Cvičení 3.1.

1. Obraz množiny a obor hodnot zobrazení

Je-li $f : X \to Y$ zobrazení a $A \subset X$, nazývá se množina

$$f(A) = \{y \in Y\,;\ \exists x \in A\,;\ f(x) = y\}\,,$$

tj. množina všech $y \in Y$, pro které existuje $x \in A$ takové, že $y = f(x)$, obraz množiny A při zobrazení f.

Množina $H_f = f(X)$ se nazývá obor hodnot zobrazení f.

Zobrazení $f : X \to Y$, pro které je $Y = H_f$, se nazývá zobrazení na množinu Y.

Řešené příklady

Příklad 1.1.r. Najděte obor hodnot funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je definována předpisem $x \mapsto x^2 + 3x + 4$.

Řešení: Graf funkce $y = f(x) = x^2 + 3x + 4$ je parabola

$$y - \tfrac{7}{4} = \left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2.$$

Z tohoto grafu je vidět, že obor hodnot funkce f je množina $y - \frac{7}{4} \geq 0$, tj. interval $\left\langle \frac{7}{4}, +\infty\right)$.

Formálně máme najít množinu všech $y \in \mathbb{R}$, pro které má rovnice $f(x) = y$, tj. rovnice

$$x^2 + 3x + 4 = y\,, \tag{1}$$

reálné řešení. Rovnice (1) pro neznámou x je kvadratická rovnice $x^2 + 3x + 4 - y = 0$, jejíž diskriminant je

$$D = 3^2 - 4(4 - y) = 4y - 7\,.$$

Tedy kvadratická rovnice (1) má reálné řešení pro $D = 4y - 7 \geq 0$, tj. pro $y \in \left\langle \frac{7}{4}, +\infty\right)$. To ale znamená, že $H_f = \left\langle \frac{7}{4}, +\infty\right)$.

Příklad 1.2.r. Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $x \mapsto x^2$. Najděte obraz množiny $A = (-3, -1) \cup (2, 4\rangle$.

Řešení: Například z grafu funkce $y = f(x) = x^2$ je vidět, že $f(A) = (1, 16\rangle$.

Formálně musíme ukázat, že se rovnají množina $f(A)$ a interval $(1, 16\rangle$. V matematice se rovnost množin M a N většinou dokazuje tak, že ukážeme, že $M \subset N$, tj. když je $m \in M$, pak je $m \in N$, a $N \subset M$, tj. když je $n \in N$, pak je $n \in M$.

Abychom ukázali, že $(1, 16\rangle \subset f(A)$, musíme pro každé $y \in (1, 16\rangle$ najít aspoň jedno řešení rovnice $y = x^2$, kde $x \in (-3, -1) \cup (2, 4\rangle = A$. Stačí například zvolit $x = -\sqrt{y}$ pro $y \in (1, 9)$ a $x = \sqrt{y}$ pro $y \in \langle 9, 16\rangle$.

Naopak nechť je $y \in f(A)$ pak existuje $x \in (-3, -1)$ nebo $x \in (2, 4\rangle$ takové, že $y = x^2$. Pokud je $-3 < x < -1$, platí pro $y = x^2$ nerovnost $1 < y < 9$, a pro $2 < x \leq 4$, je pro $4 < y = x^2 \leq 16$. Tedy $y \in (1, 9)$ nebo $y \in (4, 16\rangle$, neboli $y \in (1, 9) \cup (4, 16\rangle = (1, 16\rangle$.

Příklad 1.3.r. Najděte obor hodnot funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, která je definována předpisem

$$x \mapsto y = \frac{x^2 + x + 2}{x + 2}\,.$$

Řešení: Obor hodnot funkce $y = f(x)$ je množina všech $y \in \mathbb{R}$, pro které má rovnice $y = f(x)$ reálné řešení $x \neq -2$. Pro $x \neq -2$ je tato rovnice

$$x^2 + x + 2 = (x+2)y\,, \quad \text{neboli} \quad x^2 + (1-y)x + 2 - 2y = 0\,. \tag{2}$$

