Cvičení 3.2.

1. Kvadratické funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Definiční obor kvadratické funkce je $D_f = \mathbb{R}$.

Graf kvadratické funkce je parabola $y = ax^2 + bx + c$. Protože pro $a \neq 0$ platí

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\,,$$

je rovnice této paraboly

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Jedná se tedy o parabolu s vrcholem v bodě $V = \left[-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

Jestliže je $a > 0$ je parabola otevřená v kladném směru osy y a pro $a < 0$ je tomu naopak.

Osu x, tj. přímku $y = 0$, protne tato parabola v bodech, pro které platí

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \quad \text{neboli} \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,, \quad \text{tj.} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,.$$

Tedy pro $b^2 - 4ac \geq 0$ jsou to body

$$x_\pm + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \quad \text{tj.} \quad x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Pro $b^2 - 4ac < 0$ parabola $y = ax^2 + bx + c$ osu x neprotne.

Příklad 1.1.r. Najděte vrchol paraboly $y = 3x^2 + 2x - 4$.
Řešení. Postupně dostaneme

$$y = 3x^2 + 2x - 4 = 3\big(x^2 + \tfrac{2}{3}\,x\big) - 4 = 3\big(x + \tfrac{1}{3}\big)^2 - \tfrac{1}{3} - 4\,, \quad \text{neboli} \quad y + \tfrac{13}{4} = 3\big(x + \tfrac{1}{3}\big)^2.$$

Tedy vrchol paraboly je $V = \big[-\frac{1}{3}; -\frac{13}{4}\big]$.

2. Polynomy (mnohočleny)

Polynom v proměnné x se nazývá každý výraz tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,, \tag{1}$$

kde x je neurčitá proměnná (nějaký symbol) a $a_k \in \mathbb{C}$. Jestliže jsou všechna a_k reálná, nazýváme polynom (1) reálný polynom.

Jestliže považujeme x za reálné číslo, dostaneme polynomiální funkci

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,.$$

Definiční obor této funkce je $D_f = \mathbb{R}$.

Je-li $a_n \neq 0$ nazývá se polynom (1) polynom stupně n a píšeme $\operatorname{st}\big(P(x)\big) = n$ (pro nulový polynom, tj. $P(x) = 0$, se defunuje jeho stupeň jako $-\infty$).

Polynom $P(x)$ stupně n, pro který je $a_n = 1$ se nazývá normovaný polynom stupně n.

Měli byste umět dělit polynom polynomem. Ukážu to na příkladě.

Příklad 2.1.r. Najděte podíl $(2x^4 - 3x^2 + x + 2) : (3x^2 - x + 1)$.

<u>*Řešení.*</u> Píše se to pod sebe jako při dělení čísel

$$
\begin{array}{l}
(\boxed{2x^4} - 3x^2 + x + 2) : (\boxed{3x^2} - x + 1) = \tfrac{2}{3}\,x^2 + \tfrac{2}{9}\,x - \tfrac{31}{27} \\
\underline{-(2x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{2}{3}x^2)} \\
\qquad \boxed{\tfrac{2}{3}x^3} - \tfrac{11}{3}x^2 + x + 2 \\
\qquad \underline{-(\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{2}{9}x^2 + \tfrac{2}{9}x)} \\
\qquad\qquad \boxed{-\tfrac{31}{9}x^2} + \tfrac{7}{9}x + 2 \\
\qquad\qquad \underline{-(-\tfrac{31}{9}x^2 + \tfrac{31}{27}x - \tfrac{31}{27})} \\
\qquad\qquad\qquad -\tfrac{10}{27}x + \tfrac{85}{27}
\end{array}
$$

Tento výpočet znamená, že platí

$$\frac{2x^4 - 3x^2 + x + 2}{3x^2 - x + 1} = \tfrac{2}{3}\,x^2 + \tfrac{2}{9}\,x - \tfrac{31}{27} + \frac{-\frac{10}{27}x + \frac{85}{27}}{3x^2 - x + 1}\,.$$

Pro dělení polynomu polynomem platí následující věta:

<u>VĚTA.</u> Nechť je $P(x)$ polymon stupně n a $Q(x)$ polynom stupně m. Pak existují polynomy $S(x)$ a $R(x)$, kde $\operatorname{st}\big(R(x)\big) < m$, takové, že

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)\,. \tag{2}$$

Přitom jsou polymony $S(x)$ a $R(x)$ dány jednoznačné. Polynom $R(x)$ ze vztahu (2) se nazývá zbytek. Jestliže je $R(x) = 0$, říkáme, že je polynom $P(x)$ dělitelný polynomem $Q(x)$.

