Cvičení 7.1.

1. Nadroviny v $\mathbb{R}^n$

Přímka, která je rovnoběžná s nenulovým vektorem $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a prochází bodem $A = [a_1; a_2; \ldots; a_n]$ má parametrické rovnice

$$X = A + \mathbf{v}t\,, \quad \text{kde} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

neboli v souřadnicích

$$x_k = a_k + v_k t\,, \quad \text{kde} \quad t \in \mathbb{R}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Přímka, která prochází body $A = [a_1; a_2; \ldots; a_n]$ a $B = [b_1; b_2; \ldots; b_n]$ je rovnoběžná s vektorem

$$\mathbf{v} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)\,,$$

a tedy má parametrické rovnice

$$X = A + (B - A)t\,, \quad \text{neboli} \quad x_k = a_k + (b_k - a_k)t\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \quad \text{kde} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Úsečka z bodu $A = [a_1; a_2; \ldots; a_n]$ do bodu $B = [b_1; b_2; \ldots; b_n]$ má parametrické rovnice

$$X = A + (B - A)t\,, \quad \text{neboli} \quad x_k = a_k + (b_k - a_k)t\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \quad \text{kde} \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Rovina (tj. 2–rozměrná nadrovina) v $\mathbb{R}^n$, která je rovnoběžná se dvěma lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a prochází bodem $A = [a_1; a_2; \ldots; a_n]$, má parametrické rovnice

$$X = X + \mathbf{u}s + \mathbf{v}t\,, \quad \text{kde} \quad s,\, t \in \mathbb{R}$$

nebo pomocí souřadnic

$$x_k = a_k + u_k s + v_k t\,, \quad s,\, t \in \mathbb{R}\,, \quad \text{kde} \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Speciálně v $\mathbb{R}^3$ jsou parametrické rovnice roviny

$$x = a_x + u_x s + v_x t\,, \quad y = a_y + u_y s + v_y t\,, \quad z = a_z + u_z s + v_z t\,, \quad \text{kde} \quad s,\, t \in \mathbb{R}\,.$$

k–rozměrná nadrovina v $\mathbb{R}^n$, která je rovnoběžná s lineárně nezávislými vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$ a prochéází bodem A, má parametrické rovnice

$$X = A + \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{v}_k t_k\,, \quad \text{kde} \quad t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_k \in \mathbb{R}\,.$$

Každý nenulový vektor $\mathbf{N}$, který je kolmý ke všem vektorům $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$, které zadávají k–rozměrnou nadrovinu $\mathcal{L}$ v $\mathbb{R}^n$, se nazývá normálový vektor k nadrovině $\mathcal{L}$.

To znamená, že $\mathbf{N}$ je normálový vektor, když pro každý vektor $\mathbf{v}_i$, kde $i = 1, \ldots, k$, je skalární součin $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}_i = 0$.

Jestliže nadrovina $\mathcal{L}$ prochází bodem $A = [a_1; a_2; \ldots; a_n]$ a $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$ je její normálový vektor vektor, platí pro každý bod $X = [x_1; x_2; \ldots; x_n]$ nadroviny $\mathcal{L}$

$$\mathbf{N} \cdot (X - A) = N_1(x_1 - a_1) + N_2(x_2 - a_2) + \ldots + N_n(x_n - a_n) = 0\,.$$

Ke k–rozměrné nadrovině $\mathcal{L}$ v $\mathbb{R}^n$ existuje právě $(n-k)$ lineárně nezávislých normálových vektorů $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, …, $\mathbf{N}_{n-k}$. Jestliže jsou $\mathbf{N}_i$, $i = 1, \ldots, n-k$, lineárně nezávislé normálové vektory ke k–rozměrné nadrovině $\mathcal{L}$ v $\mathbb{R}^n$ a bod A je prvkem nadroviny $\mathcal{L}$, lze nadrovinu $\mathcal{L}$ popsat jako množinu všech řešení $X = [x_1; x_2; \ldots; x_n]$ soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{N}_i \cdot (X - A) = 0\,, \quad \text{kde} \quad i = 1, 2, \ldots, n-k\,.$$