To je kvadratická rovnice pro x, jejíž diskriminant je

$$D = (1-y)^2 - 4(2-2y) = y^2 + 6y - 7\,.$$

Tedy kvadratická rovnice (2) má reálné řešení pro

$$D = y^2 + 6y - 7 = (y+7)(y-1) \geq 0\,,$$

tedy pro $y \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle 1, +\infty)$. Toto řešení je

$$x_\pm = \tfrac{1}{2}\left(y - 1 \pm \sqrt{y^2 + 6y - 7}\right). \tag{3}$$

Musí ještě ukázat, že pro $y \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ je aspoň jedno z čísel $x_\pm \neq -2$. Z rovnice

$$-2 = \tfrac{1}{2}\left(y - 1 \pm \sqrt{y^2 + 6y - 7}\right)$$

plyne

$$-3 - y = \pm\sqrt{y^2 + 6y - 7}\,.$$

Jestliže tuto rovnici umocníme, dostaneme vztah $9 = -7$. Proto pro $y \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ nemůže být $x_\pm = -2$. Z toho plyne, že obor hodnot funkce f je

$$H_f = (-\infty, -7\rangle \cup \langle 1, +\infty)\,.$$

Příklad 1.4.r. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$[x; y] \mapsto (2x + y, 3x + 2y)$$

je na množinu $\mathbb{R}^2$.
Řešení: Musíme ukázat, že pro každé $[u; v] \in \mathbb{R}^2$ má soustava rovnic

$$u = 2x + y\,, \qquad v = 3x + 2y$$

řešení. Protože má tato soustava řešení

$$x = 2u - v\,, \qquad y = -3u + 2v\,,$$

je $H_{\mathbf{f}} = \mathbb{R}^2$, a tedy se jedná o zobrazení na množinu $\mathbb{R}^2$.

Příklad 1.5.r. Nechť je $X = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Najděte obor hodnot zobrazení $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^2$, které je definovávo předpisem

$$[x; y] \mapsto \left[\frac{x}{y}; x + y\right].$$

Řešení: Máme zjistit, pro které $[u; v] \in \mathbb{R}^2$ má soustava rovnic

$$u = \frac{x}{y}\,, \qquad v = x + y \tag{4}$$

v množině X řešení. Ze soustavy (4) plyne

$$x = uy\,, \quad x = v - y \implies v - y = uy\,, \quad \text{tj.} \quad (1+u)y = v\,.$$

Tedy pro $u \neq -1$ je

$$y = \frac{v}{1+u}\,, \qquad x = uy = \frac{uv}{1+u}$$

a pro $u = -1$ je $v = 0$ (to je například obraz bodu $[x;y] = [-1;1]$).

Protože musí platit $y > 0$, je pro $u \neq -1$

$$y = \frac{v}{1+u} > 0\,.$$

Obor hodnot zobrazení $\mathbf{f}$ je $H_{\mathbf{f}} = M_+ \cup M_- \cup \big\{[-1;0]\big\}$, kde

$$M_+ = (-1,+\infty) \times (0,+\infty)\,, \quad M_- = (-\infty,-1) \times (-\infty,0)\,.$$

Příklad 1.6.r. Nechť je $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zobrazení, které je definované předpisem

$$t \mapsto [1+2t; 2-3t]\,.$$

Ukažte, že obor hodnot $H_{\mathbf{f}}$ tohoto zobrazení je přímka $\mathcal{P}$ s rovnicí $3x + 2y = 7$.

Řešení: Pro zobrazení $\mathbf{f}$ je

$$x = 1 + 2t\,, \quad y = 2 - 3t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Protože

$$3x + 2y = 3(1+2t) + 2(2-3t) = 7\,,$$

je $H_{\mathbf{f}} \subset \mathcal{P}$.

Naopak nechť je $[x;y] \in \mathcal{P}$. Pak platí $3x + 2y = 7$. Jestliže pro dané $x \in \mathbb{R}$ položíme $t = \frac{1}{2}(x-1) \in \mathbb{R}$, tj. $x = 1 + 2t$, je pro bod $[x;y] \in \mathcal{P}$

$$3x + 2y = 3(1+2t) + 2y = 3 + 6t + 2y = 7\,, \quad \text{neboli} \quad y = \tfrac{1}{2}(4-6t) = 2 - 3t\,.$$

To ale znamená, že $[x;y] \in H_{\mathbf{f}}$, neboli $\mathcal{P} \subset H_{\mathbf{f}}$.

Příklad 1.7.r. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$[x;y;z] \mapsto [x+y+3z+2; x+3y-z+4; 2x+y+4z+3]$$

není na množinu $\mathbb{R}^3$ a najděte obor hodnot tohoto zobrazení.