Komplexní číslo $x_0 \in \mathbb{C}$, pro které platí $P(x_0) = 0$, se nazývá kořen polynomu $P(x)$. Nechť je $P(x)$ polynom stupně n. Pak je x_0 jeho kořen právě tehdy, když je $P(x)$ dělitený polynomem $x - x_0$. Jinými slovy x_0 je kořen polynomu $P(x)$ stupně n právě tehdy, když existuje polynom $Q(x)$ stupně $(n-1)$ takový, že

$$P(x) = (x - x_0)Q(x)\,.$$

Pro polynomy platí tzv. základní věta algebry

<u>VĚTA.</u> Každý polynom $P(x)$ stupně většího než nula má aspoň jeden komplexní kořen.

Nechť je $P(x)$ polynom stupně n a $x_1, x_2, \ldots, x_r$ všechny jeho navzájem různé kořeny. Pak existují přirozená čísla $k_1, k_2, \ldots, k_r$ taková, že platí

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}. \tag{3}$$

Přirozené číslo k_s v rozkladu (3) se nazývá násobnost kořene x_s plynomu $P(x)$ a platí pro ně

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n\,.$$

Jestliže je $P(x)$ reálný polynom a x_0 jeho kořen násobnosti k, je také jeho komplexně sdružené číslo $\overline{x}_0$ kořen polynomu $P(x)$ násobnosti k. To znamená, že když je $x_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, kde $\beta \neq 0$, kořen polynomu $P(x)$ násobnosti k, je i $x_2 = \overline{x}_1 = \alpha - \mathrm{i}\beta \neq x_1$ kořen násobnosti k. Z toho plyne, že existuje polynom $Q(x)$ takový, že

$$P(x) = \bigl(x - \alpha - \mathrm{i}\beta\bigr)^k \bigl(x - \alpha + \mathrm{i}\beta\bigr)^k Q(x) = \bigl(x^2 + px + q\bigr)^k Q(x)\,,$$

kde kvadratický polynom $x^2 + px + q$ má komlexní kořeny $x_\pm = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$.

Z podobných úvah lze ukázat, že každý reálný polynom $P(x)$ stupně $n > 0$ lze napsat ve tvaru

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\ell_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{\ell_2} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{\ell_s}\,,$$

kde $x_1, \ldots, x_r$ jsou všechny reálné navzájem různé kořeny polynomu $P(x)$, $x^2 + p_1x + q_1, \ldots, x^2 + p_sx + q_s$ jsou navzájem různé reálné polynomy, které nemají reálné kořeny, tj. $p_1^2 - 4q_1 < 0, \ldots, p_s^2 - 2q_s < 0$ a

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2\ell_1 + 2\ell_2 + \ldots + 2\ell_s = n\,.$$

3. Odmocniny

Uvažujme funkci $f(x) = x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Definiční obor této funkce je $D_f = \mathbb{R}$.

Jestliže je n liché, tj. $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, je obor hodnot této funkce $H_f = \mathbb{R}$. Navíc lze ukázat, že je funkce $f(x)$ rostoucí, a proto prostá. Její inverzní funkce se nazývá n–tá odmocnina x, a značí se $\sqrt[n]{x}$.

Tedy pro lichá n je $\sqrt[n]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt[n]{x^n} = \bigl(\sqrt[n]{x}\bigr)^n = x\,.$$

Pro sudá n, tj. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$, je obor hodnot této funkce $H_f = \langle 0, +\infty)$. Protože platí $x^{2k} = (-x)^{2k}$ není funkce $f(x)$ v tomto případě prostá.

Uvažujme zúžení funkce $f(x) = x^n$ na interval $\langle 0, +\infty)$, tj. funkci $g(x) : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$ definovanou vztahem $g(x) = x^n = x^{2k}$. O této funkci lze ukázat, že je rostoucí, a tedy i prostá. Proto k ní existuje inverzní funkce, kterou budeme nazývat n–té odmocnina x, a značit jako $\sqrt[n]{x}$. Tedy pro sudá n je $\sqrt[n]{x} : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$ a pro každé $x \geq 0$ platí

$$\sqrt[n]{x^n} = \bigl(\sqrt[n]{x}\bigr)^n = x\,.$$

`Poznámka:` Poznamenejme, že sudé n je definováno $\sqrt[n]{x^n}$ také pro $x < 0$. Ale pro záporná x neplatí rovnost $\sqrt[n]{x^n} = x$, ale pouze $\sqrt[n]{x^n} = |x|$, kde $|x|$ je tzv. absolutní hodnota x.

