Cvičení 5.1.

1. L'Hospitalovo pavidlo

<u>Věta.</u> Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné v okolí bodu $x = a$. Nechť je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. Pokud existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Řešené příklady</u>

Příklad 1.1.r. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{\mathrm{e}^{-x^2}-1}$.

<u>*Řešení:*</u> Jedná se o limitu typu $\frac{0}{0}$. Proto můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Podle něj je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{\mathrm{e}^{-x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{-1}-(1-x)^{-1}}{-2x\mathrm{e}^{-x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{-2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}} = 1\,.$$

Příklad 1.2.r. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 1_+} \ln(x-1)\cdot \operatorname{tg}\pi x$.

<u>*Řešení:*</u> Jedná se o limitu typu $\infty\cdot 0$. Abychom mohl použít l'Hospitalovo pravidlo, musíme výraz v limitě zapsat jako zlomek. Protože

$$\operatorname{tg}\pi x = \frac{1}{\operatorname{tg}^{-1}\pi x} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\pi x}\,, \quad \text{je} \quad \lim_{x\to 1_+} \ln(x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x = \lim_{x\to 1_+} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{cotg}\pi x}\,.$$

Nyní se už jedná o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$, na kterou můžeme l'Hospitalovo pravidlo použít. Pomocí něj dostaneme

$$\lim_{x\to 1_+} \ln(x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x = \lim_{x\to 1_+} \frac{(x-1)^{-1}}{-\pi\sin^{-2}\pi x} = \lim_{x\to 1_+} \frac{-\sin^2\pi x}{\pi(x-1)}\,.$$

Poslední limita je typu $\frac{0}{0}$, a proto pro její výpočet lze opět použít l'Hospitalovo pravidlo. Tedy

$$\lim_{x\to 1_+} \ln(x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x = \lim_{x\to 1_+} \frac{-2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{\pi} = 0\,.$$

Příklad 1.3.r. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos 2x - x\sin x}$.

<u>*Řešení:*</u> Tato limita je typu 1^∞. Proto bychom ji mohli najít pomocí vztahu

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos 2x - x\sin x} = \mathrm{e}^A, \quad \text{kde} \quad A = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - x\sin x - 1}{x^2} = -3\,.$$

Jiná možnost je napsat

$$\sqrt[x^2]{\cos 2x - x\sin x} = \exp\left(\frac{\ln(\cos 2x - x\sin x)}{x^2}\right), \quad \text{kde funkce} \quad \exp x = \mathrm{e}^x\,,$$

a hledat limitu

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos 2x - x\sin x} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(\cos 2x - x\sin x)}{x^2}\right).$$

Protože funkce e^x je spojitá, dostaneme podle věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos 2x - x\sin x} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x - x\sin x)}{x^2}\right),$$

a tedy stačí najít limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x - x\sin x)}{x^2}$. Tato limita je typu $\frac{0}{0}$. Proto můžeme při jejím výpočtu použít l'Hospitalovo pravidlo a dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x - x\sin x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x - \sin x - x\cos x}{2x(\cos 2x - x\sin x)}\,.$$

Poslední limita je opět typu $\frac{0}{0}$ a bylo by na ni možné použít ihned l'Hospitalovo pravidlo. Často bývá lepší si poslední limitu ještě trochu zjednodušit.

Podle věty o součinu limit, je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x - \sin x - x\cos x}{2x(\cos 2x - x\sin x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(\cos 2x - x\sin x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x + \sin x + x\cos x}{x} = \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x + \sin x + x\cos x}{x}\end{aligned}$$

a l'Hospitalovo pravidlo použít pouze na tuto limitu, která je opět typu $\frac{0}{0}$. To nám dáva

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x + \sin x + x\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}(4\cos 2x + \cos x + \cos x - x\sin x) = 6\,.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x - x\sin x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x - \sin x - x\cos x}{2x(\cos 2x - x\sin x)} = -3$$

a hledaná limita je

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x^2]{\cos 2x - x\sin x} = \mathrm{e}^{-3}.$$

Srovnejte tento postup výpočtu uvedené limity a výpočtem, ve kterém vztah pro výpočet limit typu 1^∞.

Příklad 1.4.r. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Řešení: Jde o rozdíl dvou limit typu $\frac{1}{0}$. Snadno se lze přesvědčit, že

$$\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{\sin x} = \pm\infty\,.$$

Proto je jak limita zleva, tak limita zprava neurčitý výraz typu $\infty - \infty$. Abychom mohli použit l'Hospitalovo pravidlo, musíme výraz v limitě nejprve upravit na podíl. Protože

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - 1 + \mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})\sin x}\,,$$

je naše limita

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - 1 + \mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})\sin x}\,,$$

což je neurčitý výraz pypu $\frac{0}{0}$, na který je již možné použít l'Hospitalovo pravidlo. To nám dává

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}\sin x + (1-\mathrm{e}^{-x})\cos x}\,.$$

Tato limita je stále typu $\frac{0}{0}$. Další použití l'Hospitalova pravidla vede k limitě

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + \mathrm{e}^{-x}}{-\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x + \mathrm{e}^{-x}\cos x - (1-\mathrm{e}^{-x})\sin x} = \frac{1}{2}\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 1.1. Najděte následující limity

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5^x - 3^x}{\operatorname{tg} x}$, **b.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$, **c.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2\ln(1-x)}$,

d. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 4x)}{\ln(\cos 5x)}$, **e.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{x^3}$, **f.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{x - 1 - \ln x}$,

g. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg}\pi x}$, **h.** $\displaystyle\lim_{x\to 1_-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$.

