Cvičení 4.1.

1. Jednoduché limity

Měli byste znát nazpaměť některé jednoduché limity

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x^p = \infty\,, && p>0\,,\\
&\lim_{x\to\infty} x^p = 0\,, && p<0\,,\\
&\lim_{x\to\infty} a^x = \infty\,, && a>1\,,\\
&\lim_{x\to\infty} a^x = 0\,, && 0<a<1\,,\\
&\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}\,, && \\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{\mathrm{e}^{qx}} = 0\,, && p\in\mathbb{R}\,,\quad q>0\,,\\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^p x}{x^q} = 0\,, && p\in\mathbb{R}\,,\quad q>0\,,\\
&\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, && \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1\,, && \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 &&
\end{aligned}
$$

a vlastně všechny limity typu

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)\,,$$

což je derivace funkce $f(x)$ v bodě x.

Pomocí těchto jednoduchých limit se počítají limity funkcí, které vznikají algebraickými operacemi. Platí následující

<u>Věta.</u> Jestliže existují limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a je-li a hromadný bod $D_f \cap D_g$ (pro podíl $D_{f/g}$) pak platí

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha A + \beta B\,,\\
&\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = AB\,,\\
&\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\,,
\end{aligned}
$$

za předpokladu, že jsou výrazy vpravo definovány v $\mathbb{R}^*$.

Nefinováné jsou výrazy typu $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, které se většinou nazývají neurčité výrazy.

<u>Řešené příklady</u>

Příklad 1.1.r. Najděte limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4}\,,\qquad \lim_{x\to -1}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4}\,,\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4}\,,$$

Řešení: Nejprve dosádíme hodnotu x, ve které limitu počítáme.

V prvním případě dostaneme pro $x = 0$

$$\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4}\bigg|_{x=0} = \frac{6}{-4}\,.$$

Protože je jedná o definovaný výraz, je

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4} = -\frac{3}{2}\,.$$

Ve druhém případě máme pro $x = -1$

$$\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4}\bigg|_{x=-1} = \frac{0}{-4} = 0\,, \quad \text{a tedy} \quad \lim_{x\to -1}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4} = 0\,.$$

Pro $x = 1$ dostaneme

$$\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4}\bigg|_{x=1} = \frac{12}{0}\,.$$

Tento výraz není definován, ale může být $+\infty$ nebo $-\infty$ v závislosti na znaménku výrazu x^3+2x^2+x-4 v okolí bodu $x = 1$.

Protože je jmenovatel polynom, který je pro $x = 1$ roven nule, je dělitelný výrazem $(x-1)$. Konkrétně je

$$x^3+2x^2+x-4 = (x-1)(x^2+3x+4)$$

a lze psát

$$\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4} = \frac{x^3+5x+6}{x^2+3x+4}\cdot\frac{1}{x-1}\,.$$

Protože

$$\frac{x^3+5x+6}{x^2+3x+4}\bigg|_{x=1} = \frac{3}{2}\,, \quad \text{je} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+5x+6}{x^2+3x+4} = \frac{3}{2}$$

a podle věty o limitě součinu je

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+5x+6}{x^2+3x+4}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\,.$$

Výraz v poslední limitě je kladný pro $x > 1$ a záporný pro $x < 1$. Proto je

$$\lim_{x\to 1_+}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 1_+}\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2}\cdot(+\infty) = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 1_-}\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2}\cdot(-\infty) = -\infty\,.$$

A protože

$$\lim_{x\to 1_+}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4} \neq \lim_{x\to 1_-}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4}$$

obostranná limita

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+5x+6}{x^3+2x^2+x-4} \quad \text{neexistuje}\,.$$

Příklad 1.2.r. Najděte limity

$$\textbf{a}.\quad \lim_{x\to 1_-}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\,,\qquad \textbf{b}.\quad \lim_{x\to -1_+}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\,,\qquad \textbf{c}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\,.$$

<u>Řešení:</u> Nejprve do výrazů v limitách dosadíme odpovídající hodnotu x.

