*</u> Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{n+2}-2\right) = 1$, je tato limita typu 1^∞. A protože

$$\frac{3n+1}{n+2}-2 = \frac{n-3}{n+2} = 1+\frac{-5}{n+2},$$

je podle (5)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}-2\right)^{3-2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{3-2n} = \mathrm{e}^{10}.$$

Příklad 3.17.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+2n+3}\right)^{2n+1}$.

<u>*Řešení:*</u> Jedná se o limitu typu 1^∞. Podle (5) je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n+1}{n^2+2n+3}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-3n-2}{n^2+2n+3}\right)^{2n+1} = \mathrm{e}^{-6},$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-3n-2)(2n+1)}{n^2+2n+3} = -6$.

Příklad 3.18.r. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+3n-2}{n^2+3n+3}\right)^{n(n+1)}$.

<u>*Řešení:*</u> Jedná se o limitu 1^∞. Protože $\dfrac{n^2+3n-2}{n^2+3n+3} = 1+\dfrac{-5}{n^2+3n+3}$, je podle (5)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n-2}{n^2+3n+3}\right)^{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-5}{n^2+3n+3}\right)^{n(n+1)} = \mathrm{e}^{-5}.$$

Příklad 3.19.r. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)\sin \mathrm{e}^n = 0$.

Řešení: Protože

$$\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1} = \left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\,,$$

je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)=0$. A protože $\left|\sin \mathrm{e}^n\right|\le 1$, je uvedená limita rovna nule.

Příklad 3.20.r. Nechť je $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Dokažte, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení: Protože pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $0<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<1$, je

$$0 < a_{n+1} = a_n\cdot\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} < a_n\,.$$

Tedy posloupnost a_n je klesající a zdola omezená číslem 0. Proto její limita existuje.

Příklad 3.21.r. Nechť je posloupnost a_n definována vztahy $a_1=-1$ a $a_{n+1}=a_n\cdot\frac{2n-1}{2n}$. Dokažte, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení: Protože pro každé $n\in\mathbb{N}$ je $0<\frac{2n-1}{2n}$ a $a_1=-1<0$, je $a_n<0$ pro každé n.
Protože pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $\frac{2n-1}{2n}<1$ a $a_n<0$, je

$$a_{n+1} = a_n\cdot\frac{2n-1}{2n} > a_n\,.$$

Tedy posloupnost a_n je rostoucí a shora omezená číslem 0. Proto existuje její limita.

Příklad 3.22.r. najděte limitu posloupnosti a_n, která je definována vztahy

$$a_1=\sqrt{2}\,,\qquad a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,,\qquad a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,,\qquad ,\ldots$$
$$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}\,.$$

Řešení: Pro posloupnost a_n platí $a_1=\sqrt{2}$ a $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$. Pokud ukážeme, že posloupnost a_n je nezáporná, omezená a rostoucí, existuje $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$, $a\ge 0$. Pak musí platit

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}\,,\quad\text{neboli}\quad a=\sqrt{2+a}\,.$$

Ale tato rovnice má jediné nezáporné řešení $a=2$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

Indukcí ukážeme, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $0<a_n<2$.
Nechť je M množina všech $n\in\mathbb{N}$ taková, že pro ně platí $0<a_n<2$.
Protože $a_1=\sqrt{2}$, platí uvedené tvrzení pro $n=1$, a tedy $1\in M$.
Nechť je $n\in M$, tj. platí $0<a_n<2$. A protože $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, je $\sqrt{2}<a_{n+1}<\sqrt{2+2}=2$.
To znamená, že $(n+1)\in M$ a z axiomu matematické odsud plyne, že $M=\mathbb{N}$, tj. že $0<a_n<2$ pro každé $n\in\mathbb{N}$.

Nyní ukážeme, že posloupnost a_n je rostoucí, tj. že pro každé $n\in\mathbb{N}$ je $a_{n+1}>a_n$. Protože $a_n>0$, stačí ukázat, že $a_{n+1}^2>a_n^2$. Protože $0<a_n<2$, je $(a_n-2)(a_n+1)=a_n^2-a_n-2<0$, neboli $a_n^2<2+a_n=a_{n+1}^2$.

