Cvičení 4.2.

1. Derivace lineární kombinace, součinu a podílu funkcí

Věta. Nechť mají funkce $f(x)$ a $g(x)$ derivace a a, b jsou reálná čísla. Pak je

$$\big(af(x)+bg(x)\big)' = af'(x)+bg'(x)\,,$$
$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,,$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,,\qquad g(x)\neq 0\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 1.1. Najděte derivace následujících funkcí

a. $f(x)=x(x-1)\cos x+4\sqrt{x}\sinh x\,,$

b. $f(x)=3\mathrm{e}^x\sin x-x\operatorname{arctg}x\,,$

c. $f(x)=2^x\operatorname{tg}x+3\sin x\cdot\operatorname{arctg}x\,,$

d. $f(x)=x\arcsin x-4\cos x\cdot\operatorname{cotg}x\,,$

e. $f(x)=3x^{\frac{1}{3}}\ln x-(x^2+x+1)\arccos x\,,$

f. $f(x)=2\mathrm{e}^x\cosh x+\ln x\cdot\operatorname{arctg}x\,.$

[
a. $f'(x)=(2x-1)\cos x-x(x-1)\sin x+\dfrac{2\sinh x}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\sinh x\,,$

b. $f'(x)=3\mathrm{e}^x\sin x+3\mathrm{e}^x\cos x-\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{1+x^2}\,,$

c. $f'(x)=2^x\ln 2\ \operatorname{tg}x+\dfrac{2^x}{\cos^2 x}+3\cos x\operatorname{arctg}x+\dfrac{3\sin x}{1+x^2}\,,$

d. $f'(x)=\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+4\cos x+\dfrac{4\cos x}{\sin^2 x}\,,$

e. $f'(x)=x^{-2/3}\ln x+3x^{-2/3}-(2x+1)\arccos x+\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$

f. $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}+\dfrac{\ln x}{1+x^2}\,.$
]

Příklad 1.2. Najděte derivace funkcí

a. $f(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x-2\operatorname{tg}x}{\cos x+x}\,,$

b. $f(x)=\dfrac{\arcsin x+x^2\ln x}{x\sin x-\mathrm{e}}\,,$

c. $f(x)=\dfrac{3^x-4\sqrt[4]{x}}{\operatorname{arctg}x+3\operatorname{tg}x}\,,$

d. $f(x)=\dfrac{3x\cosh x-2^x\ln x}{\operatorname{cotg}x-\sinh x}\,.$

[
a. $f'(x)=\dfrac{\big((x+1)\mathrm{e}^x-2\cos^{-2}x\big)\big(\cos x+x\big)-\big(x\mathrm{e}^x-2\operatorname{tg}x\big)\big(-\sin x+1\big)}{\big(\cos x+x\big)^2}\,,$

b. $f'(x)=\dfrac{\big((1-x^2)^{-1/2}+2x\ln x+x\big)(x\sin x-\mathrm{e})-(\arcsin x+x^2\ln x)(\sin x+x\cos x)}{(x\sin x-\mathrm{e})^2}\,,$

c. $f'(x)=\dfrac{\big(3^x\ln 3-x^{-3/4}\big)\big(\operatorname{arctg}x+3\operatorname{tg}x\big)-\big(3^x-4\sqrt[4]{x}\big)\big((1+x^2)^{-2}+3\cos^{-2}x\big)}{(\operatorname{arctg}x+3\operatorname{tg}x)^2}\,,$

d. $f'(x)=\frac{(3\cosh x+3x\sinh x-2^x\ln 2\ln x-2^x x^{-1})(\operatorname{cotg}x-\sinh x)-(3x\cosh x-2^x\ln x)(-\sin^{-2}x-\cosh x)}{(\operatorname{cotg}x-\sinh x)^2}\,.$
]