V případě **a.** dostaneme

$$\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\bigg|_{x=1}=-1\,,\quad \text{a tedy}\quad \lim_{x\to 1_-}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=-1\,.$$

V případě **b.** máme

$$\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\bigg|_{x=-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{-1}\,,\quad \text{a tedy}\quad \lim_{x\to -1_+}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=1-\sqrt{2}\,.$$

V případě **c.** dostaneme

$$\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\bigg|_{x=0}=\frac{0}{0}\,,$$

což je neurčitý výraz. Proto výraz v limitě nejprve upravíme. Ze vztahu

$$\big(\sqrt{1-x}-1\big)\big(\sqrt{1-x}+1\big)=-x\,,$$

dostaneme

$$\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}=\frac{-x}{x\big(\sqrt{1-x}+1\big)}=\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}\,.$$

A protože

$$\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}\bigg|_{x=0}=-\frac{1}{2}\,,\quad \text{je}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=-\frac{1}{2}\,.$$

Příklad 1.3.r. Najděte limity

$$\textbf{a}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}\,,\qquad \textbf{b}.\quad \lim_{x\to \pi/6}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}\,,\qquad \textbf{c}.\quad \lim_{x\to \pi/4}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}\,,$$

$$\textbf{d}.\quad \lim_{x\to \pi/2_-}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}\,,\qquad \textbf{e}.\quad \lim_{x\to \pi/2_+}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}\,,\qquad \textbf{f}.\quad \lim_{x\to \pi/2}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}\,.$$

<u>Řešení:</u> Nejprve do výrazů v limitách dosadíme odpovídající hodnotu x.

V případě **a.** dostaneme

$$\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}\bigg|_{x=0}=-1\,,\quad \text{a tedy}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}=-1\,.$$

V případě **b.** je

$$\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}\bigg|_{x=\pi/6}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,,\quad \text{a tedy}\quad \lim_{x\to \pi/6}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,.$$

Dosazení v případě **c.** vede k neurčitému výrazu

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}\Big|_{x=\pi/4}=\frac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{0}{0}\,.$$

Proto se pokusíme funkci upravit. Z rovnosti

$$1-\operatorname{tg} x=1-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}$$

dostaneme

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x-\cos x)\cos x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-1}{\cos x}=-\sqrt{2}\,.$$

Protože $\lim\limits_{x\to\pi/2_-}\operatorname{tg} x=+\infty$, dostaneme v případě **d.**

$$\lim_{x\to\pi/2_-}\frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}=\frac{1-(+\infty)}{1}=-\infty\,.$$

Pro limitu zprava je $\lim\limits_{x\to\pi/2_+}\operatorname{tg} x=-\infty$, a tedy v případě **e.** máme

$$\lim_{x\to\pi/2_+}\frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}=\frac{1-(-\infty)}{1}=+\infty\,.$$

V případě **f.** se jedná o oboustrannou limitu v bodě $x=\frac{1}{2}\pi$. Ale tato limita neexistuje, protože se nerovnají limity zleva a zprava.

Příklad 1.4.r. Najděte limity

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-x+3x^2-4x^3}{x^3+3x^2-x-5}\,,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2-x+3x^2}{x^3+3x^2-x-5}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2-x+3x^2-4x^3}{3x^2-x-5}\,.$$

Řešení: Všechny uvedené limity jsou typu $\frac{\infty}{\infty}$. Tato nekonečna vznikají v polynomech z nejvyšších mocnin proměnné x. Proto tyto nejvyšší mocniny vytkneme a pokusíme se je zkrátit.

V prvním případě dostaneme

$$\frac{2-x+3x^2-4x^3}{x^3+3x^2-x-5}=\frac{x^3\big(2x^{-3}-x^{-2}+3x^{-1}-4\big)}{x^3\big(1+3x^{-1}-x^{-2}-5x^{-3}\big)}=\frac{2x^{-3}-x^{-2}+3x^{-1}-4}{1+3x^{-1}-x^{-2}-5x^{-3}}\,.$$

A protože pro $n>0$ je $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-n}=0$, je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-x+3x^2-4x^3}{x^3+3x^2-x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{-3}-x^{-2}+3x^{-1}-4}{1+3x^{-1}-x^{-2}-5x^{-3}}=-4\,.$$