Řešení: Bod $[u;v;w] \in \mathbb{R}^3$ patří do množiny $H_{\mathbf{f}}$ právě tehdy, když existuje řešení soustavy rovnic

$$u = x + y + 3z + 2\,, \qquad v = x + 3y - z + 4\,, \qquad w = 2x + y + 4z + 3\,.$$

Tato soustava rovnic má ale řešení právě tehdy, když platí

$$2u + v - 3w = 4\,,$$

a tedy ne pro všechna $[u;v;w] \in \mathbb{R}^3$. Proto obor hodnot zobrazení $\mathbf{f}$ není celý prostor $\mathbb{R}^3$, ale pouze rovina daná rovnicí $2u + v - 3w = 4$.

Neřešené příklady

Příklad 1.1. Najděte obor hodnot funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, která je definována předpisem $x \mapsto y = \dfrac{x^2 + x - 3}{x + 2}$. $\big[H_f = \mathbb{R}\,.\big]$

Příklad 1.2. Najděte obor hodnot funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, která je definována předpisem $x \mapsto y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$. $\big[H_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}\,.\big]$

Příklad 1.3. Najděte obor hodnot funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je definována předpisem $x \mapsto y = \operatorname{tgh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$. $\big[H_f = (-1, 1)\,.\big]$

Příklad 1.4. Najděte obor hodnot funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je definována předpisem $x \mapsto y = \operatorname{cotgh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$. $\big[H_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\,.\big]$

Příklad 1.5. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je definované předpisem

$$[x; y] \mapsto [u; v] = [3x - 2y - 1; x + 4y + 3]$$

je na množinu $\mathbb{R}^2$.

Příklad 1.6. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je definované předpisem

$$[x; y; z] \mapsto [u; v; w] = [x + 2y - z; x + y + 3z; 2x - y + z]$$

je na množinu $\mathbb{R}^3$.

Příklad 1.7. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je definované předpisem

$$[x; y; z] \mapsto [u; v; w] = [x + y - 2z; x - 2y + z; 2x - y - z]$$

není na množinu $\mathbb{R}^3$ a najděte jeho obor hodnot $H_{\mathbf{f}}$.

$\Big[H_{\mathbf{f}} = \big\{[u; v; w] \in \mathbb{R}^3\,;\ u + v - w = 0\big\}.\Big]$

Příklad 1.8. Nechť je zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definováno předpisem

$$[u; v] \mapsto [x; y; z] = [2 + u - v; -1 + 2u + v; 2 - u + 2v]\,.$$

Ukažte, že obor hodnot $H_{\mathbf{f}}$ je rovina v $\mathbb{R}^3$, která je dána rovnicí $5x - y + 3z = 17$.

Příklad 1.9. Nechť je $X = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{[x; 0]\,;\ x \in \mathbb{R}\big\}$ a $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$[x; y] \mapsto [u, v] = \left[xy; \frac{x}{y}\right].$$

Najděte obraz množiny $A = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \subset X$.

$\Big[\mathbf{f}(A) = \big\{[u; v] \in \mathbb{R}^2\,;\ u,\ v > 0\big\} \cup \big\{[u; v] \in \mathbb{R}^2\,;\ u,\ v < 0\big\} \cup [0; 0]\,.\Big]$

2. Vzor množiny, prosté zobrazení

Nechť je $f : X \to Y$ zobrazení a $B \subset Y$. Množina

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in X \, ; \; f(x) \in B\} \, ,$$

tj. množina všech $x \in X$, pro které je $f(x) \in B$, se nazývá vzor množiny B při zobrazení f.

Pokud má pro každé $y \in Y$ množina $f^{(-1)}\big(\{y\}\big)$ nejvýše jeden bod, nazývá se zobrazení f prosté, tj. zobrazení $f : X \to Y$ je prosté právě tehdy, když pro každé $y \in Y$ má rovnice $f(x) = y$ v množině X nejvýše jedno řešení.

Jinak se dá říct, že zobrazení $f : X \to Y$ je prosté právě tehdy, když z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ plyne, že $x_1 = x_2$.

Stejná formulace je, že zobrazení $f : X \to Y$ je prosté právě tehdy, když pro každé $x_1, \, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Řešené příklady

Příklad 2.1.r. Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce definovaná předpisem $x \mapsto x^2 + 3x + 4$. Najděte vzor množiny $B = \langle -1, 4 \rangle$

Řešení: Naše úloha je najít všechna reálná x, pro která platí $-1 \leq f(x) = x^2 + 3x + 4 \leq 4$, tj. pro která je $-1 \leq x^2 + 3x + 4$ a zároveň $x^2 + 3x + 4 \leq 4$. První z těchto nerovností platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a z druhé plyne $x^2 + 3x = x(x+3) \leq 0$, tj. $-3 \leq x \leq 0$. Proto je vzor množiny $B = \langle -1, 4 \rangle$ roven

$$f^{(-1)}\big(\langle -1, 4 \rangle\big) = \langle -3, 0 \rangle \, .$$

Příklad 2.2.r. Ukažte, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $x \mapsto x^2 + 3x + 4$ není prostá.