4. Exponenciální funkce

Nechť je $a > 0$. Pak pro každé racionální číslo $r = \frac{p}{q}$ můžeme definovat $a^r = \sqrt[q]{a^p} = \bigl(\sqrt[q]{a}\bigr)^p$. Když tuto funkci spojitě rozšíříme do množiny reálných čísel, dostaneme pro $a > 0$ tzv. exponenciální funkci $f(x) = a^x$. Definiční obor této funkce je $D_f = \mathbb{R}$.

Lze ukázat, že pro každé x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ platí vztahy

$$a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}\,, \qquad \bigl(a^{x_1}\bigr)^{x_2} = a^{x_1x_2} \tag{4}$$

a pro každé $a > 0$ je $f(0) = a^0 = 1$.

Pro $a = 1$ je $f(x) = 1^x = 1$ a tedy funkce je konstantní.

Pro $a > 0$, $a \neq 1$ je obor hodnot exponenciální funkce $H_f = (0, +\infty)$. Protože pro $a > 1$ je tato funkce rostoucí a pro $0 < a < 1$ je to funkce klesající, je pro tato a exponenciální funkce prostá.

5. Logaritmická funkce

Pro každé $a > 0$, $a \neq 1$ je exponenciální funkce $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ vzájemně jednoznačná. Proto k ní existuje inverzní funkce, ketrá se nazývá logaritmus x při základu a a značí se $\log_a x$. Podle definice je

$$\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

definovaná vztahem $y = \log_a x$ právě tehdy, když je $x = a^y$. Jinými slovy to znamená, že platí

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{pro každé } x > 0\,, \qquad \log_a\bigl(a^x\bigr) = x \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

`Poznámka:` Funkce $y = \log_a x$ se vlastně zavádí jako značka pro řešení rovnice $x = a^y$. Například rovnice $\pi^x = 7$ má řešení $x = \log_\pi 7$ nebo rovnice $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 5$ má řešení $x = \log_{1/2} 5$.

Funkce $y = \log_{10} x$, tj. logaritmus x při základu 10, se nazývá dekadický logaritmus a používá se pro něj značka $y = \log x$.

V matematické analýze má největší význam funkce logaritmus x při základu e, kde e je tzv. Eulerovo číslo, tj. funkce $y = \log_{\mathrm{e}} x$. Tato funkce se nazývá přirozený logaritmus x a používá se pro ni značka $y = \ln x$.

Pro logaritmus x při základu a platí důležité vztahy, které plynou z rovnic (4) a (5).

Pro každé x_1, $x_2 > 0$ je

$$a^{\log_a x_1 x_2} = x_1 x_2 = a^{\log_a x_1} a^{\log_a x_2} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}, \quad \text{neboli} \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $y > 0$ je

$$a^{x \log_a y} = \bigl(a^{\log_a y}\bigr)^x = y^x = a^{\log_a (y^x)}, \quad \text{neboli} \quad \log_a\bigl(y^x\bigr) = x \log_a y\,.$$

Pro každé a, $b > 0$, a, $b \neq 1$ a $x > 0$ platí

$$a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x} = \bigl(a^{\log_a b}\bigr)^{\log_b x} = a^{\log_b x \, \log_a b}\,, \quad \text{tj.} \quad \log_a x = \log_a b \cdot \log_b x\,.$$

Tento vztah nám umožňuje převádět mezi sebou logaritmy při různých základech. Například pro $x > 0$ platí

$$\mathrm{e}^{\ln x} = x = 10^{\log x} = \bigl(\mathrm{e}^{\ln 10}\bigr)^{\log x} = \mathrm{e}^{\ln 10 \, \log x}\,.$$

Proto je

$$\ln x = \ln 10 \, \log x\,, \quad \text{neboli} \quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}\,.$$

6. Obecná mocnina

Již jsme definovali hodnotu výrazu x^a, kde a je racionální číslo. Pro reálné a je jednodušší definovat funkci $f(x) = x^a$ pro $x > 0$ pomocí vztahu $x = \mathrm{e}^{\ln x}$, neboli jako

$$f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}\,, \quad \text{kde} \quad x > 0\,. \tag{6}$$

Tato funkce se nazývá obecná mocnina.