Podobně ve druhém případě je

$$\frac{2-x+3x^2}{x^3+3x^2-x-5}=\frac{x^2\big(2x^{-2}-x^{-1}+3\big)}{x^3\big(1+3x^{-1}-x^{-2}-5x^{-3}\big)}=\frac{2x^{-2}-x^{-1}+3}{x\big(1+3x^{-1}-x^{-2}-5x^{-3}\big)}\,,$$

a tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x+3x^2}{x^3+3x^2-x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{-2}-x^{-1}+3}{1+3x^{-1}-x^{-2}-5x^{-3}} = 0\cdot 3 = 0\,.$$

Pro třetí limitu máme

$$\frac{2-x+3x^2-4x^3}{3x^2-x-5} = \frac{x^3\big(2x^{-3}-x^{-2}+3x^{-1}-4\big)}{x^2\big(3-x^{-1}-5x^{-2}\big)} = \frac{x\big(2x^{-3}-x^{-2}+3x^{-1}-4\big)}{3-x^{-1}-5x^{-2}}\,,$$

a tedy hledaná limita je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x+3x^2-4x^3}{3x^2-x-5} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{-3}-x^{-2}+3x^{-1}-4}{3-x^{-1}-5x^{-2}} = +\infty\cdot\Big(-\frac{4}{3}\Big) = -\infty\,.$$

Příklad 1.5.r. Najděte limity

$$\lim_{x\to\infty}\big(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}\big)\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\big(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+x-2}\big)\,.$$

Řešení: V obou případech se jedná o limity $\infty-\infty$, tedy o neurčitý výraz. Jestliže vytkneme nejvyšší mocninu x, dostaneme v prvním případě

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1} = \sqrt{x}\big(\sqrt{2+x^{-1}}-\sqrt{1-x^{-1}}\big)\,.$$

A protože $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x} = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty}\big(\sqrt{2+x^{-1}}-\sqrt{1-x^{-1}}\big) = \sqrt{2}-1$, je

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}\Big) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\big(\sqrt{2+x^{-1}}-\sqrt{1-x^{-1}}\big) = +\infty\,.$$

Pokud použijeme podobný postup na druhou limitu, dostaneme

$$\big(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+x-2}\big) = x\big(\sqrt{1+2x^{-1}-3x^{-2}}-\sqrt{1+x^{-1}-2x^{-2}}\big)\,.$$

Ale protože $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty}\big(\sqrt{1+2x^{-1}-3x^{-2}}-\sqrt{1+x^{-1}-2x^{-2}}\big) = 0$, dostaneme tímto postupem limitu typu $\infty\cdot 0$, neboli neurčitý výraz.

Limity podobného typu lze někdy najít tak, že výraz $\big(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+x-2}\big)$ rozšíříme výrazem $\big(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}\big)$. Protože

$$\begin{aligned}\big(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+x-2}\big)\big(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}\big) &= \\ = x^2+2x-3-(x^2+x-2) = x-1\,,\end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+x-2} = \\ &\qquad = \big(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+x-2}\big)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}} = \\ &\qquad = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}}\end{aligned}$$

Proto pro hledanou limitu dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}}=\frac{1}{2}\,.$$

Příklad 1.6.r. Najděte limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^{x+1}}{3\cdot 2^{x-3}-3^x}\,,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^{x+1}}{3\cdot 2^{x-3}-3^x}\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-3^{x+1}}{3\cdot 2^{x-3}-3^x}\,.$$

Řešení: Protože pro $x=0$ máme

$$\left.\frac{2^x-3^{x+1}}{3\cdot 2^{x-3}-3^x}\right|_{x=0}=\frac{1-3}{\frac{3}{8}-1}=\frac{16}{5}\,,\quad\text{je}\quad \lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^{x+1}}{3\cdot 2^{x-3}-3^x}=\frac{16}{5}\,.$$

Pro $x\to+\infty$ je $\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\lim\limits_{x\to\infty}3^x=+\infty$. Tedy jak v čitateli, tak ve jmenovateli jsou neurčité výrazy typu $\infty-\infty$. Protože pro $x>0$ je $3^x>2^x$, vytkneme z čitatele i jmenovatele 3^x, tj. napíšeme

$$2^x-3^{x+1}=3^x\left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^x-3\right)\quad\text{a}\quad 3\cdot 2^{x-3}-3^x=3^x\left(\tfrac{3}{8}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^x-1\right).$$