Řešení: Máme ukázat, že rovnice $f(x_1) = f(x_2)$, tj.

$$x_1^2 + 3x_1 + 4 = x_2^2 + 3x_2 + 4 \, , \qquad x_1, \, x_2 \in \mathbb{R} \, , \tag{5}$$

má řešení $x_1 \neq x_2$. Když rovnici (5) napíšeme ve tvaru

$$x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 - 3x_3 = \big(x_1 - x_2\big)\big(x_1 + x_2 + 3\big) = 0 \, ,$$

vidíme, že mimo řešení $x_1 = x_2$ existuje ještě řešení x_1 a x_2, pro která je $x_1 + x_2 + 3 = 0$, například $x_1 = -1$ a $x_2 = -2$. Tedy pro $x_1 = -1 \neq x_2 = -2$ je $f(-1) = f(-2) = 2$, což znamená, že funkce f není prostá.

Příklad 2.3.r. Ukažte, že funkce $f : \langle -\frac{3}{2}, +\infty) \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $x \mapsto x^2 + 3x + 4$ je prostá.

Řešení: Máme ukázat, že z rovnice $f(x_1) = f(x_2)$, tj.

$$x_1^2 + 3x_1 + 4 = x_2^2 + 3x_2 + 4 \, , \qquad x_1, \, x_2 \geq -\tfrac{3}{2} \, , \tag{6}$$

plyne $x_1 = x_2$. Když rovnici (6) napíšeme ve tvaru

$$x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 - 3x_3 = \big(x_1 - x_2\big)\big(x_1 + x_2 + 3\big) = 0 \, ,$$

vidíme, že musí být $x_1 = x_2$ nebo $x_1 + x_2 = -3$. Ale pro $x_1,\, x_2 \geq -\frac{3}{2}$ má druhá rovnice jediné řešení $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$. Tedy z rovnice (6) pro $x_1,\, x_2 \geq -\frac{3}{2}$ plyne $x_1 = x_2$, tj. funkce f je prostá.

Příklad 2.4.r. Ukažte, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je definovaná předpisem

$$x \mapsto x^3 + 3x^2 + 4x + 1$$

je prostá.

<u>*Řešení:*</u> Máme ukázat, že rovnice $f(x_1) = f(x_2)$, tj.

$$x_1^3 + 3x_1^2 + 4x_1 + 1 = x_2^3 + 3x_2^2 + 4x_2 + 1\,, \qquad x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}\,,$$

má jediné řešení $x_1 = x_2$. Protože platí $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$, plyne z této rovnice

$$(x_1 - x_2)\big(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 + 4\big) = 0\,.$$

To znamená, že $x_1 = x_2$ nebo

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 + 4 = 0\,. \tag{7}$$

Stačí tedy ukázat, že rovnice (7) nemá reálná řešení. Tuto rovnost lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 3x_2 + 4 &= \big(x_1 + \tfrac{1}{2}\,(x_2+3)\big)^2 - \tfrac{1}{4}\,(x_2+3)^2 + x_2^2 + 3x_2 + 4 = \\ = \big(x_1 + \tfrac{1}{2}\,(x_2+3)\big)^2 + \tfrac{3}{4}\,x_2^2 + \tfrac{3}{2}\,x_2 + \tfrac{7}{4} &= \big(x_1 + \tfrac{1}{2}\,(x_2+3)\big)^2 + \tfrac{3}{4}\,(x_2+1)^2 - \tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{4} = \\ &= \big(x_1 + \tfrac{1}{2}\,(x_2+3)\big)^2 + \tfrac{3}{4}\,(x_2+1)^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

A protože $\big(x_1 + \frac{1}{2}\,(x_2+3)\big)^2 \geq 0$ a $\frac{3}{4}\,(x_2+1)^2 \geq 0$, je

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 + 4 = \big(x_1 + \tfrac{1}{2}\,(x_2+3)\big)^2 + \tfrac{3}{4}\,(x_2+1)^2 + 1 \geq 1 > 0\,,$$

a tedy rovnice (7) nemá reálná řešení.

Příklad 2.5.r. Ukažte, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je definovaná předpisem

$$x \mapsto x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

není prostá.

