Cvičení 6.1.

1. Taylorův polynom funkce jedné proměnné

<u>Definice.</u> Nechť má funkce $f(x)$ v bodě a derivci n–tého řádu. Pak se polynom

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

nazývá Taylorův polynom n–tého stupně funkce $f(x)$ se středem v bodě a.

<u>Věta.</u> Má-li funkce na intervalu (a,b) derivaci n–tého řádu, která je spojitá v bodě a, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0\,, \quad \text{kde} \quad R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

je zbytek v Taylorově polynomu.
Pokud má funkce $f(x)$ na intervalu (a,x) derivaci řádu $(n+1)$, existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

<u>Řešené příklady</u>

Příklad 1.r. Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \sin(\sin x)$ se středem v bodě $a = 0$.

<u>*Řešení:*</u> První tři derivace funkce $f(x)$ jsou

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\sin x)\,\cos x\,, \\ f''(x) &= -\sin(\sin x)\,\cos^2 x - \cos(\sin x)\,\sin x\,, \\ f'''(x) &= -\cos(\sin x)\,\cos^3 x + 3\sin(\sin x)\,\cos x \sin x - \cos(\sin x)\,\cos x\,. \end{aligned}$$

A protože

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) = 1\,, \qquad f''(0) = 0\,, \qquad f'''(0) = -2\,,$$

je Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \sin(\sin x)$ se středem v bodě $a = 0$ roven

$$T_3(x) = x - \tfrac{1}{3}\,x^3.$$

<u>Neřešené příklady</u>

Příklad 1.1. Najděte Taylorův polynom se středem v bodě $a = -1$ funkce $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$.

$$\Big[T(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3.\Big]$$

Příklad 1.2. Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = x^x$ se středem v bodě $a = 1$.

$$\Big[T_3(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \tfrac{1}{2}\,(x-1)^3.\Big]$$

Příklad 1.3. Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce

$$f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$$

se středem v bodě $a = 0$. $\left[T_2(x) = \frac{1}{6}\,x^2.\right]$

Příklad 1.4. Najděte Taylorovy polynomy druhého stupně funkce $f(x) = x^3+4x^2-3x+4$ se středem v bodech, ve kterých je derivace funkce $f(x)$ rovna nule.

$$\left[\begin{array}{ll} T_2(x) = 22 - 5(x-3)^2 & \text{v bodě } a = -3. \\ T_2(x) = \frac{94}{27} + 5\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 & \text{v bodě } a = \frac{1}{3}. \end{array}\right]$$

2. Derivace funkce vyššího řádu a lokální extrémy funkce

<u>Věta.</u> Nechť je $f'(a) = 0$ a funkce $f(x)$ má v okolí bodu a derivaci druhého řádu. Pokud je:

1. $f''(a) > 0$, má funkce $f(x)$ v bodě a lokální minimum;
2. $f''(a) < 0$, má funkce $f(x)$ v bodě a lokální maximum.

Pokud je $f''(a) = 0$ nelze pomocí druhé derivace rozhodnout, je-li v bodě a lokální extrém.

<u>Neřešené příklady</u>

Příklad 2.1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

$\left[\text{v bodě } x = 1 \text{ je lokální maximum } f(1) = \frac{1}{4}\,\pi - \frac{1}{2}\,\ln 2\,.\right]$

Příklad 2.2. Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos x$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{v bodech } x_k = -\frac{1}{4}\,\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ jsou lokální maxima } f(x_k) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/4-2k\pi}, \\ \text{v bodech } y_k = \frac{3}{4}\,\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ jsou lokální minima } f(y_k) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-3\pi/4-2k\pi}. \end{array}\right]$$

Příklad 2.3. Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\,\cos 2x$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{v bodech } x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ jsou lokální minima } f(x_k) = -\frac{1}{2} - (-1)^k, \\ \text{v bodech } y_k = \frac{1}{3}\,\pi + 2k\pi \text{ a } z_k = -\frac{1}{3}\,\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ jsou lokální maxima} \\ \hfill f(y_k) = f(z_k) = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right). \end{array}\right]$$

3. Globální extrémy spojité funkce na kompaktním intervalu

<u>Věta.</u> Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na omezeném a uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak existují body $x_{\min}, x_{\max} \in \langle a, b\rangle$ takové, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f\bigl(x_{\min}\bigr) \le f(x) \le f\bigl(x_{\max}\bigr)$.

Jinými slovy, pro funkci spojitou na uzavřeném, omezeném intervalu existují v tomto intervalu body, ve kterých dosahuje funkce nejmenší a největší hodnoty, tj. má na tomto intervalu minimum a maximum.

Pokud má funkce v bodě $\xi \in (a, b)$ nenulovou derivaci, nemá v tomto bodě extrém. Tedy extrém může být pouze v následujících bodech:

1. V krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$, tj. v bodech $x = a$ nebo $x = b$;

2. Ve vnitřích bodech intervalu, ve kterých je derivace funkce $f(x)$ rovna nule, tj. v bodech $\xi \in (a, b)$, ve kterých je $f'(\xi) = 0$;
3. Ve vntřních bodech intervalu, ve kterých derivace funkce $f(x)$ neexistuje, tj. v bodech $\xi \in (a, b)$, ve kterých nemá funkce $f(x)$ derivaci.

