Cvičení 7.2.

1. Tečna ke křivce dané parametricky

Jestliže jsou $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, kde $a < t < b$, tj.

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t)\,, \quad \text{kde} \quad t \in (a, b)$$

parametrické rovnice křivky $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ a $t_0 \in (a, b)$, je vektor

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}'(t_0) = \big(x'(t_0).y'(t_0), z'(t_0)\big)$$

tečný vektor ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\mathbf{x}_0 = \big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big)$.

Tedy parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\mathbf{x}_0$ jsou

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{t}\,s\,, \qquad s \in \mathbb{R}\,,$$

neboli v souřadnicích

$$x = x(t_0) + x'(t_0)\,s\,, \quad y = y(t_0) + y'(t_0)\,s\,, \quad z = z(t_0) + z'(t_0)\,s\,, \qquad s \in \mathbb{R}\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 1.1. Nechť je křivka $\mathcal{C}$ definována parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x}(t) = \big(2\cos^2 \pi t, 4\cos \pi t\, \sin \pi t, 4t^2\big)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Najděte její tečnu v bodě, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{1}{4}$.

[paramterické rovnice tečny jsou $\mathbf{x}(t) = \big(1 - \pi t, 2, \frac{1}{4} + t\big)$, $t \in \mathbb{R}$.]

Příklad 1.2. Nechť je křivka $\mathcal{C}$ definována parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x}(t) = \Big(\ln\big(t + \sqrt{1+t^2}\big), \sqrt{1-t^2}\,\arccos t, (1+2t)^{\cos t}\Big)\,, \quad t \in (-\tfrac{1}{2}, 1)\,.$$

Najděte její tečnu v bodě, který odpovídá hodnotě parametru $t = 0$.

[paramterické rovnice tečny jsou $\mathbf{x}(t) = \big(t, \frac{1}{2}\pi - t, 1 + 2t\big)$, $t \in \mathbb{R}$.]

2. Tečná rovina k ploše dané parametrickými rovnicemi

Řešený příklad

Příklad 2.1.r. Nechť je v $\mathbb{R}^3$ dána plocha $\mathcal{S}$ parametrickými rovnicemi $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \varphi)$

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = \varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

a její bod A, pro který je $r = 2$ a $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, tj. $A = \big[1; \sqrt{3}; \frac{1}{3}\pi\big]$.

Křivka $\mathcal{C}_1$ s parametrickými rovnicemi $\mathbf{x}_1(\varphi) = \mathbf{x}\big(2, \varphi\big)$, tj.

$$x = 2\cos\varphi\,, \quad y = 2\sin\varphi\,, \quad z = \varphi\,, \qquad \varphi \in \mathbb{R}\,,$$

leží v ploše $\mathcal{S}$ a prochází bodem A (pro $\varphi = \frac{1}{3}\pi$). Její tečný vektorr v bodě A je

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_1}{\mathrm{d}\varphi}\big(\tfrac{1}{3}\pi\big) = \big(-\sqrt{3}, 1, 1\big)\,.$$

Křivka $\mathcal{C}_2$ s parametrickými rovnicemi $\mathbf{x}_2(r) = \mathbf{x}\big(r, \frac{1}{3}\pi\big)$, tj.

$$x = \tfrac{1}{2}\,r,\,, \quad y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,r\,, \quad z = \tfrac{1}{3}\pi\,, \qquad r > 0\,,$$

leží v ploše $\mathcal{S}$ a prochází bodem A (pro $r = 2$) a její tečný vektor v bodě A je

$$\mathbf{t}_2 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_2}{\mathrm{d}r}(2) = \big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\big)\,.$$

Jestliže v bodě A existuje k ploše $\mathcal{S}$ tečná rovina $\mathcal{P}$, je to rovina daná bodem A a rovnoběžná s dvěmi tečnými vektory $\mathbf{t}_1$ a $\mathbf{t}_2$. Proto jsou její parametrické rovnice

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{t}_1 u + \mathbf{t}_2 v\,, \qquad u,\, v \in \mathbb{R}$$

nebo v souřadnicích

$$x = 1 - \sqrt{3}\,u + \tfrac{1}{2}\,v\,, \quad y = \sqrt{3} + u + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,v\,, \quad z = \tfrac{1}{3}\,\pi + u\,, \qquad u,\, v \in \mathbb{R}\,.$$

Protože vektor normály k ploše $\mathcal{S}$ v bodě A je

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = -\tfrac{1}{2}\,\big(\sqrt{3}, -1, 4\big)\,,$$

je tečná rovina $\mathcal{P}$ dána rovnicí $\mathbf{n} \cdot (X - A) = 0$, tj.