Pro obecné mocniny lze odvodit známe vzorce

$$(xy)^a = x^a y^a, \quad x^a x^b = x^{a+b} \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}, \quad \left(x^a\right)^b = x^{ab}, \quad \text{kde} \quad x, y > 0\,.$$

Pro $a = 0$ je funkce $f(x) = x^a = x^0 = \mathrm{e}^{0 \ln x} = \mathrm{e}^0 = 1$ konstantní.

Pro $a \neq 0$ je funkce $f(x) = x^a : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ vzájemně jednoznačná její inverzní funkce je $f^{(-1)}(x) = x^{1/a}$, a tedy je to opět obecná mocnina.

`Poznámka.` Pro $n \in \mathbb{N}$ jsme definovali n–tou odmocninu $f(x) = \sqrt[n]{x}$ jako inverzní funkci k funkci x^n s patřičně zúženým definičním oborem. Pokud budeme považovat funkci x^n za obecnou mocninu, tj. pokud definujeme $x^n = \mathrm{e}^{n \ln x}$, kde $x > 0$, označili jsme její inverzní funkci jako $g(x) = x^{1/n}$. Formálně bychom měli rozlišovat funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ a funkci $g(x) = x^{1/n}$, protože tyto funkce mají různý definiční obor. Například pro $n = 3$ má námi definovaná funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ definiční obor $D_f = \mathbb{R}$, kdežto funkce $g(x) = x^{1/3}$ má definiční obor $D_g = (0, +\infty) \subset D_f$. Proto rovnost $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ platí pouze pro $x > 0$.

Neřešené příklady

Příklad 1. Najděte podíl $(x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2) : (x^2 + 3x + 2)$.

$$\left[x^3 - 2x^2 + 2x - 1\,.\right]$$

Příklad 2. Najděte podíl $(4x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 15) : (x^2 + 2x - 3)$.

$$\left[4x^3 - 10x^2 + 39x - 111 + \frac{339x - 318}{x^2 + 2x - 3}\,.\right]$$

Příklad 3. Najděte všechny kořeny polynomu $P(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 7x - 2$, když víte, že je tento polynom dělitelný polynomem $x^2 - 3x + 2$ a $x = 1$ je jeho kořen násobnosti nejméně 2.

$$\left[x_{1,2} = 1\,, \quad x_3 = 2\,, \quad x_{4,5} = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}\,\right).\right]$$

Příklad 4. Ukažte, že pro $x \neq 2$ platí

$$\frac{9 \cdot 4^{x+1}}{2^{x-3}} \left(3^{x+1}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 2^{x+5} \cdot \left(3^{\frac{x-1}{x-2}}\right)^3.$$

Příklad 5. Ukažte, že pro každé $a > 0$, $a \neq 1$, a $x > 0$ platí $\log_a x = -\log_{1/a} x$.

Příklad 6. Ukažte, že pro každé $x > 0$, $x \neq 1$ platí $\log_x \mathrm{e} = \dfrac{1}{\ln x}$.

Příklad 7. Zjednodušte výraz $\dfrac{x^{3/2} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2} \cdot x^{-1/2}}$. $\left[x^{25/12}.\right]$

7. Goniometrické funkce

Goniometrické funkce nazýváme funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$. Geometrický význam nezávisle proměnné x, neboli argumentu, těchto funkcí je délka oblouku jednotkové kružnice se středovým úhlem x, tj. velikost úhlu v radiánech.

Protože délka jednotkové kružnice je rovna 2π je vztah mezi popisem velikosti úhlu pomocí stupňů a radiánů

$$x = \frac{\pi}{180}\,\alpha$$

kde α je velikost úhlu ve stupních a x jeho velikost v radiánech.