2. Derivace složené funkce

<u>Věta.</u> Nechť mé funkce $f : X \to Y$ derivaci na množině X a funkce $g : Y \to Z$ derivaci na množině Y. Pak má složená funkce $h = g \circ f : X \to Z$, tj. $x \mapsto h(x) = g\big(f(x)\big)$ derivaci, která je rovna

$$h'(x) = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)\,.$$

<u>Neřešené úlohy</u>

Příklad 2.1. Najděte derivaci následujicích funkcí

a. $f(x) = x\mathrm{e}^{3x-1}$, **b**. $f(x) = \mathrm{e}^{3-x}\cos 2x\,,$ **c**. $f(x) = \sin\big(\mathrm{e}^{-x}\big)\,,$

d. $f(x) = x\sqrt{x^2+x+1}\,,$ **e**. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,,$ **f**. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{3+4x}\right),$

g. $f(x) = \ln\big(\operatorname{tg}^2 x\big),$ **h**. $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2},$ **i**. $f(x) = \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big).$

[**a**. $f'(x) = (3x+1)\mathrm{e}^{3x-1}\,,$ **b**. $f'(x) = -(\cos 2x + 2\sin 2x)\mathrm{e}^{3-x},$

c. $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos\big(\mathrm{e}^{-x}\big),$ **d**. $f'(x) = \dfrac{4x^2+3x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}}\,,$

e. $f'(x) = \dfrac{1-2x\operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2}\,,$ **f**. $f'(x) = \dfrac{11}{(x-2)(4x+3)}\,,$

g. $f'(x) = \dfrac{2\cos x\sin x}{}\,,$ **h**. $f'(x) = \dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}\,,$ **i**. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$]

Příklad 2.2. Najděte derivaci následujicích funkcí

a. $f(x) = x^x\,,$ **b**. $f(x) = \sqrt[x]{1+x^2}\,,$

c. $f(x) = \big(\mathrm{e}-\ln x\big)^{\operatorname{tg} x}\,,$ **d**. $f(x) = \sqrt[\sin 2x]{\mathrm{e}^{x^2}-\operatorname{tg} x}$

e. $f(x) = \big(2^x + x\cos x\big)^{\sqrt{(x-1)(x+2)}},$ **f**. $f(x) = \left(\dfrac{x+\operatorname{arctg} x}{x\cos 2x}\right)^{\arcsin x}.$

[**a**. $f'(x) = x^x(\ln x + 1)\,,$

b. $f'(x) = \sqrt[x]{1+x^2}\left(-\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \dfrac{2}{1+x^2}\right),$

c. $f'(x) = \big(\mathrm{e}-\ln x\big)^{\operatorname{tg} x}\left(\dfrac{\ln(\mathrm{e}-\ln x)}{\cos^2 x} - \dfrac{\operatorname{tg} x}{x(\mathrm{e}-\ln x)}\right),$

d. $f'(x) = \sqrt[\sin 2x]{\mathrm{e}^{x^2}-\operatorname{tg} x}\left(-\dfrac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}\ln\big(\mathrm{e}^{x^2}-\operatorname{tg} x\big) + \dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2}-\cos^{-2} x}{\big(\mathrm{e}^{x^2}-\operatorname{tg} x\big)\sin 2x}\right),$

e. $f'(x) = f(x)\left(\frac{(2x+1)\ln\left(2^x+x\cos x\right)}{2\sqrt{(x-1)(x+2)}} + \sqrt{(x-1)(x+2)}\,\frac{2^x\ln 2+\cos x-x\sin x}{2^x+x\cos x}\right),$

f. $f'(x) = f(x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(\frac{x+\operatorname{arctg} x}{x\cos 2x}\right) + \left(\frac{x^2+2}{(1+x^2)(x+\operatorname{arctg} x)} - \frac{\cos 2x-2x\sin 2x}{x\cos 2x}\right)\arcsin x\right).$]

3. Tečna a normála ke grafu funkce, diferenciál funkce

<u>Definice.</u> Nechť má funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 derivaci a $y_0 = f(x_0)$. Pak se přímka s rovnicí

$$(y - y_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)\,, \quad \text{resp.} \quad x - x_0 + f'(x_0)\,(y - y_0) = 0$$

nazývá tečna, resp. normála, ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $A = [x_0; y_0]$.