$$\sqrt{3}\,\big(x - 1\big) - \big(y - \sqrt{3}\big) + 4\big(z - \tfrac{1}{3}\,\pi\big) = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{3}\,x - y + 4z = \tfrac{4}{3}\,\pi\,.$$

<u>Neřešený příklad</u>

Příklad 2.1. Nechť je v $\mathbb{R}^3$ dána plocha $\mathcal{S}$ rovnicí $z = 3x^2 - y^3$. Abychom dostali parametrické rovnice této plochy, můžeme položit

$$x = u\,, \quad y = v\,, \quad z = 3u^2 - v^3\,.$$

Za předpokladu, že existuje tečná rovina k ploše $\mathcal{S}$ v bodě A, pro který je $x = 1$ a $y = 2$, najděte její rovnici.

$$\left[\begin{array}{l}\mathbf{x}(s,t) = (1+s, 2+t, -1+6s-12t),\ s,\ t \in \mathbb{R},\\ \text{neboli}\quad 6(x-1) - 12(y-2) - (z+1) = 0.\end{array}\right]$$

<u>Řešený příklad</u>

Příklad 2.2.r. Ukažte, že plocha $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ definovaná rovnicí

$$z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}\,, \quad x,\, y \in \mathbb{R}\,,$$

nemá v bodě $A = [0; 0; 0]$ tečnou rovinu.

Řešení: Plocha $\mathcal{S}$ je dána parametrickými rovnicemi

$$x = u\,, \quad y = v\,, \quad z = \sqrt[3]{u^3 + v^3}\,, \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2\,,$$

a bodu A odpovídají hodnoty parametrů $u = v = 0$.

Křivka $v = 0$, tj. křivka daná parametrickými rovnicemi

$$x = u\,, \quad y = 0\,, \quad z = \sqrt[3]{u^3} = u\,, \qquad u \in \mathbb{R}\,,$$

leží v dané ploše a pro $u = 0$ prochází bodem A. Tečný vektor k této křivce, $\mathbf{t}_u = (1, 0, 1)$, musí proto ležet v tečné rovině.

Podobně musí v tečné rovině ležet tečný vektor ke křivce, dané parametrickými rovnicemi

$$x = 0\,, \quad y = v\,, \quad z = \sqrt[3]{v^3} = v\,, \qquad v \in \mathbb{R}\,,$$

tj. vektor $\mathbf{t}_v = (0, 1, 1)$.

V ploše $\mathcal{S}$ uvažujme křivku, pro kterou je $u = v = t$. Její parametrické rovnice jsou

$$x = t\,, \quad y = t\,, \quad z = \sqrt[3]{t^3 + t^3} = \sqrt[3]{2}\,t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Pro $t = 0$ prochází tato křivka bodem A a její tečný vektor je $\mathbf{t} = \bigl(1, 1, \sqrt[3]{2}\bigr)$.

Snadno se přesvědčíme, že vektory

$$\mathbf{t}_u = (1, 0, 1)\,, \quad \mathbf{t}_u = (0, 1, 1) \quad \text{a} \quad \mathbf{t} = \bigl(1, 1, \sqrt[3]{2}\bigr)\,,$$

které by měly všechny ležet v tečné rovině k ploše $\mathcal{S}$ v bodě $A = [0; 0; 0]$, jsou lineárně nezávislé, a tedy v jedné rovině neleží.

3. Limity funkcí více proměnných

Řešené příklady

Příklad 3.1.r. Najděte limity

$$\lim_{[x,y]\to[1;0]} \frac{\ln\bigl(x + \mathrm{e}^y\bigr)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{a} \qquad \lim_{[x,y]\to[0;0]} \frac{\ln\bigl(x + \mathrm{e}^y\bigr)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Řešení: Protože pro $[x, y] = [1, 0]$ je $\left.\dfrac{\ln\bigl(x + \mathrm{e}^y\bigr)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{[1,0]} = \ln 2$ dobře definovaný výraz, je

$$\lim_{[x,y]\to[1;0]} \frac{\ln\bigl(x + \mathrm{e}^y\bigr)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln 2\,.$$

V bodě $[x, y] = [0, 0]$ dostaneme $\left.\dfrac{\ln\bigl(x + \mathrm{e}^y\bigr)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{[0,0]} \sim \dfrac{0}{0}$, tj. neurčitý výraz. Uvažujme limitu v bodě $[0, 0]$ vzhledem k ose x, tj. na přímce $y = 0$. Pak je

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0;0]\\ y=0}} \frac{\ln\bigl(x + \mathrm{e}^y\bigr)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x + 1)}{|x|}\,.$$

Ale protože platí

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x + 1)}{|x|} = 1 \;\neq\; \lim_{x\to 0_-} \frac{\ln(x + 1)}{|x|} = -1\,,$$

limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0;0]} \dfrac{\ln\bigl(x+\mathrm{e}^y\bigr)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ neexistuje.