Speciálně pro plochu $\mathcal{S}$ v třírozměrném prostoru, tj. pro 2–rozměrnou nadrivinu v $\mathbb{R}^3$, existuje až na násobek jeden normálový vektor k rovině $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Proto můžeme rovinu v $\mathbb{R}^3$, která kolmá na vektor $\mathbf{n}$ a prochází bodem $A = [a_x; a_y; a_z]$ popsat rovnicí

$$\mathbf{n} \cdot (X - A) = n_x(x - a_x) + n_y(y - a_y) + n_z(z - a_z) = 0\,.$$

Jestliže je rovina rovnoběžná s lineárně nezávislými vektora $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, lze najít normálový vektor pomocí vektorového součinu

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{u}\,.$$

K přímce existují v třírozměrném prostoru právě dva lineárně nezávislé normálové vektory $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$. Pomocí nich lze v prostoru $\mathbb{R}^3$ popsat přímku, která prochází bodem A, jako množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\mathbf{n}_1 \cdot (X - A) = 0\,, \qquad \mathbf{n}_2 \cdot (X - A) = 0\,.$$

Vektor $\mathbf{v}$, který je rovnoběžný s přímku, která má lineárně nezávislé normálové vektory $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$, lze najít pomocí vektorového součinu

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 1.1. Najděte parametrické rovnice úsečky z bodu $A = [1, 2, 3, 4, 5]$ do bodu $B = [-2, 9, 0, -1, 3]$. $\Big[\mathbf{x}(t) = \big(1 - 3t, 2 + 7t, 3 - 3t, 4 - 5t, 5 - 2t\big), \quad t \in \mathbb{R}\,.\Big]$

Příklad 1.2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ najděte parametrické rovnice roviny $\mathcal{P}$, ve které leží body $A = [0, 2, -1, 3]$, $B = [4, 3, -2, 0]$ a vektor $\mathbf{v} = (2, 1, 0, 1)$.
$\Big[\mathbf{x}(s, t) = \big(4s + 2t, 2 + s + t, -1 - s, 3 - 3s + t\big), \quad s, t \in \mathbb{R}\,.\Big]$

Příklad 1.3. Najděte vektor normály a parametrické rovnice nadroviny $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$, která je dána rovnicí $2x_1 - x_3 + x_4 = 3$. $\Big[\mathbf{N} = (2, 0, -1, 1)\,.\Big]$

Příklad 1.4. Najděte vektor normály a soustavu lineárních rovnic, které definují rovinu danou parametrickými rovnicemi

$$x_1 = 1 + t_1 + 3t_2\,, \qquad x_2 = 3 - t_1 + t_2\,, \qquad x_3 = 4 + 2t_1 - t_2\,.$$

$$\Big[\mathbf{N} = (-1, 7, 4)\,, \quad -(x - 1) + 7(y - 3) + 4(z - 4) = 0\,.\Big]$$

Příklad 1.5. Najděte parametrické rovnice a normálové vektory k nadrovině $\mathcal{L}_2 \subset \mathbb{R}^4$, která je dána rovnicemi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \qquad \text{a} \qquad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5\,.$$

$$\left[\text{například} \quad \begin{matrix} \mathbf{x}(s,t) = \big(s + 2t, -6 + 2s, -t, 7 - 3s - t\big)\,, \quad s,\, t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{N}_1 = (1,1,1,1)\,, \quad \mathbf{N}_2 = (1,-2,3,-1)\,. \end{matrix}\right]$$

2. Kuželosečky v $\mathbb{R}^2$

Kvadratické rovnice v proměnných x a y, tj. rovnice

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\,, \quad \text{kde} \quad a,\, b,\, \dots,\, f \in \mathbb{R}\,,$$

popisují kuželosečky v rovině xy. My se ve cvičení nebudeme zabývat obecnou rovnicí, ale uvedeme pouze některé jednoduché příklady.

Rovnice

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,,$$

kde x_0, y_0, a a b jsou reálná čísla, popisují elipsu se středem v bodě $S[x_0; y_0]$, polosou délky $a > 0$ ve směru osy x a poloosou délky $b > 0$ ve směru osy y.

Jestliže je $a = b = R > 0$, popisuje tato rovnice kružnice se středem v bodě $S = [x_0; y_0]$ a poloměrem R.