Pro pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b, přeponou c a úhlem α, který leží proti odvěsně a je

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\,, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}\,.$$

Z definičních vztahů a z Pythagorovy věty $a^2 + b^2 = c^2$ plynou vztahy

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha = 1\,.$$

Pomocí speciálních pravoúhlých trojúhelníků (rovnoramenný a polovina rovnostranného trojúhelníka) lze najít hodnoty těchto funkcí pro úhly $\alpha = 0 \sim 0°$, $\alpha = \frac{1}{6}\,\pi \sim 30°$, $\alpha = \frac{1}{4}\,\pi \sim 45°$, $\alpha = \frac{1}{3}\,\pi \sim 60°$ a $\alpha = \frac{1}{2}\,\pi \sim 90°$. Tyto hodnoty jsou

α	0	$\frac{1}{6}\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi$	$\frac{1}{3}\,\pi$	$\frac{1}{2}\,\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není definován
$\operatorname{cotg}\alpha$	není definován	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Když v rovině xy budeme uvažovat jednotkovou kružnici se středem v počátku, tj. křivku popsanou rovnicí $x^2 + y^2 = 1$, a φ je úhel, který svírá průvodič bodu $[x;y]$ této kružnice s kladným směrem osy x, tj. délka oblouku kružnice od bodu $[1;0]$ do bodu $[x;y]$, jsou x–ová a y–ová souřadnice bodu rovny $x = \cos\varphi$ a $y = \sin\varphi$. Pomocí tohoto vztahu rozšiřujeme definice funkcí $x = \cos\varphi$ a $y = \sin\varphi$ na hodnoty $0 \le \varphi \le 2\pi$. Pro $\varphi \in \mathbb{R}$ pak definujeme funkce $x = \cos\varphi$ a $y = \sin\varphi$ tak, aby byly periodické s periodou 2π, tj. aby pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$ platilo $\cos(\varphi \pm 2\pi) = \cos\varphi$ a $\sin(\varphi \pm 2\pi) = \sin\varphi$. Z této definice plyne, že definiční obor funkcí $y = \cos x$ a $y = \sin x$ množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ a jejich obor hodnot je interval $\langle -1, 1\rangle$, neboli funkce

$$\cos : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle\,, \qquad \sin : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$$

jsou funkce na množinu $\langle -1, 1\rangle$.

Množina nulových bodů funkce $\cos x$, tj. množina všech řešení rovnice $\cos x = 0$, je množina $\left\{\frac{1}{2}\,\pi + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ a množina nulových bodů funkce $\sin x$ je množina $\left\{k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Důsledek definice těchto funkcí je vztah

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,, \tag{7}$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Podle definice mají tyto funkce periodu $L = 2\pi$, tj. pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x\,, \qquad \sin(x \pm 2\pi) = \sin x\,,$$

a tedy nejsou prosté.

Lze ukázat, že funkce $\cos x$ je sudá a funkce $\sin x$ je lichá, tj. že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos(-x) = \cos x\,, \qquad \sin(-x) = -\sin x\,.$$

Lze také ukázat, že pro každé x, $y \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,, \qquad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,. \tag{8}$$

Jestliže v tomto vztahu položíme $x = y$, dostaneme pro dvijnásobné úhly

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\,, \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x\,.$$

Kombinace se vztahem (7) pak dává

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}\bigl(1+\cos 2x\bigr)\,, \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}\bigl(1-\cos 2x\bigr)\,.$$

Když v (8) položíme $y \to -y$ a využijeme toho, že funkce $\cos x$ je sudá a funkce $\sin x$ je lichá, získáme rovnost

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y\,, \qquad \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

Jestliže odečteme a přičteme tyto rovnosti k (8), dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned}
\cos x\cos y &= \tfrac{1}{2}\bigl(\cos(x+y)+\cos(x-y)\bigr)\,,\\
\sin x\sin y &= \tfrac{1}{2}\bigl(\cos(x-y)-\cos(x+y)\bigr)\,,\\
\sin x\cos y &= \tfrac{1}{2}\,\bigl(\sin(x+y)+\sin(x-y)\bigr)\,.
\end{aligned}$$