<u>Definice.</u> Jestliže má funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 derivaci, nazývá se diferencovatelná v bodě x_0 a lineární funkce

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)h\,, \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x\,,$$

proměnné h, resp. $\mathrm{d}x$, diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná pro každé $x \in M$, nazývá se diferencovatelná na množině M.

<u>Řešené příklady</u>

Příklad 3.1.r. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ v bodech $A_1 = [0; ?]$, $A_2 = [1; ?]$ a $A_3 = \left[\frac{1}{2}; ?\right]$.

<u>Řešení:</u> y–ové souřadnice bodů, které leží na grafu funkce $y = f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ jsou $y_1 = f(0) = 1$, $y_2 = f(1) = 1$ a $y_3 = f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Derivace funkce $f(x)$ je

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}\,.$$

Pro $x_1 = 0$ je $f'(0) = -\frac{1}{2}$, a tedy rovnice tečny, resp. normály ke grafu funkce $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ v bodě $A_1 = [0; 1]$ jsou

$$y - 1 = -\tfrac{1}{2}\,x\,, \quad \text{resp.} \quad x - \tfrac{1}{2}\,(y - 1) = 0\,,$$

neboli

$$x + 2y - 2 = 0\,, \quad \text{resp.} \quad 2x - y + 1 = 0\,.$$

Pro $x_2 = 1$ je $f'(1) = \frac{1}{2}$, a tedy rovnice tečny, resp. normály ke grafu funkce $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ v bodě $A_2 = [1; 1]$ jsou

$$y - 1 = \tfrac{1}{2}\,(x - 1)\,, \quad \text{resp.} \quad x - 1 + \tfrac{1}{2}\,(y - 1) = 0\,,$$

neboli

$$x - 2y + 1 = 0\,, \quad \text{resp.} \quad 2x + y - 3 = 0\,.$$

Pro $x_3 = \frac{1}{2}$ je $f'(\frac{1}{2}) = 0$, a tedy rovnice tečny, resp. normály ke grafu funkce $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ v bodě $A_3 = \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ jsou

$$y - \tfrac{\sqrt{3}}{2} = 0\,, \quad \text{resp.} \quad x - \tfrac{1}{2} = 0\,.$$

To znamená, že v tomto případě je tečna $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ rovnoběžná s osou x a normála $x = \frac{1}{2}$ je rovnoběžná s osou y.

Příklad 3.2.r. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \big(\cos \pi x + 2 \sin \pi x\big)^{2x+1}$ v bodech $A_1 = [0; ?]$, $A_2 = \big[\frac{1}{2}; ?\big]$ a $A_3 = [1; ?]$.

Řešení: y–ové souřadnice uvedených bodů, které leží na grafu funkce $y = f(x) = \big(\cos \pi x + 2 \sin \pi x\big)^{2x+1}$ jsou $y_1 = f(0) = 1$ a $y_2 = (\frac{1}{2}) = 4$. Protože definiční obor funkce $f(x)$ je množina, na které je $\cos \pi x + 2 \sin \pi x > 0$, nepatří $x = 1$ do definičního oboru funkce.

Derivace funkce $f(x)$ je

$$f'(x) = \big(\cos \pi x + 2 \sin \pi x\big)^{2x+1} \left(2 \ln\big(\cos \pi x + 2 \sin \pi x\big) + (2x+1) \frac{-\pi \sin \pi x + 2\pi \cos \pi x}{\cos \pi x + 2 \sin \pi x} \right)$$

Protože $f'(0) = 2\pi$, je rovnice tečny, resp. normály, ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $A_1[0; 1]$

$$y - 1 = 2\pi x\,, \quad \text{resp.} \quad x + 2\pi(y-1) = 0\,.$$

Pro $x_2 = \frac{1}{2}$ je $f'(\frac{1}{2}) = 4(2 \ln 2 - \pi)$, a proto je rovnice tečny, resp. normály, ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $A_2 = [\frac{1}{2}; 4]$

$$y - 4 = 4(2 \ln 2 - \pi)(x - \tfrac{1}{2})\,, \quad \text{resp.} \quad x - 1 + 4(2 \ln 2 - \pi)(y - 4) = 0\,.$$