Rovnice

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,,$$

kde x_0, y_0, a a b jsou reálná čísla, popisují hyperbolu se středem v bodě $S[x_0; y_0]$, hlavní polosou délky $a > 0$ ve směru osy x a vedlejší poloosou délky $b > 0$ ve směru osy y.

Rovnice

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1\,,$$

kde x_0, y_0, a a b jsou reálná čísla, popisují hyperbolu se středem v bodě $S[x_0; y_0]$, vedlejší polosou délky $a > 0$ ve směru osy x a hlavní poloosou délky $b > 0$ ve směru osy y.

Hyperboly popsané rovnicemi

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1$$

mají za asymptoty dvojici přímek

$$\frac{x - x_0}{a} - \frac{y - y_0}{b} = 0\,, \quad \text{a} \quad \frac{x - x_0}{a} + \frac{y - y_0}{b} = 0\,.$$

Tuto dvojici přímek je možné pospat pomocí rovnice

$$\left(\frac{x - x_0}{a} - \frac{y - y_0}{b}\right)\left(\frac{x - x_0}{a} + \frac{y - y_0}{b}\right) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 0\,.$$

Řešené příklady

Příklad 2.1.r. Nakreslete množinu M všech bodů $[x;y]$, pro které platí

$$2x^2 - y^2 + 4x - 6y + 3 = 0\,.$$

Řešení: Když rovnici upravíme na tvar

$$\begin{aligned}2x^2 - y^2 + 4x + 6y + 3 &= 2(x^2+2x) - (y^2 - 6y) + 3 = \\ &= 2(x+1)^2 - 2 - (y-3)^2 + 9 + 3 = 2(x+1)^2 - (y-3)^2 + 10 = 0\,,\end{aligned}$$

je vidět, že jde o křivku, popsanou rovnicí

$$\frac{(x+1)^2}{5} - \frac{(y-3)^2}{10} = -1\,,$$

což je hyperbola se středem v bodě $S = [-1,3]$, hlavní poloosou $a = \sqrt{10}$ ve směru osy y a vedlejší poloosou $b = \sqrt{5}$ ve směru osy x.

Příklad 2.2.r. Nakreslete množinu M všech bodů $[x;y]$, pro které platí

$$2x^2 - y^2 + 4x - 6y - 7 = 0\,.$$

Řešení: Stejně jako v předcházejícím příkladě dostaneme rovnici

$$2(x+1)^2 - (y-3)^2 = 0\,.$$

Jestliže napíšeme tento vztah ve tvaru

$$2(x+1)^2 - (y-3)^2 = \big(\sqrt{2}\,x + \sqrt{2} - y + 3\big)\big(\sqrt{2}\,x + \sqrt{2} + y - 3\big) = 0\,,$$

je vidět, že se jedná o dvojici přímek

$$\sqrt{2}\,x - y + 3 + \sqrt{2} = 0 \qquad \text{a} \qquad \sqrt{2}\,x + y - 3 + \sqrt{2} = 0\,.$$

Příklad 2.3.r. Nakreslete množinu M všech bodů $[x;y]$ v rovině, pro které platí

$$3x^2 + 4y^2 - x + 8y + 2 < 0\,.$$

Řešení: Nejprve určíme hranici množiny M, tj. množinu všech bodů, pro které platí

$$3x^2 + 4y^2 - x + 8y + 2 = 0\,.$$

Postupně dostaneme

$$\begin{aligned}3x^2 + 4y^2 - x + 8y + 2 &= 3\big(x^2 - \tfrac{1}{3}x\big) + 4\big(y^2 + 2y\big) + 2 = \\ &= 3\big(x - \tfrac{1}{6}\big)^2 - \tfrac{3}{36} + 4\big(y+1\big)^2 - 4 + 2 = 3\big(x - \tfrac{1}{6}\big)^2 + 4\big(y+1\big)^2 - \tfrac{25}{12} = 0\,.\end{aligned}$$

Tedy hranice množiny M je dána rovnicí

$$\frac{36}{25}\left(x - \tfrac{1}{6}\right)^2 + \frac{48}{25}\left(y+1\right)^2 = 1\,.$$

To je elipsa se středem v bodě $S = \left[\frac{1}{6}, -1\right]$ a poloosami $a = \frac{5}{6}$ a $b = \frac{5}{4\sqrt{3}}$.

