Cvičení 2.2.

1. Limity posloupností v $\mathbb{R}^k$

Nechť je $\mathbf{a}_n = \left(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(k)}\right)$ posloupnost v $\mathbb{R}^k$. Pak je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{A} = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}\right)$$

právě tehdy, když všechny posloupnosti $a_n^{(i)}$, kde $i = 1,\, 2,\, \dots,\, k$ konvergují a platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(i)} = A^{(i)} \quad \text{pro každé } i = 1,\, 2,\, \dots,\, k\,.$$

Řešené příklady

Příklad 1.1.r. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}, \left(\frac{3n+4}{3n-1}\right)^{n-2}, \frac{7n\cos^2 n}{(2n+1)(2n-1)}, \frac{(-3)^{n+3}-5^{n+1}}{3^{n+5}+5^{n-1}} \right).$$

Řešení: Jedná se o posloupnost v $\mathbb{R}^4$, kde

$$a_n^{(1)} = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}, \qquad a_n^{(2)} = \left(\frac{3n+4}{3n-1}\right)^{n-2},$$
$$a_n^{(3)} = \frac{7n\cos^2 n}{(2n+1)(2n-1)}, \qquad a_n^{(4)} = \frac{(-3)^{n+3}-5^{n+1}}{3^{n+5}+5^{n-1}}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(1)} = 1\,, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{(2)} = \mathrm{e}^{5/3}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{(3)} = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{(4)} = -25\,,$$

je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \left(1, \mathrm{e}^{5/3}, 0, -25\right).$$

Příklad 1.2.r. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{(2n+1)(3n-2)(4n+2)}{2-n+3n^2-7n^3}, \left(\frac{3-2n}{1+2n}\right)^{3n+2}, \frac{(2n+3)!+(2n+1)!}{(2n+3)!-(2n+2)!} \right).$$

Řešení: Jedná se o posloupnost v $\mathbb{R}^3$, kde

$$a_n^{(1)} = \frac{(2n+1)(3n-2)(4n+2)}{2-n+3n^2-7n^3}, \quad a_n^{(2)} = \left(\frac{3-2n}{1+2n}\right)^{3n+2}, \quad a_n^{(3)} = \frac{(2n+3)!+(2n+1)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}.$$

Protože limita posloupnosti $a_n^{(2)}$ neexistuje, vlastně je $a_n^{(2)} \sim (-1)^{3n} = (-1)^n$, neexistuje ani limita posloupnosti $\mathbf{a}_n$, přestože

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(1)} = -\tfrac{24}{7}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{(3)} = 1\,.$$

Příklad 1.3.r. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(\left(\frac{1-n}{3+2n}\right)^{3n-1}, 3n\big(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}\big), \sqrt{n+4}-\sqrt{2n-1} \right).$$

<u>*Řešení:*</u> Jedná se o posloupnost v $\mathbb{R}^3$, kde

$$a_n^{(1)} = \left(\frac{1-n}{3+2n}\right)^{3n-1}, \quad a_n^{(2)} = 3n\big(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}\big)\,, \quad a_n^{(3)} = \sqrt{n+4}-\sqrt{2n-1}\,.$$

Limity těchto posloupností v $\mathbb{R}$ jsou

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n^{(1)} &\sim \left(-\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0\,,\\
\lim_{n\to\infty} a_n^{(2)} &= \lim_{n\to\infty} \left(3n\big(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}\big)\,\frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1}} \right) =\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{9n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{9}{2}\,,\\
\lim_{n\to\infty} a_n^{(3)} &= \lim_{n\to\infty} \left(\big(\sqrt{n+4}-\sqrt{2n-1}\big)\,\frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{2n-1}} \right) =\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n+5}{\sqrt{n+4}+\sqrt{2n-1}} = -\infty\,.
\end{aligned}$$

A protože úpsloupnost $a_n^{(3)}$ nekonverguje, limita posloupnosti $\mathbf{a}_n$ neexistuje.

<u>Neřešené příklady</u>

Příklad 1.1. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{3n^3-7n^2+5n-4}{2-4n^2-5n^3}, \sqrt{4n^2-2n+1}-2n, \frac{2^n+3^{n-1}}{2^{n+1}-3^n} \right).$$

$$\Big[\big(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\big).\Big]$$

Příklad 1.2. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{(3-2n)(3n-2)(1+4n)}{3n^3-7n^2+2n+2}, \left(\frac{2n+7}{2n+2}\right)^{5n+3}, \sqrt{9n^2-2n+1}-3n \right).$$

$$\Big[\big(-8, \mathrm{e}^{25/2}, -\tfrac{1}{3}\big).\Big]$$

Příklad 1.3. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{3n^2 \sin n!}{(n+1)(3n^2-2n+1)}, \frac{(3n^2+2)^{10} \cdot (2n-3)^8}{(9n^2+1)^5 \cdot (2n^3+3)^6}, \left(\frac{3n+4}{3n-1}\right)^{2-n} \right).$$