Mimo množinu nulových bodů funkce $\cos x$, resp. nulových bodů funkce $\sin x$, definujeme funkce

$$\mathrm{tg} : \mathbb{R}\setminus\bigl\{\tfrac{1}{2}\,\pi + k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\bigr\} \to \mathbb{R}\,, \quad \text{resp.} \quad \mathrm{cotg} : \mathbb{R}\setminus\bigl\{k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\bigr\} \to \mathbb{R}$$

předpisy

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$

Podle definice platí pro tyto funkce na průniku jejich definičních oborů, tj. pro $x \neq \frac{1}{2}\,k\pi$, kde $k\in\mathbb{Z}$, vztah

$$\mathrm{tg}\, x\,\mathrm{cotg}\, x = 1\,.$$

Množina nulových bodů funkce $\mathrm{tg}\, x$ je stejná jako množina bodů funkce $\sin x$, tj. množina $\bigl\{k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\bigr\}$, a množina nulových bodů funkce $\mathrm{cotg}\, x$ je rovna množině nulových bodů funkce $\cos x$, tj. množině $\bigl\{\frac{1}{2}\pi + k\pi\,;\ k\in\mathbb{Z}\bigr\}$.

Obě tyto funkce jsou liché, tj. pro každé x z jejich definčního oboru je

$$\mathrm{tg}(-x) = -\,\mathrm{tg}\, x\,, \qquad \mathrm{cotg}(-x) = -\,\mathrm{cotg}\, x\,,$$

a mají periodu $L = \pi$, tj. pro každé x z definičního oboru je

$$\mathrm{tg}(x\pm\pi) = \mathrm{tg}\, x\,, \qquad \mathrm{cotg}(x\pm\pi) = \mathrm{cotg}\, x\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 8. Najděte následující reálná čísla

$$\begin{array}{llll}
\cos \frac{3}{4}\pi\,, & \sin \frac{7}{6}\,\pi\,, & \mathrm{tg}\, \frac{2}{3}\,\pi\,, & \mathrm{cotg}\, \frac{5}{3}\,\pi\,,\\
\sin \frac{11}{2}\,\pi\,, & \cos \frac{17}{6}\,\pi\,, & \mathrm{tg}\bigl(-\frac{5}{6}\,\pi\bigr)\,, & \mathrm{cotg}\bigl(\frac{17}{3}\,\pi\bigr)\,.
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{llll}
-\frac{\sqrt{2}}{2}\,, & -\frac{1}{2}\,, & -\sqrt{3}\,, & -\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\\
-1\,, & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\,, & -\frac{\sqrt{3}}{3}\,.
\end{array}\right]$$

Příklad 9. Pomocí vztahu pro dvojnásobné úhly najděte $\cos\frac{\pi}{8}$ a $\sin\frac{\pi}{12}$.

$$\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,,\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.\right]$$

Příklad 10. Vyjádřete $\operatorname{tg}(x+y)$ pomocí $\operatorname{tg}x$ a $\operatorname{tg}y$ a $\operatorname{cotg}(x+y)$ pomocí $\operatorname{cotg}x$ a $\operatorname{cotg}y$.

$$\left[\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}\,,\quad \operatorname{cotg}(x+y)=\frac{\operatorname{cotg}x\operatorname{cotg}y-1}{\operatorname{cotg}x+\operatorname{cotg}y}\,.\right]$$

Příklad 11. Vyjádřete funkce $\cos 2x$ a $\sin 2x$ promocí funkce $\operatorname{tg}x$.

$$\left[\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}\,,\quad \sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\,.\right]$$

Příklad 12. Pro $x\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ vyjádřete funkce $\cos x$ a $\sin x$ promocí funkce $\operatorname{tg}x$.

$$\left[\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}\,,\quad \sin x=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}\,.\right]$$

8. Cyklometrické funkce

Goniometrické funkce jsou periodické, a proto nejsou prosté. Inverzní funkce k určitému zúžení goniometrických funkcí se nazývají cyklometrické funkce.

Pokud zúžíme funkci $y=\sin x$ na interval $\langle -\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\rangle$, tj. budeme uvažovat funkci

$$f:\langle -\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi\rangle\to\langle -1,1\rangle\,,\qquad x\mapsto y=\sin x\,,$$

dostaneme vzájemně jednoznačnou funkci. Inverzní funkce k této funkci se nazývá arkussinus a značí se $y=\arcsin x$. Tedy

$$\arcsin:\langle -1,1\rangle\to\langle -\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi\rangle\,,\qquad x\to y=\arcsin x\,,\quad \text{kde}\quad x=\sin y\,.$$

Podle definice inverzní funkce platí

$$\begin{aligned}\sin\bigl(\arcsin x\bigr)&=x\quad\text{pro}\quad x\in\langle -1,1\rangle\,,\\ \arcsin\bigl(\sin x\bigr)&=x\quad\text{pro}\quad x\in\langle -\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi\rangle\,.\end{aligned}$$