Protože střed S elipsy leží v množině M, jde o vnitřek této elipsy.

3. Další příklady množin v $\mathbb{R}^2$

Neřešené příklady

Příklad 3.1. Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \arcsin\dfrac{y}{x} + \arccos(1-y)$.

$$\Big[0 \le y \le 2,\ y \le |x| \text{ a } x \ne 0.\Big]$$

Příklad 3.2. Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \left(\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}\right)^{xy}$.

$$\Big[\text{mezikruží } k\pi < \sqrt{x^2+y^2} < \tfrac{1}{2}(2k+1)\pi,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ ,\dots\Big]$$

Příklad 3.3. Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \ln\left(\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

$$\Big[\text{polorovina } y > 0.\Big]$$

Příklad 3.4. Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{y-x}}$.

$$\Big[0 < x \le y \ \text{ nebo } \ x \le y < 0\,.\Big]$$

Příklad 3.5. Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{\cos\dfrac{\pi x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$.

$$\Big[\sqrt{3}\,|x| \le |y| \text{ bez bodu } [0;0].\Big]$$

Příklad 3.6. Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \ln\left(\sin\dfrac{\pi y}{x^2+y^2}\right)$.

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4} \text{ a } y > 0 \text{ nebo} \\ x^2 + \left(y-\frac{1}{4k}\right)^2 < \frac{1}{16k^2} \text{ a } x^2 + \left(y - \frac{1}{2(2k+1)}\right)^2 > \frac{1}{4(2k+1)^2},\ k \in \mathbb{N} \text{ nebo} \\ x^2 + \left(y+\frac{1}{4k}\right)^2 > \frac{1}{16k^2} \text{ a } x^2 + \left(y + \frac{1}{2(2k-1)}\right)^2 < \frac{1}{4(2k-1)^2},\ k \in \mathbb{N}. \end{array}\right]$$

Příklad 3.7. Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \left(\arcsin\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)^x$.

$$\Big[\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \tfrac{1}{4} \text{ a } x > 0.\Big]$$

Příklad 3.8. Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \arccos\dfrac{3x+2y+1}{y^2}$.

$$\Big[-\tfrac{1}{3}\,(y+1)^2 \le x \le \tfrac{1}{3}\,(y-1)^2 - \tfrac{2}{3} \text{ a } y \ne 0.\Big]$$

Příklad 3.9. Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \ln\left(1 - \dfrac{x+y+1}{x^2}\right)$.

$$\Big[y + \tfrac{5}{4} < \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2, \quad x \ne 0\,.\Big]$$

4. Vrstevnice

Plochy $S \subset \mathbb{R}^3$ se často zadávají jako řešení rovnic $F(x,y,z) = 0$ (srovnejte s vyjádřením roviny). Abychom si udělali jistou představu o tvaru takových ploch, zkoumáme křivky, které jsou průniky plochy S a rovin $z = h$. Tyto křivky (přesněji kolmé průměty těchto křivek do roviny xy) se nazývají *vrstevnice* a používají se v mapách. Je zřejmé, že rovnice vrstevnice ve výšce $z = h$ je $F(x,y,h) = 0$.

Řešené úlohy

Příklad 4.1.r. Najděte vrstevnice plochy $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}$.

Řešení: Vrstevnici ve výšce $z = h$ je dána rovnicí

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} = h\,. \tag{1}$$

Protože je obor hodnot funkce $\operatorname{arctg} x$ interval $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$, vrstevnice pro $|h| \ge \frac{1}{2}\pi$ neexistují.

Pro $h \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ označme $\operatorname{tg} h = H$. Rovnice (1) je pak ekvivalentní rovnici

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} = H\,. \tag{2}$$

Z této rovnice plyne vztah

$$x = H\sqrt{x^2+2y^2} \implies (H^2-1)x^2 + 2H^2y^2 = 0\,.$$

Pro $|H| > 1$, tj. $|h| > \frac{1}{4}\pi$, plyne z této rovnice $x = y = 0$, ale tento bod není v definičním oboru. Proto je i v tomto případě vrstevnice prázdná množina.

Pro $H = 1$, tj. $h = \frac{1}{4}\pi$, dostaneme $y = 0$ a z (2) dostaneme jako vrstevnici polopřímku $y = 0$, $x > 0$.