Příklad 3.3.r. Najděte diferenciál funkce $f(x) = \big(\cos x\big)^{2x} + \arccos \frac{1}{4} x$ v bodech $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ a $x_3 = 2\pi$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x) = \big(\cos x\big)^{2x} + \arccos \frac{1}{4} x$ je množina všech x, pro které je $\cos x > 0$ a $-4 \le x \le 4$. Z uvedených hodnot x patří tedy do definičního oboru funkce $f(x)$ pouze bod $x_1 = 0$.

Derivace funkce $f(x)$ je

$$f'(x) = (\cos x)^{2x} \big(2 \ln(\cos x) - 2x \operatorname{tg} x\big) - \frac{1}{4\sqrt{1 - \big(\frac{x}{4}\big)^2}}\,.$$

A protože $f'(0) = -\frac{1}{4}$, je diferenicál funkce $f(x)$ v bodě $x_1 = 0$ roven

$$\mathrm{d}f = -\tfrac{1}{4}\, h \qquad \big(\text{nebo} \quad \mathrm{d}f = -\tfrac{1}{4}\, \mathrm{d}x\big)\,.$$

Příklad 3.4.r. Najděte rovnice tečen ke grafu funkce $y = x^3 - 4x^2 - x$, které jsou kolmé na přímku $x + 2y = 0$.

Řešení: Směrnice přímky $x + 2y = 0$, neboli $y = -\frac{1}{2} x$ je $k_p = -\frac{1}{2}$. Protože tečna má být na tuto přímku kolmá, musí mít směrnici $k_t = 2$. Proto budeme na grafu funkce $y = f(x) = x^3 - 4x^2 - x$ hledat body, ve kterých je derivace

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 1 = 2\,.$$

Tato rovnice má dvě řešení $x_1 = 3$ a $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Dostali jsme tedy dva body dotyku $A_1 = [3; -6]$ a $A_2 = \big[-\frac{1}{3}; -\frac{4}{27}\big]$. Proto jsou rovnice hledaných tečen

$$y + 6 = 2(x - 3)\,, \qquad y + \tfrac{4}{27} = 2\big(x + \tfrac{1}{3}\big)\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 3.1. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \mathrm{e}^{3\sqrt{x}}$ v bodě $A = [1; ?]$.

$$\Big[\text{tečna: } 3\mathrm{e}^3 x - 2y = \mathrm{e}^3, \quad \text{normála: } 2x + 3\mathrm{e}^3 y = 2 + 3\mathrm{e}^6.\Big]$$

Příklad 3.2. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \ln\left|\dfrac{2x+3}{2x-1}\right|$ v bodech $A_1 = [1; ?]$ a $A_2 = [-1; ?]$.

$$\begin{bmatrix} A_1 = [1; \ln 5] & \text{tečna: } 8x + 15y = 8 + 15\ln 5\,, & \text{normála: } 15x - 8y = 15 - 8\ln 5\,; \\ A_2 = [-1; -\ln 3] & \text{tečna: } 8x - 3y = 3\ln 3 - 8\,, & \text{normála: } 3x + 8y = -3 - 8\ln 3\,. \end{bmatrix}$$

Příklad 3.3. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \ln\big(\operatorname{tg} x\big)$ v bodě $A = \big[\frac{1}{4}\pi; ?\big]$.

$$\Big[\text{tečna: } 2x - y = \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad \text{normála: } x + 2y = \tfrac{1}{4}\pi\,.\Big]$$

Příklad 3.4. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$ v bodě $A = [2; ?]$.

$$\Big[\text{tečna: } x - 2\sqrt{3}\,y = 2 - \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi\,, \quad \text{normála: } 2\sqrt{3}\,x + y = 4\sqrt{3} + \tfrac{1}{3}\pi\,.\Big]$$

Příklad 3.5. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = x^x$ v bodech $A_1 = [1; ?]$ a $A_2 = [2; ?]$.