$\Big[$**a.** $\ln\frac{5}{3}$, **b.** $\frac{1}{2}$, **c.** $-\frac{1}{3}$, **d.** $\frac{16}{25}$, **e.** $\frac{1}{6}$, **f.** 2, **g.** $\frac{1}{\pi}$, **h.** $\sqrt{2}$.$\Big]$

Příklad 1.2. Najděte následující limity

a. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\big(2\operatorname{arctg} x - \pi\big)$, **b.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin(\sin 3x)\cdot\operatorname{tg}\big(\arccos 2x\big)$.

$\Big[$**a.** -2, **b.** $\frac{3}{2}$.$\Big]$

Příklad 1.3. Najděte následující limity

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}$, **b.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\mathrm{e}^{-x} - \ln(1+2x)}$, **c.** $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{4}\pi}\big(\operatorname{tg} x\big)^{\operatorname{tg} 2x}$.

$\Big[$**a.** $\sqrt{\mathrm{e}}$, **b.** e^{-3}, **c.** e^{-1}.$\Big]$

Příklad 1.4. Najděte limity

a. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$, **b.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{cotg} x}{x}\right)$.

$\Big[$**a.** $-\frac{1}{2}$, **b.** $\frac{2}{3}$.$\Big]$

2. Intervaly monotonie a lokální extrémy funkce

<u>VĚTA.</u> Nechť má funkce $f(x)$ na otevřeném intervalu $\mathcal{I}$ derivaci.

1. Jestliže $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$, je funkce na $\mathcal{I}$ rostoucí.
2. Jestliže $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$, je funkce na $\mathcal{I}$ klesající.

<u>VĚTA.</u> Nechť $f'(x_0) = 0$ a existuje okolí $U(x_0)$ takové, že pro každé x_1, $x_2 \in U(x_0)$, kde $x_1 < x_0 < x_2$, platí:

1. $f'(x_1) > 0$ a $f'(x_2) > 0$, je funkce $f(x)$ v okolí $U(x_0)$ rostoucí;
2. $f'(x_1) > 0$ a $f'(x_2) < 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum;
3. $f'(x_1) < 0$ a $f'(x_2) > 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum;
4. $f'(x_1) < 0$ a $f'(x_2) < 0$, je funkce $f(x)$ v okolí $U(x_0)$ klesající.

<u>ŘEŠENÉ PŘÍKLADY</u>

Příklad 2.r. Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x\sqrt[3]{1-x}$.
<u>*Řešení:*</u> Funkce $f(x) = x\sqrt[3]{1-x}$ je definována na celé množině $\mathbb{R}$. Její derivace existuje pro všechna x s vyjímkou bodu $x = 1$ a je

$$f'(x) = (1-x)^{1/3} - \tfrac{1}{3}\,x(1-x)^{-2/3} = \frac{3-4x}{3(1-x)^{2/3}}\,.$$

Protože

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\text{pro} \quad x \in (-\infty, \tfrac{3}{4})\,, \\ f'(x) < 0 \quad &\text{pro} \quad x \in (\tfrac{3}{4}, 1) \cup (1, \infty)\,, \end{aligned}$$

je funkce $f(x)$ rostoucí na intervalu $(-\infty, \frac{3}{4})$ a klesající na intervalu $(\frac{3}{4}, \infty)$. V bodě $x = \frac{3}{4}$ má funkce $f(x)$ lokální maximum $f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{8}\sqrt[3]{2}$.

<u>NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY</u>

Příklad 2.1. Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

$\Big[$rostoucí na $(0, \frac{1}{2})$, klesající na $(\frac{1}{2}, 1)$, v bodě $x = \frac{1}{2}$ je lokální maximum.$\Big]$

Příklad 2.2. Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

$\big[$klesající na $\mathbb{R}$.$\big]$

Příklad 2.3. Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x+2)^2}$.

$\Big[$rostoucí na $(-\infty, -2)$ a $\big(\frac{22}{9}, +\infty\big)$, klesající na $\big(-2, \frac{22}{9}\big)$
v bodě $x = \frac{22}{9}$ je lokální minimum.$\Big]$

Příklad 2.4. Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$.

$\Big[$klasající na $\big(0, \mathrm{e}^{-2}\big)$, rostoucí na $\big(\mathrm{e}^{-2}, +\infty\big)$, v bodě $x = \mathrm{e}^{-2}$ je lokální minimum.$\Big]$

Příklad 2.5. Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$.

$\Big[$rostoucí na $\big(1, \sqrt{\mathrm{e}}\,\big)$, klesající na $\big(\sqrt{e}, +\infty\big)$, v bodě $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ je lokální maximum.$\Big]$