Cvičení 5.2.

1. Derivace a diferenciály funkce vyšších řádů

<u>Definice.</u> Nechť má funkce $f(x)$ v nějakém okolí bodu x_0 derivaci $(n-1)$–ního řádu $f^{(n-1)}(x)$. Pokud exisuje její derivace v bodě x_0, tj.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}=\big(f^{(n-1)}\big)'(x_0)=f^{(n)}(x_0)\,,$$

nazývá se n–tá derivace, neboli derivace n–tého řádu, funkce $f(x)$ v bodě x_0.
Jestliže má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci n–tého řádu, nazývá se funkce proměnné h, resp. $\mathrm{d}x$, definovaná jako

$$\mathrm{d}^n f=f^{(n)}(x_0)\,h^n\,,\qquad \text{resp.}\quad \mathrm{d}^n f=f^{(n)}(x_0)\,\mathrm{d}x^n\,,$$

n–tý diferenciál, nebo diferenciál n–tého řádu, funkce $f(x)$ v bodě x_0.

<u>Věta.</u> Jestliže mají funkce $f(x)$ a $g(x)$ diferivaci n–tého řádu, platí tzv. Leibnizova formule

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\,,\quad \text{kde}\quad f^{(0)}(x)=f(x)\quad \text{a}\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

je tzv. binomický koeficient.

Je-li $\mathbf{f}:(a,b)\to\mathbb{R}^k$, tj. $t\mapsto \mathbf{x}=\big(x_1(t),x_2(t),\dots,x_k(t)\big)$, zobrazení, je jeho n–tá derivace rovna

$$\mathbf{f}^{(n)}(t)=\big(x_1^{(n)}(t),x_2^{(n)}(t),\dots,x_k^{(n)}(t)\big)\,.$$

Speciálně když interpretujeme zobrazení $\mathbf{f}:(a,b)\to\mathbb{R}^3$, kde $t\mapsto \mathbf{x}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, jako pohyb bodu v prostoru, je jeho druhá derivace rovna vektoru zrychlení $\mathbf{a}(t)$ bodu v čase t. Vektor zrychlení bodu tedy je

$$\mathbf{a}(t)=\mathbf{x}''(t)=\big(x''(t),y''(t),z''(t)\big)\,.$$

<u>Neřešené příklady</u>

Příklad 1.1. Najděte druhé derivace následujících funkcí

a. $f(x)=x\sqrt{1+x^2}\,,$ **b**. $f(x)=x\ln x\,,$ **c**. $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\sin 3x\,,$

d. $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2},$ **e**. $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg}x\,,$ **f**. $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$

g. $f(x)=x\big(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\big)\,.$

[**a**. $f''(x)=\dfrac{x(2x^2+3)}{(1+x^2)^{3/2}}\,,$ **b**. $f''(x)=\dfrac{1}{x}\,,$
c. $f''(x)=\mathrm{e}^{2x}(12\cos 3x-5\sin 3x)\,,$ **d**. $f''(x)=2x(2x^2-3)\mathrm{e}^{-x^2},$
e. $f''(x)=2\operatorname{arctg}x+\dfrac{2x}{1+x^2}\,,$ **f**. $f''(x)=\dfrac{(1+2x^2)\arcsin x+3x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{5/2}}\,,$
g. $f''(x)=-\dfrac{2\sin(\ln x)}{x}\,.$]

Příklad 1.2. Najděte druhé diferenciály následujících funkcí

$$\text{a.}\quad f(x)=\sqrt{1+x^2}\,,\qquad \text{b.}\quad f(x)=\frac{\ln x}{x}\,,\qquad \text{c.}\quad f(x)=x^x.$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{a.}\ \ \mathrm{d}^2 f=\dfrac{\mathrm{d}x^2}{(1+x^2)^{3/2}}\,,\qquad \text{b.}\ \ \mathrm{d}^2 f=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}\,\mathrm{d}x^2,\\ \text{c.}\ \ \mathrm{d}^2 f=\big(x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}\big)\,\mathrm{d}x^2.\end{array}\right]$$