$$\begin{bmatrix} A_1 = [1; 1] & \text{tečna: } y = x\,, \\ & \text{normála: } x + y = 2\,; \\ A_2 = [2; 4] & \text{tečna: } y - 4 = 4\big(\ln 2 + 1\big)(x-2)\,, \\ & \text{normála: } x - 2 + 4\big(\ln 2 + 1\big)(y-4) = 0\,. \end{bmatrix}$$

Příklad 3.6. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \sqrt[x]{\operatorname{tg} x}$ v bodě $A = \big[\frac{1}{4}\pi; ?\big]$.

$$\Big[\text{tečna: } 8x - \pi y = \pi\,, \quad \text{normála: } \pi\big(x - \tfrac{1}{4}\pi\big) + 8(y-1) = 0\,.\Big]$$

Příklad 3.7. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \big(1 + 2\ln x\big)^{\ln x}$ v bodech $A_1 = [1; ?]$ a $A_2 = [\mathrm{e}; ?]$.

$$\begin{bmatrix} A_1 = [1; 1] & \text{tečna: } x = 1\,, \\ & \text{normála: } y = 1\,; \\ A_2 = [\mathrm{e}; 3] & \text{tečna: } \mathrm{e}(y-3) = \big(3\ln 3 + 2\big)(x - \mathrm{e})\,, \\ & \text{normála: } \mathrm{e}(x - \mathrm{e}) + \big(3\ln 3 + 2\big)(y-3) = 0\,. \end{bmatrix}$$

Příklad 3.8. Najděte diferenciál funkce $f(x) = \ln\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ v bodech $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\Big[\mathrm{d}f\big(\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{8}{3}\,\mathrm{d}x\,, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2} \notin D_f\,.\Big]$$

Příklad 3.9. Najděte diferenciál funkce $f(x) = \big(\mathrm{e}^2 - x^2\big)^{\sin x}$ v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = \pi$.

$$\Big[\mathrm{d}f\big(0\big) = 2\,\mathrm{d}x\,, \quad x_2 = \pi \notin D_f\,.\Big]$$

Příklad 3.10. Najděte rovnice tečen ke grafu funkce $y = x^3 + x - 2$, které jsou rovnoběžné s přímkou $y = 4x + 2$.

$$\Big[4x - y = 4 \ \big(\text{bod dotyku } A_1 = [1;0]\big), \quad 4x - y = 0 \ \big(\text{bod dotyku } A_2 = [-1;-4]\big).\Big]$$

Příklad 3.11. Najděte rovnici normály ke grafu funkce $y = x \ln x$, která je rovnoběžná s přímkou $2x - 2y + 3 = 0$.

$$\Big[x - y = 3\mathrm{e}^{-2} \ \big(\text{bod dotyku } A_1 = \big[\mathrm{e}^{-2}; -2\mathrm{e}^{-2}\big]\big).\Big]$$

Příklad 3.12. Najděte rovnice tečen ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{x}$, které procházejí bodem $A = [-1;3]$.

$$\Big[x + y = 2 \ \big(\text{bod dotyku } A_1 = [1;1]\big); \quad 9x + y + 6 = 0 \ \big(\text{bod dotyku } A_1 = [-\tfrac{1}{3}; -3]\big).\Big]$$

4. Parametrické rovnice křivky, tečný vektor a rovnice tečny ke křivce

Zobrazení $\vec{\varphi}$ intervalu (a,b) do $\mathbb{R}^n$ přiřazuje každému $t \in (a,b)$ uspořádanou n–tici reálných čísel, tj.

$$\vec{\varphi} : (a,b) \to \mathbb{R}^n \,, \qquad t \mapsto \vec{\varphi}(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\big) \,.$$

kde $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_n(t)$ jsou reálné funkce definované na intervalu (a,b), nebo pomocí souřadnic jako

$$x_1 = \varphi_1(t) \,, \quad x_2 = \varphi_2(t) \,, \ldots, \quad x_n = \varphi(t) \,, \qquad t \in (a,b) \,.$$