<u>*Řešení:*</u> Máme ukázat, že rovnice $f(x_1) = f(x_2)$, tj.

$$x_1^3 + 3x_1^2 + 2x_1 + 1 = x_2^3 + 3x_2^2 + 2x_2 + 1\,, \qquad x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}\,,$$

má aspoň jedno řešení $x_1 \neq x_2$. Pokud tuto rovnici zapíšeme ve tvaru

$$(x_1 - x_2)\big(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 + 2\big) = 0\,,$$

máme ukázat, že rovnice

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 + 2 = 0 \tag{8}$$

má aspoň jedno řešení $x_1 \neq x_2$. Podobnými úpravami jako v předcházejícím případě dostaneme

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 + 2 = \big(x_1 + \tfrac{1}{2}\,(x_2+3)\big)^2 + \tfrac{3}{4}\,(x_2+1)^2 - 1 = 0$$

Tato rovnice má například reálné řešení $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Tedy platí $f(0) = f(-1) = 0$ a funkce f není prostá.

Příklad 2.6.r. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$[x_1; x_2] \mapsto [2x_1 + 3x_2 - 1; x_1 - 2x_2 + 2]$$

je prosté.

Řešení: Stačí ukázat, že soustava lineárních rovnic

$$y_1 = 2x_1 + 3x_2 - 1\,, \qquad y_2 = x_1 - 2x_2 + 2 \tag{9}$$

má pro každé $[y_1; y_2] \in \mathbb{R}$ nejvýše jedno řešení. Protože tato soustava má pro každé $[y_1; y_2] \in \mathbb{R}^2$ právě jedno řešení

$$x_1 = \tfrac{1}{7}\,(2y_1 + 3y_2 - 4)\,, \qquad x_2 = \tfrac{1}{7}\,(y_1 - 2y_2 + 5)\,,$$

je zobrazení $\mathbf{f}$ prosté.

Příklad 2.7.r. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$[x_1; x_2; x_3] \mapsto [2x_1 - x_2 - x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + x_2 - 2x_3]$$

není prosté.

Řešení: Stačí ukázat, že rovnice $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = 0$ má víc než jedno řešení. Rovnice $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = 0$ je vlastně homogenní soustava lineárních rovnic

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0\,, \qquad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\,, \qquad x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\,, \tag{10}$$

která má vždy řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Tedy stačí ukázat, že homogenní soustava (10) má nenulové řešení. Snadno nahlédneme, že jedno nenulové řešení je $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Tedy zobrazení $\mathbf{f}$ není prosté.

Příklad 2.8.r. Nechť je $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y)\,;\ y \in \mathbb{R}\}$. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$[x; y] \mapsto \left[x - y; \frac{y}{x}\right]$$

není prosté.

Řešení: Máme ukázat, že rovnice $\mathbf{f}(x_1, y_1) = \mathbf{f}(x_2, y_2)$, tj. soustava rovnic

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2\,, \qquad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}\,, \qquad [x_1; y_1],\ [x_2; y_2] \in X\,, \tag{11}$$

má řešení $[x_1; y_1] \neq [x_2; y_2]$, tj. $x_1 \neq x_2$ nebo $y_1 \neq y_2$, kde $x_1,\ x_2 \neq 0$.

Soustava (11) je ekvivalentní soustavě

$$y_2 = y_1 - x_1 + x_2\,, \qquad x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0\,. \tag{12}$$

Jestliže dosadíme do druhé rovnice za y_2, dostaneme

$$x_1 y_1 - x_1^2 + x_1 x_2 - x_2 y_1 = (x_1 - x_2)(y_1 - x_1) = 0\,.$$

Z toho plyne $x_1 = x_2$ nebo $y_1 = x_1$.

Jestliže je $x_1 = x_2$ vede první rovnice v (12) k rovnosti $y_2 = y_1$.

Pro $y_1 = x_1$ dostaneme z tohoto vztahu $y_2 = x_2$. Tedy soustava (11) má kromě řešení $[x_1; y_1] = [x_2; y_2]$ ještě řešení $[x_1; x_1]$ a $[x_2; x_2]$. Tedy například platí $\mathbf{f}(1, 1) = \mathbf{f}(2, 2) = [0; 1]$. Obecně je

$$\mathbf{f}^{(-1)}\big([0; 1]\big) = \big\{[x; x] \in \mathbb{R}^2\,;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\}\,,$$

a tedy zobrazení $\mathbf{f}$ není prosté.