Podobně pro $H = -1$, tj. $h = -\frac{1}{4}\pi$, dostaneme $y = 0$ a z (2) dostaneme jako vrstevnici polopřímku $y = 0$, $x < 0$.

Pro $0 < |H| < 1$ dostaneme rovnici

$$(1-H^2)x^2 - 2H^2y^2 = \left(\sqrt{1-H^2}\,x - \sqrt{2}\,Hy\right)\left(\sqrt{1-H^2}\,x + \sqrt{2}\,Hy\right) = 0\,,$$

což je rovnice dvojice přímek

$$\sqrt{1-H^2}\,x - \sqrt{2}\,Hy = 0 \quad \text{a} \quad \sqrt{1-H^2}\,x + \sqrt{2}\,Hy = 0\,.$$

Pro $0 < H < 1$, tj. $h \in \left(0, \frac{1}{4}\pi\right)$ jsou vrstevnice dvojice polopřímek

$$\sqrt{1-H^2}\,x - \sqrt{2}\,Hy = 0 \quad \text{a} \quad \sqrt{1-H^2}\,x + \sqrt{2}\,Hy = 0\,, \qquad x > 0$$

a pro $-1 < H < 0$, tj. $-\frac{1}{4}\pi < h < 0$ jsou vrstevnice dvojice polopřímek

$$\sqrt{1-H^2}\,x - \sqrt{2}\,Hy = 0 \quad \text{a} \quad \sqrt{1-H^2}\,x + \sqrt{2}\,Hy = 0\,, \qquad x < 0\,.$$

Konečně pro $H = 0$ dostaneme $x^2 = 0$, tj. $x = 0$. Proto je vrstevnice pro $h = 0$ přímka $x = 0$ bez bodu $P = [0,0]$.

NEŘEŠENÉ ÚLOY

Příklad 4.1. Sestrojte vrstevnice plochy $z = \dfrac{2x+y+1}{x^2+y^2}$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{pro } h=0 \text{ rovina } 2x+y+1=0.\\ \text{pro } h<-\frac{5}{4} \text{ prázdná množina,}\\ \text{pro } h=-\frac{5}{4} \text{ bod } \left[-\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\right],\\ \text{pro } h>-\frac{5}{4},\ h\neq 0 \text{ kružnice } \left(x-\frac{1}{h}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2h}\right)^2=\frac{4h+5}{4h^2}.\end{array}\right]$$

Příklad 4.2. Sestrojte vrstevnice plochy $z = \mathrm{e}^{x^2-y^2+2x-y}$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{pro } h\leq 0 \text{ prázdná množina,}\\ \text{pro } h=\mathrm{e}^{3/4} \text{ dvojice přímek } x+y=\frac{1}{2} \text{ a } x-y=\frac{3}{2},\\ \text{pro } h>0,\ h\neq \mathrm{e}^{3/4} \text{ hyperboly } \left(x-1\right)^2-(y+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}-\ln h.\end{array}\right]$$

Příklad 4.3. Sestrojte vrstevnice plochy $z = \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{pro } h<0 \text{ a } h>\pi \text{ prázdná množina,}\\ \text{pro } h=\frac{1}{2}\pi \text{ přímka } x=0 \text{ bez bodu } [0;0].\\ \text{pro } 0\leq h\leq\pi,\ h\neq\frac{1}{2}\pi \text{ kružnice } \left(x-\frac{1}{2\cos h}\right)^2+y^2=\frac{1}{4\cos^2 h}.\end{array}\right]$$

Příklad 4.4. Sestrojte vrstevnice plochy $z = \ln \dfrac{x+y}{x^2}$.

$$\left[\text{parabola } \left(x-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-h}\right)^2=\mathrm{e}{-}h\left(y+\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-h}\right).\right]$$

Příklad 4.5. Sestrojte vrstevnice plochy $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{pro } h\leq-\frac{1}{2}\pi \text{ a } h\geq\frac{1}{2}\pi \text{ prázdná množina,}\\ \text{pro } h=0 \text{ přímka } x=y \text{ bez bodu } [0;0].\\ \text{pro } -\frac{1}{2}\pi<h<\frac{1}{2}\pi,\ h=0 \text{ kružnice } \left(x-\frac{1}{2\operatorname{arctg} h}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2\operatorname{arctg} h}\right)^2=\frac{1}{2\operatorname{arctg}^2 h}.\end{array}\right]$$