Příklad 3.2.r. Najděte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0;0]} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$.

__Řešení:__ Dosazením bodu $[x,y]=[0,0]$ zjistíme, že se jedná o limitu neurčitého výrazu $\frac{0}{0}$. Ale protože

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}\,\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}+1}{\sqrt{1+x^2+y^2}+1} = \\ = \frac{\bigl(x^2+y^2\bigr)\bigl(\sqrt{1+x^2+y^2}+1\bigr)}{1+x^2+y^2-1} = \sqrt{1+x^2+y^2}+1\,,$$

je $\lim\limits_{[x,y]\to[0;0]} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1} = 2.$

Neřešené příklady

Příklad 3.1. Najděte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0;0]} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. $\bigl[0\,.\bigr]$

Příklad 3.2. Najděte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0;7]} \dfrac{\sin xy}{x}$. $\bigl[7\,.\bigr]$

Příklad 3.3. Dokažte, že limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0;0]} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ neexistuje.

Řešený příklad

Příklad 3.3.r. V přednášce se ukazovalo, že limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0;0]} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ je rovna nule po každé přímce, která prochází počátkem. Ukážeme, jak lze najít křivka $y=x^2$, po které není limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0;0]} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ rovna nule.

Zavedeme polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,,\qquad r>0\,,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\,.$$

V těchto souřadnicích je funkce v limitě rovna

$$f(r,\varphi) = \frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^4\cos^4\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \frac{r\cos^2\varphi\sin\varphi}{\sin^2\varphi + r^2\cos^4\varphi}\,.$$

Pro pevné $r>0$ uvažujme funkci

$$F(\varphi) = \bigl|f(r,\varphi)\bigr| = \frac{r\cos^2\varphi\,|\sin\varphi|}{\sin^2\varphi + r^2\cos^4\varphi}$$

a budeme hledat její maximum pro $\varphi\in\langle 0,2\pi\rangle$. Protože se jedná o funkci spojitou na kompaktním intervalu, existuje na tomto intervalu její maximum. To může funkce $F(\varphi)$ nabývat v krajích bodech intervalu, tj. pro $\varphi=0$ nebo $\varphi=2\pi$, v bodě $\varphi=\pi$, kde derivace neexistuje, nebo v bodech, kde

$F'(\varphi) = 0$. Protože $F(0) = F(\pi) = F(2\pi) = 0$, není v těchto bodech maximum. V závislosti na znaménku $\sin\varphi$ dostaneme pro derivaci na intervalech $(0,\pi)$ a $(\pi, 2\pi)$

$$\begin{aligned} F'(\varphi) \;=\; \pm\frac{r}{\big(\sin^2\varphi + r^2\cos^4\varphi\big)^2}\Big(\big(-2\cos\varphi\sin^2\varphi + \cos^3\varphi\big)\big(\sin^2\varphi + r^2\cos^4\varphi\big) - \\ - \cos^2\varphi\sin\varphi\big(2\cos\varphi\sin\varphi - 4r^2\cos^3\varphi\sin\varphi\big)\Big). \end{aligned}$$

Extrém může nastat pouze v bodech, kde je $F'(\varphi) = 0$. Z toho dostaneme rovnici

$$\cos\varphi\big(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi\big)\big(r^2\cos^4\varphi - \sin^2\varphi\big) = 0\,.$$

Z toho plyne, že buď je $\cos\varphi = 0$ nebo $\sin^2\varphi = r^2\cos^4\varphi$. Je-li $\cos\varphi = 0$, je $F(\varphi) = 0$, a tedy v těchto bodech není maximum. To bude funkce $F(\varphi)$ nabývat v bodech, kde je

$$\sin^2\varphi = r^2\cos^4\varphi\,, \quad \text{tj.} \quad |\sin\varphi| = r\cos^2\varphi\,.$$

Po dosazení zjistíme, že v těchto bodech je $F(\varphi) = \frac{1}{2}$. Když se vrátíme k proměnným x a y dostaneme z tohoto vztahu

$$r|\sin\varphi| = r^2\cos^2\varphi\,, \quad \text{tj.} \quad |y| = x^2\,.$$