Neřešené příklady

Příklad 2.1. Ukažte, že funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, která je definovaná předpisem

$$x \mapsto y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}$$

není prostá.

Příklad 2.2. Ukažte, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je definovaná předpisem

$$x \mapsto y = \sinh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$$

je prostá.

Příklad 2.3. Ukažte, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je definovaná předpisem

$$x \mapsto y = \cosh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

není prostá.

Příklad 2.4. Ukažte, že funkce $f : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$, která je definovaná předpisem

$$x \mapsto y = \cosh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

je prostá.

Příklad 2.5. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je definované předpisem

$$[x; y] \mapsto [4x + y - 3; 3x + 2y + 5]$$

je prosté.

Příklad 2.6. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je definované předpisem

$$[x; y; z] \mapsto [3x + 2y + z - 1; x + y + z + 3; x + z - 2]$$

je prosté.

Příklad 2.7. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je definované předpisem

$$[x; y; z] \mapsto [3x + 2y + z - 1; x + y + z + 3; x - z - 2]$$

není prosté.

Příklad 2.8. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, které je definované předpisem

$$t \mapsto [2t - 1; t - 3; 2; 2 - 3t]$$

je prosté.

Příklad 2.9. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f} : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$, které je definované předpisem

$$[r; \varphi] \mapsto [r \cos\varphi; r \sin\varphi]$$

je prosté.

3. Vzájemně jednoznačné zobrazení, inverzní zobrazení

Zobrazení $f : X \to Y$, které je prosté a na množinu Y se nazývá vzájemně jednoznačné zobrazení.

Věta. Nechť je $f : X \to Y$ vzájemně jednoznačné zobrazení. Pak existuje právě jedno zobrazení $g : Y \to X$ takové, že

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{a} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y \,, \tag{13}$$

kde $\mathrm{id}_X : X \to X$, resp. $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$, jsou tzv. identická zobzazení množiny X, resp. Y, pro která platí $\mathrm{id}_X(x) = x$, resp. $\mathrm{id}_Y(y) = y$.

Podmínka (13) říká, že pro každé $x \in X$ je $g\big(f(x)\big) = x$ a pro každé $y \in Y$ platí $f\big(g(y)\big) = y$.

Jinými slovy, lze říct, že pro vzájemně jednoznačné zobrazení $f : X \to Y$ jsou rovnosti $y = f(x)$ a $x = g(y)$ ekvivalentní.

Definice: Je-li $f : X \to Y$ vzájemně jednoznačné zobrazení, nazývá se zobrazení $g : Y \to X$ z předcházející věty inverzní zobrazení k zobrazení f a značí se $f^{(-1)}$.

Řešené příklady

Příklad 3.1.r. Ukažte, že funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, která je definovaná předpisem

$$x \mapsto y = f(x) = \frac{3x - 4}{2x + 1}$$

je vzájemně jednoznačná a najděte její inverzní funkci.

Řešení. Abychom dokázali, že jde o funkci na danou množinu, musíme ukázat, že rovnice

$$\frac{3x - 4}{2x + 1} = y$$

má řešení pro každé reálné $y \neq \frac{3}{2}$. Po vynásobení jmenovatelem $(2x + 1)$ dostaneme

$$3x - 4 = 2xy + y \,, \quad \text{neboli} \quad (2y - 3)x = -y - 4 \,.$$

Tato rovnice má pro každé $y \neq \frac{3}{2}$ řešení

$$x = \frac{y + 4}{3 - 2y} \,.$$

Tedy funkce $y = f(x)$ je na množinu $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ a funkce $g : \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ je definována předpisem

$$y \mapsto x = g(y) = \frac{y + 4}{3 - 2y} \,.$$

Invernzní funkci dostameme tak, že zaměníme $x \leftrightarrow y$ a dostaneme funkci

$$y = f^{(-1)}(x) = \frac{x + 4}{3 - 2x} \,.$$

Příklad 3.2.r. Najděte inverzní funkci k funkci $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, která je definovaná předpisem

$$x \mapsto y = f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 2} \,.$$

Řešení. Abychom našli inverzní funkci, budeme řešit rovnici

$$y = \frac{2x+3}{3x-2}\,.$$

Po vynásobení jmenovatelem $3x - 2$ dostaneme

$$3xy - 2y = 2x + 3\,, \quad \text{neboli} \quad (3y-2)x = 2y + 3\,.$$

Pro $y \neq \frac{2}{3}$ tedy je

$$x = \frac{2y+3}{3y-2}\,.$$

Abychom dostali inverzní funkci, zaměníme x a y. Tak dostaneme inverzní funkci $f^{(-1)} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$ definovanou předpisem

$$y = f^{(-1)}(x) = \frac{2x+3}{3x-2}\,,$$

která je rovna původní funkci f.