Příklad 1.3. Najděte vektor zrychlení bodu, jehož pohyb je dán parametrickými rovnicemi

$$\begin{array}{lllll}\text{a.} & x=t-\sin t\,, & y=1-\cos t\,, & & t\in\mathbb{R}\,;\\ \text{b.} & x=3\cos 4t\,, & y=3\sin 4t\,, & z=2t^2 & t\in\mathbb{R}\,;\\ \text{c.} & x=\mathrm{e}^{-2t}\cos 3t\,, & y=\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t\,, & z=t\mathrm{e}^{-2t} & t>0\,.\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{a.}\ \ \vec{a}(t)=(\sin t,\cos t)\,,\qquad \text{b.}\ \ \vec{a}(t)=(-12\sin 4t,12\cos 4t,4t)\,,\\ \text{c.}\ \ \vec{a}(t)=\mathrm{e}^{-2t}\big(12\sin 3t-5\cos 3t,-12\cos 3t-5\sin 3t,1-2t\big)\end{array}\right]$$

Příklad 1.4. Najděte $f^{(37)}(x)$, kde $f(x)=(x-1)(x-2)\sin x$.

$$\left[f^{(37)}(x)=(x^2-3x+2)\cos x+37(2x-3)\sin x-37\cdot 36\cos x\,.\right]$$

2. Konvexita funkce a její druhá derivace

<u>Věta.</u> Nechť má funkce $y=f(x)$ na otevřeném intervalu $\mathcal{I}$ derivace druhého řádu.

1. Jestliže na intervalu $\mathcal{I}$ platí $f''(x)>0$, je funkce na $\mathcal{I}$ konvexní.
2. Jestliže na intervalu $\mathcal{I}$ platí $f''(x)<0$, je funkce na $\mathcal{I}$ konkávní.

<u>Věta.</u> Nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci v nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0 a $f''(x_0)=0$. Jestliže pro každé x_1, $x_2\in U(x_0)$, kde $x_1<x_0<x_2$, platí

1. $f''(x_1)>0$ a $f''(x_2)>0$, je funkce v $U(x_0)$ konvexní;
2. $f''(x_1)<0$ a $f''(x_2)<0$, je funkce v $U(x_0)$ konkávní;
3. $f''(x_1)\,f''(x_2)<0$, je x_0 inflexní bod funkce $f(x)$.

<u>Řešené příklady</u>

Příklad 2.1.r. Najděte intervaly, na kterých je funkce $f(x)=x\sin(\ln x)$ konvexní, resp. konkávní, a určete její inflexní body.

<u>Řešení:</u> Definiční obor funkce $f(x)$ je interval $D_f=(0,\infty)$. Její druhá derivace je pro každé $x\in D_f$ rovna

$$f''(x)=\frac{\cos(\ln x)-\sin(\ln x)}{x}\,.$$

Protože $x>0$, bude funkce konvexní v intervalech, ve kterých je

$$f''(x)>0\,,\quad \text{neboli}\quad \cos(\ln x)-\sin(\ln x)>0$$

a konkávní v intervalech, kde platí

$$f''(x) < 0\,, \quad \text{neboli} \quad \cos(\ln x) - \sin(\ln x) < 0\,.$$

To znamená, že funkce $f(x) = x\sin(\ln x)$ je konvexní na intervalech $\left(e^{-3\pi/4+2k\pi}, e^{\pi/4+2k\pi}\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, a konkávní na intervalech $\left(e^{\pi/4+2k\pi}, e^{5\pi/4+2k\pi}\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Body $x_k = e^{\pi/4+k\pi}$, kde $k \in \mathbb{Z}$, jsou inflexní body funkce $f(x)$.

Neřešené příklady

Příklad 2.1. Najděte intervaly, na kterých jsou následující funkce konvexní, resp. konkávní, a určete jejich inflexní body:

a. $f(x) = e^{-x^2}$, **b**. $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$, **c**. $f(x) = \ln\sqrt{x^2+2x+5}\,$.

[**a**. konvexní v intervalech $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
konkávní v intervalu $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
inflexní body $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
b. konkávní v intervalu $(0, 9)$
konkávní v intervalu $(9, +\infty)$
inflexní bod $x = 9$.
c. konkávní v intervalech $(-\infty, -3)$ a $(1, +\infty)$
konvexní v intervalu $(-3, 1)$
inflexní body $x = -3$ a $x = 1$.]