A protože $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$ je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^{x+1}}{3\cdot 2^{x-3}-3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3^x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-3\right)}{3^x\left(\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-3}{\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}=3\,.$$

Protože $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$, je poslední limita typu $\frac{0}{0}$. Protože pro $x<0$ je $2^x>3^x$, vytkneme z čítatele i jmenovatele výraz 2^x, tj. napíšeme

$$2^x-3^{x+1}=2^x\left(1-3\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^x\right)\quad\text{a}\quad 3\cdot 2^{x-3}-3^x=2^x\left(\tfrac{3}{8}-\left(\tfrac{3}{2}\right)^x\right).$$

A protože $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=0$, je

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-3^{x+1}}{3\cdot 2^{x-3}-3^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x\left(1-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)}{2^x\left(\frac{3}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\frac{3}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^x}=\frac{8}{3}\,.$$

Příklad 1.7.r. Najděte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\ln(x^2-x+2)-2\ln(3x+1)\Big)\,.$$

Řešení: Jedná se o limitu neurčitého vytazu typu $\infty-\infty$. Proto výraz v limitě nejprve upravíme. Platí

$$\ln(x^2-x+2)-2\ln(3x+1)=\ln(x^2-x+2)-\ln(3x+1)^2=\ln\frac{x^2-x+2}{(3x+1)^2}.$$

A protože

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{(3x+1)^2}=\frac{1}{9}\,,$$

je hledaná limita

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\ln(x^2-x+2)-2\ln(3x+1)\Big)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{(3x+1)^2}=\ln\tfrac{1}{9}=-2\ln 3\,.$$

Příklad 1.8.r. Najděte limity

$$\textbf{a.}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}\,,\qquad \textbf{b.}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-2x^2}}{x^2}\,,\qquad \textbf{c.}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{x}\,.$$

<u>*Řešení:*</u> Všechny uvedené limity jsou limity neurčitého výtazu typu $\frac{0}{0}$. Proto výrazy v limitách nejprve upravíme.

V případě **a.** můžeme psát

$$\frac{\operatorname{tg}3x}{x}=\frac{\sin 3x}{x\cos 3x}=\frac{3}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\,.$$

Proto pro tuto limitu můžeme psát

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\,.$$

A protože pro $x\to 0$ je $y=3x\to 0$, je zbývající limita rovna

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1\,.$$

Tedy hledaná limita je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}=3\,.$$

Jestliže zavedeme $y=-2x^2$, je $x^2=-\frac{1}{2}\,y$ a platí

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-2x^2}}{x^2}=\frac{1-\mathrm{e}^{y}}{-\frac{1}{2}\,y}=2\,\frac{\mathrm{e}^{y}-1}{y}\,.$$

A protože pro $x\to 0$ je $y\to 0_+$, dostaneme pro limitu z příkladu **b.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-2x^2}}{x^2}=2\lim_{y\to 0_+}\frac{\mathrm{e}^{y}-1}{y}=2\,.$$

Pro výpočet limity v příkladu **c.** napíšeme

$$\frac{\ln(1-\sin x)}{x}=\frac{\ln\big(1+(-\sin x)\big)}{-\sin x}\cdot\frac{-\sin x}{x}\,.$$

Limita pak je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(1+(-\sin x)\big)}{-\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(1+(-\sin x)\big)}{-\sin x}\,.$$

A protože pro $x\to 0$ je i $y=-\sin x\to 0$, dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(1+(-\sin x)\big)}{-\sin x}=-\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=-1\,.$$

Neřešení příklady

Příklad 1.1. Najděte limity

$$\textbf{a}.\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x^2+5x+3}{3x^2+5x+2}\,,\qquad \textbf{b}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+5x+3}{3x^2+5x+2}\,,\qquad \textbf{c}.\quad \lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{3x^2+5x+2}\,.$$

$\big[$**a**. 1, **b**. $\frac{3}{2}$, **c**. -1.$\big]$

Příklad 1.2. Najděte limity

$$\textbf{a}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}\,,\qquad \textbf{b}.\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}\,,$$

$$\textbf{c}.\quad \lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}\,,\qquad \textbf{d}.\quad \lim_{x\to 3/2}\frac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}\,.$$