Řešené příklady

Příklad 3.r. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = |x|\mathrm{e}^{-|x-1|}$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$.

Řešení: Protože se ve funkci $f(x)$ vyskytují absolutní hodnoty, pokusíme se napsat její předpis na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ bez nich. Tak dostaneme

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x\mathrm{e}^{x-1} & \text{pro} \quad x \in \langle -2, 0\rangle\,, \\ f_2(x) = x\mathrm{e}^{x-1} & \text{pro} \quad x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ f_3(x) = x\mathrm{e}^{-x+1} & \text{pro} \quad x \in \langle 1, 2\rangle\,, \end{cases}$$

a budeme hledat její extrémy všech třech intervalech.

Na intervalu $(-2, 0)$ je

$$f'(x) = f_1'(x) = \big(-1 - x\big)\mathrm{e}^{x-1}\,.$$

Rovnice $f'(x) = 0$ má na intervalu $(-2, 0)$ jediné řešení $x = -1$. Největší a nejmenší hodnotu může proto nabývat v bodech $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ nebo $x_3 = 0$.

Na intervalu $(0, 1)$ je

$$f'(x) = f_2'(x) = \big(1 + x\big)\mathrm{e}^{x-1}\,.$$

Rovnice $f'(x) = 0$ nemá na intervalu $(0, 1)$ žádné řešení. Největší a nejmenší hodnotu může proto nabývat v bodech $x_3 = 0$ nebo $x_4 = 1$.

Na intervalu $(1, 2)$ je

$$f'(x) = f_3'(x) = \big(1 - x\big)\mathrm{e}^{-x+1}\,.$$

Rovnice $f'(x) = 0$ nemá na intervalu $(1, 2)$ žádné řešení. Největší a nejmenší hodnotu může proto nabývat v bodech $x_4 = 1$ nebo $x_5 = 2$.

Tedy funkce $f(x)$ nabývá na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ nejmenší a největší hodnotu v jednom z bodů $x_1, \ldots, x_5$. Protože

$$f(-2) = 2\mathrm{e}^{-3}\,, \qquad f(-1) = \mathrm{e}^{-2}\,, \qquad f(0) = 0\,, \qquad f(1) = 1\,, \qquad f(2) = 2\mathrm{e}^{-1}$$

A největší z těchto hodnot je $f(1) = 1$ a nejmenší je $f(0) = 0$, je největší hodnota funkce $f(x) = |x|\mathrm{e}^{-|x-1|}$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ rovna $f_{\max} = f(1) = 1$ a nejmenší hodnota je $f_{\min} = f(0) = 0$.

Neřešené příklady

Příklad 3.1. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{(x-2)^2}$ na intervalu $\langle -4, 1\rangle$.

$\left[\text{největší hodnota je } f_{\max} = f(1) = 8, \text{ nejmenší hodnota je } f_{\min} = f\left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{1}{15}.\right]$

Příklad 3.2. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = (x+1)^2 \mathrm{e}^{|x-1|}$ na intervalu $\langle -2, 3\rangle$.

$\left[\text{největší hodnota je } f_{\max} = f(3) = 16\mathrm{e}^2, \text{ nejmenší hodnota je } f_{\min} = f(-1) = 0.\right]$

Příklad 3.3. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x + |\sin 2x|$ na intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$.

$$\begin{bmatrix} \text{největší hodnota je } f_{\max} = f(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \\ \text{nejmenší hodnota je } f_{\min} = f(-\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\pi. \end{bmatrix}$$

4. Slovní úlohy na extrémy funkce

Neřešené příklady

Příklad 4.1. Pro které kladné číslo x je jeho rozdíl s jeho druhou odmocninou nejmenší?

$\left[x_{\min} = \frac{1}{4}.\right]$

Příklad 4.2. Najděte čísla x, $y \in \langle 0, 1\rangle$, taková, že $x + y = 1$, pro která je výraz x^2y^3 největší.

$\left[x_{\max} = \frac{2}{5}, \quad y_{\max} = \frac{3}{5}.\right]$

Příklad 4.3. Který obdélník vepsaný do půlkruhu s poloměrem R má největší obsah?

$\left[\text{strana obdélníka } a_{\max} = \sqrt{2}\,R \text{ (leží na průměru) a } b_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,R.\right]$

Příklad 4.4. Který válec má při daném objemu V nejmenší povrch?

$\left[\text{válec má výšku } v_{\max} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}V} \text{ a poloměr } r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}V} = \frac{1}{2}v_{\max}.\right]$

Příklad 4.5. Najděte pravoúhlý trojúhelník, ve kterém je součet přepony a jedné odvěsny roven tři a který má největší obsah.

$\left[\text{trojúhelník má odvěsny } a_{\max} = 1,\ b_{\max} = \sqrt{3} \text{ a přeponu } c_{\max} = 2.\right]$