$\left[\left(0, 4, \mathrm{e}^{-5/3}\right).\right]$

Příklad 1.4. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(2(n^2-4n+5) - \frac{2n^3+3n}{n+4}, \frac{2^n - \mathrm{e}^n}{2^{n-1}+\mathrm{e}^{n+1}}, 3\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}\right) \right).$$

$\left[\left(-25, -\mathrm{e}^{-1}, 3\sqrt{2}\right).\right]$

Příklad 1.5. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{1+2+\ldots+n}{2n+3} - \frac{n}{2}, \left(\frac{3n}{3n+2}\right)^{1-2n}, \frac{2^{2n-1}+3^{n+2}}{4^{n+1}-3^{n-3}} \right).$$

[neexistuje.]

Příklad 1.6. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{n^2(2n+3)^n}{(2n+1)^{n+2}}, \frac{(n+3)\,\cos \mathrm{e}^n}{\sqrt{n^3+2n+3}}, \sqrt{n^2+3n+2} - \sqrt{n^2-2n+5} \right).$$

$\left[\left(\tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}, 0, \tfrac{5}{2}\right).\right]$

Příklad 1.7. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(\sqrt{3n-2} - \sqrt{3n+4}, \frac{(2n-1)! - (2n+1)!}{3 \cdot (2n+1)! + (2n)!}, \left(\frac{3-2n}{1+2n}\right)^{1-2n} \right).$$

$\left[\left(0, -\tfrac{1}{3}, -\mathrm{e}^{4}\right).\right]$

Příklad 1.8. Najděte limitu posloupnosti

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{(2n+1)^{n-1}}{(2n-1)^{n+1}}, \frac{\sqrt{2n^5-4n^3-2}+2n}{\sqrt{n+3}\,(3n^2-2n+1)}, \frac{3^{-n+1}-2^{-n-1}}{3^{-n-1}+2^{-n+1}} \right).$$

$\left[\left(0\tfrac{\sqrt{2}}{3}, -\tfrac{1}{4}\right).\right]$

2. Hromadné body posloupností

Reálné číslo A nebo symbol $+\infty$ nebo $-\infty$ se nazývá hromadný bod posloupnosti a_n, když existuje posloupnost b_n vybraná z posloupnosti a_n taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Supremum množiny všech hromadných bodů posloupnosti a_n se nazývá limes superior posloupnosti a_n a značí se $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Infimum množiny všech hromadných bodů posloupnosti a_n se nazývá limes inferior posloupnosti a_n a značí se $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Řešené příklady

Příklad 2.1.r. Najděte množinu všech hromadných bodů a limes superior a inferior posloupnosti $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2} \cos\frac{\pi n}{3}$.

Řešení: Protože pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\cos\frac{\pi(n+6k)}{3} = \cos\left(\frac{\pi n}{3} + 2k\pi\right) = \cos\frac{\pi n}{3}\,,$$

budeme uvažovat šest vybraných posloupností $b_n^{(k)} = a_{6n+k}$, kde $k = 0, 1, \ldots, 5$.
Protože $\frac{2n+3}{2n-1} = 1 + \frac{4}{2n-1}$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n^{(0)} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{12n-1}\right)^{18n+2}\cos(2n\pi) = \mathrm{e}^6,\\
\lim_{n\to\infty} b_n^{(1)} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{12n+1}\right)^{18n+5}\cos\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right) = \frac{\mathrm{e}^6}{2}\,,\\
\lim_{n\to\infty} b_n^{(2)} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{12n+3}\right)^{18n+8}\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right) = -\frac{\mathrm{e}^6}{2}\,,\\
\lim_{n\to\infty} b_n^{(3)} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{12n+5}\right)^{18n+11}\cos\left(\pi+2n\pi\right) = -\mathrm{e}^6\,,\\
\lim_{n\to\infty} b_n^{(4)} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{12n+7}\right)^{18n+14}\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2n\pi\right) = -\frac{\mathrm{e}^6}{2}\,,\\
\lim_{n\to\infty} b_n^{(5)} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{12n+9}\right)^{18n+17}\cos\left(\frac{5\pi}{3}+2n\pi\right) = \frac{\mathrm{e}^6}{2}\,.
\end{aligned}$$

Množina hromadných všech hromadných bodů posloupnosti a_n je $\left\{\mathrm{e}^6, \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^6, -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^6, -\mathrm{e}^6\right\}$.
Z toho pak plyne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^6$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e}^6$

Příklad 2.2.r. Najděte množinu všech hromadných bodů a limes superior a inferior posloupnosti

$$a_n = n\bigl(1-(-1)^n\bigr) + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}\,.$$