$\big[$**a**. -1, **b**. neexistuje, **c**. 0, **d**. 5.$\big]$

Příklad 1.3. Najděte limity

$$\textbf{a}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x+x^2}-x}{x-1}\,,\qquad \textbf{b}.\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x+x^2}-x}{x-1}\,,$$

$$\textbf{c}.\quad \lim_{x\to 0_+}\frac{\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{x}}{x-1}\,,\qquad \textbf{d}.\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{x}}{x-1}\,.$$

$\big[$**a**. -1, **b**. $-\frac{1}{2}$, **c**. -1, **d**. 0.$\big]$

Příklad 1.4. Najděte limity

$$\textbf{a}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{tg} x}\,,\qquad \textbf{b}.\quad \lim_{x\to \pi/4}\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{tg} x}\,,\qquad \textbf{c}.\quad \lim_{x\to \pi/2_-}\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{tg} x}\,.$$

$\big[$**a**. 1, **b**. $=1$, **c**. $+\infty$.$\big]$

Příklad 1.5. Najděte limity

$$\textbf{a}.\quad \lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-x^2-4x+4}}\,,\qquad \textbf{b}.\quad \lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-x^2-4x+4}}\,,$$

$$\textbf{c}.\quad \lim_{x\to \infty}\sqrt{\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-x^2-4x+4}}\,,\qquad \textbf{d}.\quad \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-x^2-4x+4}}\,,$$

$$\textbf{e}.\quad \lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[3]{(2x+3)(1-3x)(4x+1)}}{\sqrt{3x^2-2x+1}}\,,\qquad \textbf{f}.\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt[3]{(2x+3)(1-3x)(4x+1)}}{\sqrt{3x^2-2x+1}}\,,$$

$$\textbf{g}.\quad \lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2+3x-2\sqrt[3]{1+2x^2-4x^3}}}{(x+2)(x-1)}\,,\qquad \textbf{h}.\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x-2\sqrt[3]{1+2x^2-4x^3}}}{(x+2)(x-1)}\,.$$

$\big[$**a**. $\frac{1}{6}\sqrt{70}$, **b**. $\frac{1}{2}\sqrt{15}$, **c**. 1, **d**. neexistuje, **e**. $-\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}$, **f**. $\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}$, **g**. $-\sqrt[3]{4}$, **h**. $\sqrt[3]{4}$.$\big]$

Příklad 1.6. Najděte limity

$$\textbf{a}.\quad \lim_{x\to \infty}\Big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\Big),\qquad \textbf{b}.\quad \lim_{x\to \infty}\sqrt{x-1}\Big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\Big),$$

$$\textbf{c}.\quad \lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}},\qquad \textbf{d}.\quad \lim_{x\to -\infty}\Big(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+x-2}\Big).$$

$\left[\mathbf{a}.\ \ 0\,,\quad \mathbf{b}.\ \ \frac{3}{2}\,,\quad \mathbf{c}.\ \ \sqrt{2}-1\,,\quad \mathbf{d}.\ \ -\frac{1}{2}\,.\right]$

Příklad 1.7. Najděte limity

$$\mathbf{a}.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+3}-3^x}{4^{x+1}+3^{x-2}}\,,\qquad \mathbf{b}.\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+3}-3^x}{4^{x+1}+3^{x-2}}\,,\qquad \mathbf{c}.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x+3}-3^x}{4^{x+1}+3^{x-2}}\,.$$

$\left[\mathbf{a}.\ \ 0\,,\quad \mathbf{b}.\ \ +\infty\,,\quad \mathbf{c}.\ \ 2\,.\right]$

Příklad 1.8. Najděte limity

$$\mathbf{a}.\quad \lim_{x\to\infty}\Bigl(\ln(3x-1)-\ln(2x+3)\Bigr),\qquad \mathbf{b}.\quad \lim_{x\to\infty}\Bigl(\ln(3x+2)-2\ln(x^2-5x+4)+3\ln(2x-7)\Bigr).$$

$bigl[\mathbf{a}.\ \ \ln\frac{3}{2}\,,\quad \mathbf{b}.\ \ \ln 24\,.\bigr]$

2. Limity typu 1^∞

Protože platí $x=\mathrm{e}^{\ln x}$, je $1^\infty=\mathrm{e}^{\ln 1\cdot\infty}=\mathrm{e}^{0\cdot\infty}$ neurčitý výraz. Pro výpočet limit typu 1^∞ lze často použít následující větu