Příklad 3.3.r. Najděte inverzní funkci k funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je definována předpisem

$$y = f(x) = \sinh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Řešení. Abychom našli inverzní funkci budeme řešit rovnice

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right), \quad \text{neboli} \quad \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0\,.$$

Pokud označíme $z = \mathrm{e}^x > 0$ dostaneme kvadratickou rovnici

$$z^2 - 2yz - 1 = 0\,,$$

která má řešení

$$z_{\pm} = y \pm \sqrt{y^2+1}\,.$$

Protože $z > 0$, připadá v úvahu pouze kořen z_+, tj.

$$z = \mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}\,, \quad \text{neboli} \quad x = \ln\!\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Předpis pro inverzní funkci $f^{(-1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dostaneme, když zaměníme x a y, tj.

$$y = f^{(-1)}(x) = \ln\!\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Tato funkce se nazývá argument hyperbolického sinu a často se značí jako $y = \operatorname{argsinh} x$.

Příklad 3.4.r. Najděte inverzní funkci k funkci $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, která je definována předpisem

$$y = f(x) = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,.$$

Řešení. Abychom našli inverzní funkci, najdeme pro každé $y \in (-1, 1)$ řešení rovnice

$$y = f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}\,.$$

Po vynásobení výrazem $\mathrm{e}^{2x} + 1$ dostaneme

$$y\mathrm{e}^{2x} + y = \mathrm{e}^{2x} - 1\,, \quad \text{neboli} \quad \mathrm{e}^{2x}(1 - y) = 1 + y\,.$$

Tedy pro $y \neq 1$ je

$$\mathrm{e}^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}\,.$$

Protože $\mathrm{e}^{2x} > 0$, musí být

$$\frac{1 + y}{1 - y} > 0\,, \quad \text{tj.} \quad -1 < y < 1\,.$$

Pro taková y je

$$2x = \ln \frac{1 + y}{1 - y}\,, \quad \text{tj.} \quad x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} = \ln \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}\,.$$

To znamená. že funkce $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ je definovaná předpisem

$$y \mapsto x = g(y) = \ln \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}\,.$$

Předpis pro inverzní funkci $f^{(-1)} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ k funkci f dostaneme tak, že vyměníme x a y. Tedy

$$x \mapsto y = \ln \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\,.$$

Tato funkce se často nazývá argument hyperbolické tangenty a značí se $y = \operatorname{argtgh} x$.

Příklad 3.5.r. Najděte inverzní zobrazení k zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je definováno předpisem

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mapsto \mathbf{y} = (5x_1 - 2x_2 + 2, 2x_1 - x_2 - 3)\,.$$

Řešení. Abychom našli inverzní zobrazení, budeme pro každé $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ řešit soustavu rovnic

$$y_1 = 5x_1 - 2x_2 + 2\,, \qquad y_2 = 2x_2 - x_2 - 3\,.$$

Řešení soustavy lineárních rovnic

$$x_1 = y_1 - 2y_2 - 8\,, \qquad x_2 = 2y_1 - 5y_2 - 19$$

definuje předpis pro zobrazení $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ z věty, neboli inverzní zobrazení $\mathbf{f}^{(-1)}$. Protože taková zobrazení není zvykem znázorňovat pomocí grafu, neměníme většinou roli nezávisle a závisle proměnných $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Příklad 3.6.r. Najděte inverzní zobrazení k zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je definováno předpisem

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{y} = (2x_1 - 4x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 + 2x_2 - 5x_5) .$$

Řešení. Abychom našli inverzní zobrazení, budeme pro každé $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ řešit soustavu rovnic

$$y_1 = 2x_1 - 4x_2 + x_3 , \qquad y_2 = x_1 + x_2 - 2x_3 , \qquad y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 5x_5 .$$

Řešení této soustavy tří lineárních rovnic je

$$x_1 = -y_1 - 18y_2 + 7y_3 , \qquad x_2 = -y_1 - 13y_2 + 5y_3 , \qquad x_3 = -y_1 - 16y_2 + 6y_3$$

a definuje předpis pro inverzní zobrazení $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{(-1)}(\mathbf{y})$.