Pokud zúžíme funkci $y=\cos x$ na interval $\langle 0,\pi\rangle$, tj. budeme uvažovat funkci

$$f:\langle 0,\pi\rangle\to\langle -1,1\rangle\,,\qquad x\mapsto y=\cos x\,,$$

dostaneme vzájemně jednoznačnou funkci. Inverzní funkce k této funkci se nazývá arkuskosinus a značí se $y=\arccos x$. Tedy

$$\arccos:\langle -1,1\rangle\to\langle 0,\pi\rangle\,,\qquad x\to y=\arccos x\,,\quad \text{kde}\quad x=\cos y\,.$$

Podle definice inverzní funkce platí

$$\begin{aligned}\cos\bigl(\arccos x\bigr)&=x\quad\text{pro}\quad x\in\langle -1,1\rangle\,,\\ \arccos\bigl(\cos x\bigr)&=x\quad\text{pro}\quad x\in\langle 0,\pi\rangle\,.\end{aligned}$$

Pro speciální hodnoty x jsou hodnoty těchto funkcí

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\arccos x$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

Pokud zúžíme funkci $y = \operatorname{tg} x$ na interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, tj. budeme uvažovat funkci

$$f : (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto y = \operatorname{tg} x,$$

dostaneme vzájemně jednoznačnou funkci. Inverzní funkce k této funkci se nazývá arkustangens a značí se $y = \operatorname{arctg} x$. Tedy

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi), \qquad x \to y = \operatorname{arctg} x, \quad \text{kde} \quad x = \operatorname{tg} y.$$

Podle definice inverzní funkce platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\big(\operatorname{arctg} x\big) &= x \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg} x\big) &= x \quad \text{pro} \quad x \in (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi). \end{aligned}$$

Pokud zúžíme funkci $y = \operatorname{cotg} x$ na interval $(0, \pi)$, tj. budeme uvažovat funkci

$$f : (0, \pi) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto y = \operatorname{cotg} x,$$

dostaneme vzájemně jednoznačnou funkci. Inverzní funkce k této funkci se nazývá arkuskotangens a značí se $y = \operatorname{arccotg} x$. Tedy

$$\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \to (0, \pi), \qquad x \to y = \operatorname{arccotg} x, \quad \text{kde} \quad x = \operatorname{cotg} y.$$

Podle definice inverzní funkce platí

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}\big(\operatorname{arccotg} x\big) &= x \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arccotg}\big(\operatorname{cotg} x\big) &= x \quad \text{pro} \quad x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Pro speciální hodnoty x jsou hodnoty těchto funkcí

x	$\to -\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\to +\infty$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\operatorname{arccotg} x$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

Příklad 8.1.r. Ukažte, že pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Řešení. Protože obor hodnot funkce $\arccos x$ je interval $\langle 0, \pi\rangle$ a je $\sin(\arccos x) \ge 0$. Proto platí

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Neřešené příklady

Příklad 8.1. Ukažte, že pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Příklad 8.2. Ukažte, že pro každé $x \neq 0$ platí

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{x}.$$

Příklad 8.3. Spočítejte hodnotu výrazů $\sin\big(\arcsin x + \arccos x\big)$ a $\cos\big(\arcsin x + \arccos x\big)$ a pomocí toho nakreslete graf funkce $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

$$\left[\begin{array}{c} \sin\big(\arcsin x + \arccos x\big) = 1, \quad \cos\big(\arcsin x + \arccos x\big) = 0, \\ \arcsin x + \arccos x = \tfrac{1}{2}\pi. \end{array}\right]$$

9. Hyperbolické funkce

Tak se souhrně označují funkce

hyperbolický sinus	$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$
hyperbolický kosinus	$\cosh : \mathbb{R} \to \langle 1, \infty)\,,$
hyperbolický tangens	$\mathrm{tgh} : \mathbb{R} \to (-1, 1)\,,$
hyperbolický kotangens	$\mathrm{cotgh} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (-\infty, -1) \cup (1, \infty)\,,$

které jsou definované přiřazeními

$$x \mapsto y = \sinh x = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\big)\,, \qquad x \mapsto y = \cosh x = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)$$

$$x \mapsto y = \mathrm{tgh}\, x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,, \qquad x \mapsto y = \mathrm{cotgh}\, x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\,.$$

Všechny tyto funkce jsou funkce na uvedené množiny.