Příklad 4.6. Sestrojte vrstevnice plochy $z = \ln \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$.

$$\left[\text{části hyperbol } \left(x-\mathrm{e}^{-h}\right)\left(y-\mathrm{e}^{-h}\right)=\mathrm{e}^{-2h}, \text{ které leží v oblasti } \tfrac{x+y}{xy}>0.\right]$$

Příklad 4.7. Sestrojte vrstevnice plochy $z = \ln \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

$$\left[\text{kružnice } \left(x-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-h}\right)^2+y^2=\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-h}.\right]$$

Válcové plochy s osou z

Pomocí vrstevnic lze v některých případech poznat tvar plochy $S\subset\mathbb{R}^3$ dané rovnicí $F(x,y,z)=0$. Například jestliže vrstevnice pro $z=h$ jsou pro všechna h stejné křivky C, vzniká plocha S posouváním křivky C podél osy z. V takovém případě většinou nezávisí funkce $F(x,y,z)$ na proměnné z. Takové plochy se nazývají *válcové plochy* nebo *válce* s osou z. Například plocha $S\subset\mathbb{R}^3$ daná rovnicí

$$x^2-4y^2+2x=0$$

není hyperbola, ale hyperbolický válec, který vznikne posouváním hyperboly

$$(x+1)^2 - 4y^2 = 1$$

podél osy z.

`Poznámka.` Obecně není pravda, že pokud rovnice $F(x,y,z) = 0$ určuje válcovou plochu s osou z, nezávisí funkce $F(x,y,z)$ na proměnné z. Jako příklad uvedu rovince

$$F_1(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 2x = 0 \quad \text{a} \quad F_2(x,y,z) = \bigl(x^2 - 4y^2 + 2x\bigr)\bigl(z^2+1\bigr) = 0\,,$$

který určují stejný hyperbolický válec.

Kuželové plochy

Jestliže jsou pro $h > 0$ vrstevnice dány rovnicí $\varphi\Bigl(\dfrac{x}{h}, \dfrac{y}{h}\Bigr) = 0$, je

$$F(x,y,z) = 0 \;\equiv\; F\Bigl(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\Bigr) = \varphi\Bigl(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\Bigr) = 0$$

a jedná se o tzv. *kuželové plochy* s vrcholem v počátku soustavy souřadnic. Tyto plochy vznikají tak, že je v rovině $z = 1$ dána křivka $\varphi(x,y) = 0$ a plocha je tvořena polopřímkami, které spojují počátek souřadnic s body této křivky. Například plocha daná rovnicí

$$x^2 + y^2 + 2yz = 0\,, \quad z > 0\,, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 2\,\frac{y}{z} = 0\,, \quad z > 0$$

je tvořena polopřímkami, které začínají v počátku souřadnic a procházejí body kružnice

$$x^2 + (y+1)^2 = 1\,, \quad z = 1\,.$$

Rotační plochy

Další zajímavé plochy, které se budou často objevovat v příkladech, jsou plochy, jejiž vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku (nebo prázdné množiny). Rovnice takových ploch má většinou tvar $F(x,y,z) = f\bigl(\sqrt{x^2+y^2}, z\bigr) = 0$. Takové plochy vznikají rotací křivky

$$f(x,z) = 0\,, \qquad x \geq 0\,,$$

kolem osy z a nazývají se *rotační plochy* s osou rotace z. Například plocha daná rovnicí

$$3x^2 + 3y^2 + 2z\sqrt{x^2+y^2} - z^2 = 0$$

je rotační plocha, která vzniká rotací křivky

$$3x^2 + 2zx - z^2 = 0\,, \qquad x \geq 0\,,$$

tj. polopřímek $z = 3x$ a $z = -x$, $x \geq 0$, kolem osy z. Je tedy tvořena dvěmi kužely.

Další informace o plochách lze získat tak, že budeme podobně jako vrstevnice zkoumat průniky plochy s rovinami $x = x_0$ a $y = y_0$.