Neřešené příklady

Příklad 3.1. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)(4n-3)(5n+2)}{(2n+3)(3+n-2n^2)}$. $\left[-15\,.\right]$

Příklad 3.2. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^3-7n^2+5n-2}}{\sqrt{5n^3-4n^2+3}}$. $\left[\sqrt{\tfrac{3}{5}}\,.\right]$

Příklad 3.3. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2\sqrt{n^3}+6\sqrt{n}-1\right)(2n-3)}{(n^2+n+1)\sqrt{3n+1}}$. $\left[\tfrac{4}{\sqrt{3}}\,.\right]$

Příklad 3.4. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(3n+1)^3-(3n-2)^3}}{\sqrt[3]{8n^3+3n^2+n-1}}$. $\left[\tfrac{9}{2}\,.\right]$

Příklad 3.5. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+3}-\dfrac{n}{2}\right)$. $\left[-1\,.\right]$

Příklad 3.6. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)$. $\left[1\,.\right]$

Příklad 3.7. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$. $\left[2\,.\right]$

Příklad 3.8. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n-1}+2^{n+2}}{\sqrt{8^{n+4}+9^{n+1}}}$. $\left[\tfrac{1}{9}\,.\right]$

Příklad 3.9. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^{n+2}-5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$. $\left[-\tfrac{1}{5}\,.\right]$

Příklad 3.10. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{4^{-n-1}+5^{-n+2}}{4^{-n+2}-5^{-n-1}}}$. $\left[\tfrac{1}{8}\,.\right]$

Příklad 3.11. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n-3}+3^{n+2}}{2^{n+1}-3^n}$. $\left[-\infty\,.\right]$

Příklad 3.12. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)!+(2n+1)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$. $\left[1\,.\right]$

Příklad 3.13. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n\cdot(n+1)!-(n+2)!}{n!-(n+1)!}}$. $\left[\sqrt{2}\,.\right]$

Příklad 3.14. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2-2n+1}-3n\right)$. $\left[-\tfrac{1}{3}\,.\right]$

Příklad 3.15. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n^2+2n+1}-\sqrt{3n^2-n-2}\right)$. $\left[\tfrac{1}{2}\,.\right]$

Příklad 3.16. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+5}-\sqrt{2n^2-n+1}\right)$. $\left[-\infty\,.\right]$

Příklad 3.17. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4^n-2^n+1}-2^n\right)$. $\left[-\tfrac{1}{2}\,.\right]$

Příklad 3.18. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9^n+4\cdot 3^n+2}-\sqrt{9^n-2\cdot 3^n+4}\right)$. $\left[3\,.\right]$

Příklad 3.19. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+7}{2n+3}\right)^{5n+3}$. $\left[\mathrm{e}^{10}.\right]$

Příklad 3.20. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n+3}\right)^{3-n}$. $\left[\mathrm{e}^{-1}.\right]$

Příklad 3.21. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{3n+1}\right)^{1-2n}$. $\left[\mathrm{e}^{10/3}.\right]$

Příklad 3.22. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5-2n}{4-2n}\right)^{2n+1}$. $\left[\mathrm{e}^{-1}.\right]$

Příklad 3.23. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{2n+3}\right)^{1-2n}$. $[0.]$

Příklad 3.24. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{4n-1}}$. $\left[\mathrm{e}^{-8/3}.\right]$

Příklad 3.25. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n(n+2)^n}{(2n+1)^n}$. $\left[\mathrm{e}^{3/2}.\right]$

Příklad 3.26. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(2n+3)^n}{(2n+1)^{n+2}}$. $\left[\frac{1}{4}\,\mathrm{e}.\right]$

Příklad 3.27. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^{n+2}}{(2n+3)^n(n+3)}$. $[+\infty.]$

Příklad 3.28. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-2)^{n+6}}{(n^2+n+3)^2(3n-7)^{n+4}}$. $[0.]$

Příklad 3.29. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{3-4n}$. $\left[\mathrm{e}^{-8}.\right]$

Příklad 3.30. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-n}{n}\right)^{n+3}$. [limita neexistuje.]

Příklad 3.31. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-n}{n}\right)^{2n+3}$. $\left[-\mathrm{e}^{-2}.\right]$

Příklad 3.32. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+2}\,\sin n^2}{n+1}=0.$

Příklad 3.33. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cos n=0.$

Příklad 3.34. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^{2n+1}=0.$

Příklad 3.35. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{3n+1}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n(n+1)}\right)=0.$

Příklad 3.36. Nechť je $a_1=1$ a $a_{n+1}=a_n\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Dokažte, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Příklad 3.37. Nechť je $a_1=1$ a $a_{n+1}=a_n\cdot\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$. Dokažte, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Příklad 3.38. Nechť je $a_1=2$ a $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{a_n}+a_n\right)$. Dokažte, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ je $a_n>\sqrt{2}$ a že posloupnost a_n je klesající. Pomocí toho najděte $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. $[\sqrt{2}\,.]$