<u>Věta.</u> Nechť je $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. Pak platí

$$\lim_{x\to a}\Bigl(1+f(x)\Bigr)^{g(x)}=\mathrm{e}^A,\qquad \text{kde}\qquad A=\lim_{x\to a}\Bigl(f(x)\,g(x)\Bigr)\,.$$

<u>Řešené příklady</u>

Příklad 2.r. Najděte limity

$$\mathbf{a}.\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-3x}{1-3x}\right)^{3-2x},\qquad \mathbf{b}.\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{1-x}},\qquad \mathbf{c}.\quad \lim_{x\to 0}\Bigl(\cos 2x\Bigr)^{1/x^2}.$$

<u>Řešení:</u>

Protože $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-3x}{1-3x}=1$, jde v případě **a.** o limitu 1^∞. Jestliže napíšeme

$$\frac{5-3x}{1-3x}=1+\frac{4}{1-3x}\,,\qquad \text{je}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{4}{1-3x}=0\,.$$

Podle uvedené věty tedy je

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-3x}{1-3x}\right)^{3-2x}=\mathrm{e}^{8/3},\qquad \text{protože}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{4(3-2x)}{1-3x}=\frac{8}{3}\,.$$

V případě **b.** je $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x+2}=1$. Jedná se proto opět o limitu typu 1^∞. Protože

$$\frac{2x+1}{x+2}=1+\frac{x-1}{x+2}\qquad \text{a}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+2}=0\,,$$

dostaneme podle naší věty

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{1-x}} = \mathrm{e}^{-1/3}, \quad \text{protože} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x}{1-x} = -\frac{1}{3}\,.$$

I v případě **c.** se jedná o limitu typu 1^∞. Abychom mohli použít uvedenou větu, napíšeme

$$\cos 2x = 1 + (\cos 2x - 1)\,.$$

A protože $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x - 1) = 0$, je

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cos 2x\Big)^{1/x^2} = \mathrm{e}^A, \quad \text{kde} \quad A = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{x^2}\,.$$

Protože

$$\cos 2x - 1 = \big(\cos^2 x - \sin^2 x\big) - \big(\cos^2 x + \sin^2 x\big) = -2\sin^2 x\,,$$

je

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{x^2} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = -2\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\Big)^2 = -2\,,$$

neboli

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cos 2x\Big)^{1/x^2} = \mathrm{e}^{-2}.$$

<u>NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY</u>

Příklad 2. Najděte limity

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x+1}$, **b.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-2x}{3+4x}\right)^{2/x}$,

c. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\dfrac{2x-3}{x-3}}$, **d.** $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{2x-1}{3x+1}\right)^{\frac{2x+1}{x+2}}$,

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+2x-2}\right)^{-\sqrt{x^2+x+1}}$, **f.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin 2x}$, .

[**a**. e^{-6}, **b**. e^{-4}, **c**. $\mathrm{e}^{-1/3}$, **d**. $\mathrm{e}^{-3/5}$, **e**. e^{5}, **d**. e^{2}.]

3. Spojité funkce

<u>DEFINICE.</u> Funkce $f(x)$ se nazývá spojitá v bodě $a \in D_f$, když je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ nebo a je izolovaný bod D_f.
Funkce $f(x)$ se nazývá spojitá na množině $M \subset D_f$, je-li spojitá v každém bodě množiny M.
Funkce spojitá na D_f se nazývá spojitá funkce.

<u>VĚTA.</u> Nechť je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a funkce $g(y)$ je spojitá v bodě A. Pak platí

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = g(A)\,.$$

Řešené příklady

Příklad 3.r. Dodefinujte funkci $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+2x-3}$ v bodě $x=1$ tak, aby byla spojitá.