Podle definice je funkce $y = \cosh x$ sudá a funkce $y = \sinh x$, $y = \mathrm{tgh}\, x$ a $y = \mathrm{cotgh}\, x$ liché, tj. pro každé x z definičního oboru je

$$\cosh(-x) = \cosh x\,, \quad \sinh(-x) = -\sinh x\,, \quad \mathrm{tgh}(-x) = -\,\mathrm{tgh}\, x\,, \quad \mathrm{cotgh}(-x) = -\,\mathrm{cotgh}\, x\,.$$

Přímo z definic plynou vztahy

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \qquad \mathrm{tgh}\, x \cdot \mathrm{cotgh}\, x = 1\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Příklad 9.1.r. Dokažte, že pro každé x, $y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,, \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\,. \end{aligned}$$

Řešení. Podle definic je

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{-x-y}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} \mathrm{e}^{-y}\,, \\ \sinh(x+y) &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{-x-y}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} \mathrm{e}^{-y}\,. \end{aligned}$$

Protože pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^y &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}\right) = \cosh y + \sinh y \\ \mathrm{e}^{-y} &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}\right) - \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}\big) = \cosh y - \sinh y\,, \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x\big(\cosh y + \sinh y\big) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\big(\cosh y - \sinh y\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\cosh y + \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\sinh y = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x\big(\cosh y + \sinh y\big) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\big(\cosh y - \sinh y\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\cosh y + \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\sinh y = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\,. \end{aligned}$$

Neřešené příklady

Příklad 9.1. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x\,, \qquad \sinh 2x = 2\sinh x \cosh x\,.$$

Příklad 9.2. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}\big(\cosh 2x + 1\big)\,, \qquad \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}\big(\cosh 2x - 1\big)\,.$$

Příklad 9.3. Dokažte, že pro každé x, $y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
\cosh x \cosh y &= \tfrac{1}{2}\big(\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\big)\,,\\
\sinh x \sinh y &= \tfrac{1}{2}\big(\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\big)\,,\\
\sinh x \sinh y &= \tfrac{1}{2}\big(\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\big)\,.
\end{aligned}$$

10. Hyperbolometrické funkce

To je sournný název pro inverzní funkce k hyperbolickým funkcím, resp. k jejím zúžením. Tyto funkce lze vyjádřit pomocí logaritmů, což se používá velmi často.

Funkce $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je vzájemně jednoznačná. Její inverzní funkce se nazývá argument hyperbolického sinu a značí se

$$\operatorname{argsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto y = \operatorname{argsinh} x\,, \quad \text{kde} \quad x = \sinh y = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}\right).$$

Funkce $\cosh : \mathbb{R} \to \langle 1, \infty$ je sudá, a proto nemůže být prostá. Ale její zúžení na interval $\langle 0, \infty)$, tj. funkce

$$f : \langle 0, \infty) \to \langle 1, \infty)\,, \qquad x \mapsto y = \cosh x\,,$$

už je vzájemně jednoznačná. Její inverzní funkce se nazývá argument hyperbolického kosinu a značí se

$$\operatorname{argcosh} : \langle 1, \infty) \to \langle 0, \infty)\,, \qquad x \mapsto y = \operatorname{argcosh} x\,, \quad \text{kde} \quad x = \cosh y = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}\right).$$

Funkce $\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ je vzájemně jednoznačná. Její inverzní funkce se nazývá argument hyperbolického tangens a značí se

$$\operatorname{argtgh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto y = \operatorname{argtgh} x\,, \quad \text{kde} \quad x = \operatorname{tgh} y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}\,.$$

Funkce $\operatorname{cotgh} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ je vzájemně jednoznačná. Její inverzní funkce se nazývá argument hyperbolického kotangens a značí se

$$\operatorname{argcotgh} : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \qquad x \mapsto y = \operatorname{argcotgh} x\,,$$

kde

$$x = \operatorname{cotgh} y = \frac{\cosh y}{\sinh y} = \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}\,.$$

Neřešené úlohy

Příklad 10.1. Ukažte, že platí

$$\operatorname{argsinh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)\,, \qquad \operatorname{argcosh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr)\,,$$

$$\operatorname{argtgh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,, \qquad \operatorname{argcotgh} x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,.$$