Řešení: V tomto případě stačí uvažovat čtyři vybrané posloupnosti $b_n^{(k)} = a_{4n+k}$, kde $k = 0, 1, 2, 3$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n^{(0)} &= \lim_{n\to\infty}\left(4n\bigl(1-(-1)^{4n}\bigr) + \frac{4n}{4n+1}\cos(2\pi n)\right) = 1\,,\\
\lim_{n\to\infty} b_n^{(1)} &= \lim_{n\to\infty}\left((4n+1)\bigl(1-(-1)^{4n+1}\bigr) + \frac{4n+1}{4n+2}\cos\bigl(\tfrac{1}{2}\,\pi+2\pi n\bigr)\right) = +\infty\,,\\
\lim_{n\to\infty} b_n^{(2)} &= \lim_{n\to\infty}\left((4n+2)\bigl(1-(-1)^{4n+2}\bigr) + \frac{4n+2}{4n+3}\cos(\pi+2\pi n)\right) = -1\,,\\
\lim_{n\to\infty} b_n^{(3)} &= \lim_{n\to\infty}\left((4n+3)\bigl(1-(-1)^{4n+3}\bigr) + \frac{4n+3}{4n+4}\cos\bigl(\tfrac{3}{2}\,\pi+2\pi n\bigr)\right) = +\infty\,.
\end{aligned}$$

Tedy množina hromadných bodů posloupnosti a_n je $\{1, -1, +\infty\}$. Z toho dostaneme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

Příklad 2.3.r. Najděte množinu všech hromadných bodů a limes superior a limes inferior posloupnosti $a_n = \left(\dfrac{3-(-1)^n-2n}{2n-3}\right)^{3n-2}$.

<u>*Řešení:*</u> Kvůli členu $(-1)^n$ budeme uvažovat posloupnosti sudých a lichých členů posloupnosti a_n, tj. posloupnosti $b_n^{(0)} = a_{2n}$ a $b_n^{(1)} = a_{2n+1}$. Pro vybranou posloupnost $b_n^{(0)}$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{(0)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-(-1)^{2n}-4n}{4n-3}\right)^{6n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-4n}{4n-3}\right)^{6n-2}.$$

Protože limita $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-4n}{4n-3} = -1$, budeme psát

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{(0)} = \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{6n-2}\left(\frac{4n-2}{4n-3}\right)^{6n-2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n-3}\right)^{6n-2} = \mathrm{e}^{3/2}.$$

Podobně pro podposloupnost $b_n^{(1)}$ je

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-(-1)^{2n+1}-4n-2}{4n-1}\right)^{6n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+1-4n-2}{4n-1}\right)^{6n+1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{6n+1}\left(1+\frac{-1}{4n-1}\right)^{6n+1}\right] = -\mathrm{e}^{-3/2}.$$

Tedy množina hromadných bodů posloupnosti a_n je $\{\mathrm{e}^{3/2}, -\mathrm{e}^{-3/2}\}$.
Proto je $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{3/2}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e}^{-3/2}$.

<u>Neřešené příklady</u>

Příklad 2.1. Najděte množinu všech hromadných bodů a limes superior a inferior posloupnosti $a_n = \left(1+(-1)^n\right)\dfrac{\sqrt{3n^3+2n^2+1}}{n\sqrt{2n-1}}$.

$$\left[M = \{0, \sqrt{6}\}\,,\quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \sqrt{6}\,,\quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0\,.\right]$$

Příklad 2.2. Najděte množinu všech hromadných bodů a limes superior a inferior posloupnosti $a_n = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{2n+3}\right)^{n+1}\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

$$\left[M = \{-\mathrm{e}^{-1/2}, 0, \mathrm{e}^{-1/2}\}\,,\quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-1/2}\,,\quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e}^{-1/2}\,.\right]$$

Příklad 2.3. Najděte množinu všech hromadných bodů a limes superior a inferior posloupnosti $a_n = (-1)^{n(n+1)/2}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-(-1)^n n+1}\right)$.

$$\left[M = \{-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\}\,,\quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \tfrac{3}{2}\,,\quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\tfrac{3}{2}\,.\right]$$

Příklad 2.4. Najděte množinu všech hromadných bodů a limes superior a inferior posloupnosti $a_n = \left(\dfrac{n+2+(-1)^n}{n-1}\right)^{1-2n}$.

$$\left[M = \{\mathrm{e}^{-8}, \mathrm{e}^{-4}\}\,, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-4}\,, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-8}\,.\right]$$

Příklad 2.5. Najděte množinu všech hromadných bodů a limes superior a inferior posloupnosti $a_n = \left(\dfrac{1+2\cdot(-1)^{n+1}-3n}{3n-4\cdot(-1)^n+2}\right)^{3n+1}$.

$$\left[M = \{-\mathrm{e}^{3}, \mathrm{e}^{-9}, \sqrt{6}\}\,, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-9}\,, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e}^{-3}\,.\right]$$