Řešení: Protože jmenovatel funkce $f(x)$ je v bodě $x=1$ roven nule, není bod $x=1$ prvkem definičního oboru funkce $f(x)$. Aby byla tato funkce v bodě $x=1$ spojitá, musíme podle definice položit

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+2x-3}\,.$$

Protože jak čitatel, tak jmenovatel jsou pro $x=1$ rovny nule, jsou tyto polynomy dělitelné výrazem $(x-1)$. Konkrétně je

$$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)\,,\qquad x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)\,,$$

a tedy musíme položit

$$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-x-2)}{(x-1)(x^2+x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x^2+x+3}=-\frac{2}{5}\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 3.1. Dodefinujte funkci $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}+x-1}{x+1}$ v bodě $x=-1$ tak, aby byla v tomto bodě spojitá. $\left[f(-1)=\frac{1}{4}\,.\right]$

Příklad 3.2. Dodefinujte funkci $f(x)=\left(\dfrac{4x-3}{3x-1}\right)^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x-2}}$ v bodě $x=2$ tak, aby byla v tomto bodě spojitá. $\left[f(2)=\mathrm{e}^{7/15}\,.\right]$

4. Asymptoty ke grafu funkce

Přímka $x=a$ se nazývá (svislá) asymptota ke grafu funkce $y=f(x)$, jestliže je alespoň jedna z limit

$$\lim_{x\to a\pm}\bigl|f(x)\bigr|=\infty\,.$$

Přímka $y=kx+y$ se nazývá asymptota ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě $x=+\infty$, resp. $x=-\infty$, jestliže limita

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(f(x)-kx-q\bigr)=0\,,\qquad \text{resp.}\qquad \lim_{x\to-\infty}\bigl(f(x)-kx-q\bigr)=0\,.$$

Je-li $k\neq 0$ nazývá se přímka $y=kx+q$ šikmá asymptota a je-li $k=0$, nazývá se přímka $y=q$ vodorovná asymptota.

<u>Věta.</u> Jestliže je přímka $y=k_\pm x+q_\pm$ asymptota ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě $x=\pm\infty$, je

$$k_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\qquad \text{a}\qquad q_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}\bigl(f(x)-k_\pm x\bigr)\,.$$

Řešené příklady

Příklad 4.1.r. Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $y = \dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je množina $3+2x-x^2>0$, neboli $D_f=(-1,3)$. Asymptoty budeme hledat v krajních bodech D_f, tj. v bodech $x=-1$ a $x=3$, ve kterých může mít funkce $f(x)$ svislé asymptoty.

Abychom zjistili, zda je přímka $x=-1$ svislá asymptota, spočítáme limitu

$$\lim_{x\to -1_+} f(x) = \lim_{x\to -1_+} \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,.$$

Když dosadíme $x=-1$, dostaneme

$$\left.\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{3+2x-x^2}}\right|_{x=-1} \sim \frac{12}{0}\,,\quad \text{tj.}\quad \lim_{x\to -1_+}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\infty\,,$$

protože funkce $\sqrt{3+2x-x^2}\geq 0$. To znamená, že přímka $x=-1$ je svislá asymptota ke grafu funkce $y=f(x)$.

V druhém krajním bodě D_f, tj. v bodě $x=3$, je

$$\lim_{x\to 3_-} f(x) = \lim_{x\to 3_-}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

limita typu $\frac{0}{0}$. Protože

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)\,,\qquad 3+2x-x^2=(3-x)(x+1)\,,$$

je tato limita

$$\lim_{x\to 3_-}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \lim_{x\to 3_-}\frac{(x-3)(x-2)}{\sqrt{(3-x)(x+1)}}\lim_{x\to 3_-}\frac{-(x-2)\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}=0\,.$$

To znamená, že přímka $x=3$ není asymptota ke grafu funkce $y=f(x)$.

Příklad 4.2.r. Najděte vodorovné asymptoty ke grafu funkce $y=\left(\dfrac{5-2x}{1-2x}\right)^{3x+1}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je množina $\dfrac{5-2x}{1-2x}>0$, tj. $D_f=(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{2},+\infty)$. Proto může mít funkce vodorovné asymptoty v bodě $x=+\infty$ i v bodě $x=-\infty$. Rovnice těchto asymptot jsou přímky

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-2x}{1-2x}\right)^{3x+1}\quad \text{a}\quad y=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{5-2x}{1-2x}\right)^{3x+1}.$$

V obou případech jde o limity typu 1^∞. Pokud napíšeme

$$\frac{5-2x}{1-2x}=1+\frac{4}{1-2x}$$

zjistíme, že obě limity jsou

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5-2x}{1-2x}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{4}{1-2x}\right)^{3x+1}=\mathrm{e}^{-6}.$$

Tedy graf funkce $y=f(x)$ má vodorovné asymptoty v bodech $x=+\infty$ i $x=-\infty$ a obě mají rovnici $y=\mathrm{e}^{-6}$.