`Poznámka.` Zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ z tohoto příkladu je lineární. Proto jej lze zapsat pomocí matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

ve tvaru $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, neboli jako

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Inverzní zobrazení je opět lineární, a proto lze zapsat pomocí matice $\mathbf{A}^{-1}$ jako $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, kde

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -18 & 7 \\ -1 & -13 & 5 \\ -1 & -16 & 6 \end{pmatrix}$$

je inverzní matice k matici $\mathbf{A}$.

Příklad 3.7.r. Najděte inverzní zobrazení k zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y$, kde

$$X = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 < x_2 < x_1\big\} , \qquad Y = \big\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 ; y_1 > 0 ,\ 0 < y_2 < 1\big\} ,$$

které je definováno předpisem

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mapsto \mathbf{y} = (y_1, y_2) = \left(x_1 - x_2, \frac{x_2}{x_1}\right) .$$

Řešení. Abychom našli invernzní zobrazení, budeme pro každé $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in Y$, tj. pro $y_1 > 0$ a $0 < y_2 < 1$, hledat řešení soustavy rovnic

$$y_1 = x_1 - x_2 , \qquad y_2 = \frac{x_2}{x_1} .$$

Z druhé rovnice dostaneme $x_2 = x_1 y_2$ a po dosazení do první rovnice máme

$$y_1 = x_1 - x_1 y_2 = x_1\big(1 - y_2\big) .$$

Protože $0 < y_2 < 1$ je
$$x_1 = \frac{y_1}{1-y_2}\,, \qquad x_2 = \frac{y_1 y_2}{1-y_2}\,. \tag{14}$$
Snadno se přesvědčíme, že pro $(y_1, y_2) \in Y$ platí
$$0 < \frac{y_1 y_2}{1-y_2} < \frac{y_1}{1-y_2}\,, \quad \text{tj.} \quad 0 < x_2 < x_1\,.$$
Proto uvedené řešení patří do množiny X a předpis (14) definuje inverzní zobrazení $\mathbf{f}^{(-1)} : Y \to X$.

Neřešené příklady

Příklad 3.1. Najděte inverzní funkci k funkci $f : \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, která je definována předpisem $x \mapsto y = \dfrac{2x-1}{3-2x}$.
$\left[y = f^{(-1)}(x) = \dfrac{3y+1}{2(y+1)}\,.\right]$

Příklad 3.2. Najděte inverzní funkci k funkci $f : X \to Y$, kde $X = \langle 0, \infty\rangle$ a $Y = \langle 1, \infty\rangle$, která je definována předpisem
$$x \mapsto y = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) = \cosh x\,.$$
Tato inverzní funkce se nazývá argument hyperbolického kosinu a značí se $y = \operatorname{argcosh} x$.
$\left[y = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).\right]$

Příklad 3.3. Najděte inverzní funkci k funkci $f : X \to Y$, kde $X = (0, \infty)$ a $Y = (1, \infty)$, která je definována předpisem
$$x \mapsto y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\,.$$
Tato inverzní funkce se značí $y = \operatorname{argcotgh} x$ a nazývá se argement hyperbolického kotangens.
$\left[y = \operatorname{argcotgh} x = \tfrac{1}{2}\,\ln\dfrac{y+1}{y-1}\,.\right]$

Příklad 3.4. Najděte inverzní zobrazení k zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je definováno předpisem
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mapsto \mathbf{y} = (y_1, y_2) = (4x_1 + 3x_2 - 2, 3x_1 + 2x_2 - 1)\,.$$
$$\left[\mathbf{x} = \mathbf{f}^{(-1)}(\mathbf{y})\,, \quad (y_1, y_2) \mapsto (x_1, x_2) = \left(-2y_1 + 3y_2 - 1, 3y_1 - 4y_2 + 2\right).\right]$$

Příklad 3.5. Najděte inverzní zobrezení k zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je definováno předpisem
$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \qquad \text{kde} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$
$$\left[\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -3 \\ 18 & 5 & -7 \end{pmatrix}.\right].$$

Příklad 3.6. Najděte inverzní zobrazení k zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y$, kde

$$X = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,; x_1,\ x_2 > 0\right\}, \qquad Y = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,; y_1,\ y_2 > 0\right\},$$

které je definováno předpisem

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mapsto \mathbf{y} = (y_1, y_2) = \left(x_1 x_2, \frac{x_1}{x_2^2}\right).$$

$$\Big[\mathbf{y} = (y_1, y_2) \mapsto \mathbf{x} = (x_1, x_2) = \big(\sqrt[3]{y_1^2 y_2}, \sqrt[3]{y_1 y_2^{-1}}\,\big).\Big]$$