Zobrazení $\vec{\varphi} : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ se nazývá diferencovatelné, jsou-li diferencovatelné všechny jeho složky $\varphi_k(t)$ a jeho derivace je

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \vec{\varphi}\,'(t) = \big(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \ldots, \varphi_n'(t)\big) \,.$$

V geometrii má diferencovatelné zobrazení $\vec{x} = \vec{x}(t)$ intervalu (a,b) do $\mathbb{R}^n$, zejména do $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$, význam parametrických rovnic křivky $\mathcal{C}$

$$x = x(t) \,, \quad y = y(t) \,, \quad z = z(t) \,, \qquad t \in (a,b) \,.$$

Derivace tohoto zobrazení v bodě t_0, tj. vektor $\vec{\tau} = \vec{x}\,'(t_0)$, je pak tečný vektor ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$. Jestliže je $\vec{x}\,'(t_0) \neq 0$, jsou parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\vec{x}_0$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{\tau}\, t \,, \qquad t \in \mathbb{R} \,,$$

nebo ve slokách

$$x = x(t_0) + x'(t_0)\, t \,, \quad y = y(t_0) + y'(t_0)\, t \,, \quad z = z(t_0) + z'(t_0)\, t \,, \qquad t \in \mathbb{R} \,.$$

Pokud interpretujeme proměnnou t jako čas, mají ve fyzice rovnice $\vec{x} = \vec{x}(t)$ význam polohy bodu v čase t a derivace má význam rychlosti bodu $\vec{v}$ v čase t, tj. $\vec{v}(t) = \vec{x}\,'(t)$.

Neřešené příklady

Příklad 4.1. Najděte rovnice tečen ke křivce $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$, která je popsána parametrickými rovnicemi

$$x = t - \sin t \,, \quad y = 1 - \cos t \,, \qquad t \in (0, \pi) \,,$$

v bodech, které odpovídají hodnotám parametru $t_1 = \frac{1}{4}\,\pi$, $t_2 = \frac{1}{2}\,\pi$ a $t_3 = \frac{3}{4}\,\pi$.

$$\left[\begin{array}{ll}
\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\,(\pi - 2\sqrt{2}) + \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})t\,, \\ y = \frac{1}{2}\,(2-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,t\,, \end{array} & t \in \mathbb{R} \quad \text{pro} \ \ t_1 = \frac{1}{4}\,\pi\,; \\[2ex]
\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\,(\pi - 2) + t\,, \\ y = 1 + t\,, \end{array} & t \in \mathbb{R} \quad \text{pro} \ \ t_2 = \frac{1}{2}\,\pi\,; \\[2ex]
\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\,(3\pi - 2\sqrt{2}) + \frac{1}{2}(2+\sqrt{2})t\,, \\ y = \frac{1}{2}\,(2+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,t\,, \end{array} & t \in \mathbb{R} \quad \text{pro} \ \ t_3 = \frac{3}{4}\,\pi\,;
\end{array}\right]$$

Příklad 4.2. Najděte rovnici tečny ke křivce $\mathcal{C}$ s parametrickými rovnicemi

$$x = \sin t \cos t\,, \quad y = \sin^2 t\,, \quad z = \cos t\,, \qquad t \in (0, \pi)$$

v bodě $A = [0; 1; 0]$. $\Big[x = t\,, \ \ y = 1\,, \ \ z = t \quad t \in \mathbb{R}\,.\Big]$

Příklad 4.3. Poloha bodu v čase t je popsána rovnicemi

$$x = \mathrm{e}^{-3t}\cos 4t\,, \quad y = \mathrm{e}^{-3t}\sin 4t\,, \quad z = \mathrm{e}^{-3t}\,, \qquad t > 0\,.$$

Najděte vektor rychlosti v čase t a jeho velikost.
$\Big[\mathbf{v}(t) = -\mathrm{e}^{-3t}\big(3\cos 4t + 4\sin 4t, 3\sin 4t - 4\cos 4t, 3\big), \quad v(t) = \big\|\mathbf{v}(t)\big\| = \sqrt{34}\,\mathrm{e}^{-3t}\,.\Big]$