Příklad 4.3.r. Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $y=\dfrac{x^3+2x^2-3x-4}{1-x-2x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $y=f(x)$ je množina všech x, pro které je $1-x-2x^2\neq 0$, tj. množina $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$. Proto budeme hledat svislé asymptoty v bodech $x=-1$ a $x=\frac{1}{2}$ a vodorovné nebo šikmé asymptoty v bodech $x=\pm\infty$.

Abychom zjjistili, zde je přímka $x=-1$, resp. přímka $x=\frac{1}{2}$ svislá asymptota ke grafu funkce $y=f(x)$, spočítáme limitu

$$\lim_{x\to-1\pm}\frac{x^3+2x^2-3x-4}{1-x-2x^2}\,,\quad\text{resp.}\quad\lim_{x\to1/2\pm}\frac{x^3+2x^2-3x-4}{1-x-2x^2}\,.$$

V bodě $x=-1$ dostaneme

$$\left.\frac{x^3+2x^2-3x-4}{1-x-2x^2}\right|_{x=-1}\sim\frac{0}{0}\,.$$

Jedná se tedy o neurčitý výraz. Ale platí

$$x^3+2x^2-3x-4=(x+1)(x^2+x-4)\quad\text{a}\quad 1-x-2x^2=-(x+1)(2x-1)\,.$$

Proto je

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2-3x-4}{1-x-2x^2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+x-4)}{-(x+1)(2x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x-4}{-2x+1}=-\frac{4}{3}$$

a přímka $x=-1$ není svislá asymptota ke grafu funkce $y=f(x)$.

Pro limitu v bodě $x=\frac{1}{2}$ dostaneme

$$\left.\frac{x^3+2x^2-3x-4}{1-x-2x^2}\right|_{x=1/2}\sim\frac{-\frac{39}{8}}{0}\sim\pm\infty\,.$$

Proto je přímka $x=\frac{1}{2}$ svislá asymptota ke grafu funkce $y=f(x)$.

Abychom našli vodorovné asymptoty ke grafu funkce $y=f(x)$, budeme hledat limity

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+2x^2-3x-4}{1-x-2x^2}=\mp\infty\,.$$

Tedy funkce $y=f(x)$ nemá v bodech $x=\pm\infty$ vodorovné asymptoty.

V bodech $x=\pm\infty$ mohou existovat ještě šikmé asymptoty $y=k_\pm x+q_\pm$, kde

$$k_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\,,\qquad q_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-k_\pm x\big)\,.$$

Protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+2x^2-3x-4}{x(1-x-2x^2)}=-\frac{1}{2}$$

a

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-k_\pm x\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-3x-4}{1-x-2x^2}+\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-5x-8}{2(1-x-2x^2)}=-\frac{3}{4}\,,$$

má graf funkce $y=f(x)$ v bodě $x=+\infty$ a i bodě $x=-\infty$ šikmou asymptotu

$$y=-\tfrac{1}{2}\,x-\tfrac{3}{4}\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 4.1. Najděte vodorovné asymptoty ke grafu funkce $y=\dfrac{\sqrt{1+3x+9x^2}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}$.

$\big[y=-3 \text{ pro } x\to-\infty\,,\quad y=3 \text{ pro } x\to+\infty\,.\big]$

Příklad 4.2. Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $y=\sqrt{x^2+2x+3}$.

$\big[y=-x-1 \text{ pro } x\to-\infty\,,\quad y=x+1 \text{ pro } x\to+\infty\,.\big]$

Příklad 4.3. Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce

$$y=\ln|2x+1|-\tfrac{2}{3}\ln|3-8x|-\tfrac{1}{3}\ln|4x-1|\,.$$

$$\left[\begin{array}{ll}\text{svislé asymptoty:} & x=-\tfrac{1}{2}\,,\quad x=\tfrac{1}{4}\,,\quad x=\tfrac{3}{8}\\ \text{vodorovné symptoty:} & y=-\tfrac{5}{3}\ln 2\quad \text{v bodech } x=\pm\infty\,.\end{array}\right]$$