Cvičení 8.1.

1. Parciální derivace

Řešený příklad

Příklad 1.1.r. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = (xz)^{\sqrt{y^2+z^2}}$.
Řešení: Při výpočtu parciální derivace podle x je y a z konstantní, a proto se jedná o derivaci funkce typu x^a, kde $a = \sqrt{y^2+z^2}$ je konstanta. Derivace pak je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{y^2+z^2}\,(xz)^{\sqrt{y^2+z^2}-1} \cdot z\,.$$

Při výpočtu parciální derivace podle y je x a z konstantní, a proto se jedná o derivaci funkce typu $a^{\sqrt{y^2+z^2}}$, kde $a = xz$ je konstanta. Derivace pak je

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (xz)^{\sqrt{y^2+z^2}} \ln(xz) \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\,.$$

Při výpočtu parciální derivace podle z je x a y konstantní, a proto se jedná o derivaci funkce typu $\big(\varphi(z)\big)^{\psi(z)}$. Jestliže napíšeme $f(x,y,z) = \exp\Big(\sqrt{y^2+z^2}\,\ln(xz)\Big)$ (tady je $\exp x = \mathrm{e}^x$), dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (xz)^{\sqrt{y^2+z^2}} \left(\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \ln(xz) + \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{z} \right).$$

Něřešené příklady

Příklad 1.1. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \sqrt{2x^2y + \sqrt{y^2+3z}}$.

$$\left[\begin{array}{c} f_{,x} = \dfrac{2xy}{\sqrt{2x^2y+\sqrt{y^2+3z}}}\,, \qquad f_{,y} = \dfrac{2x^2\sqrt{y^2+3z}+y}{2\sqrt{2x^2y+\sqrt{y^2+3z}}\,\sqrt{y^2+3z}}\,, \\ f_{,z} = \dfrac{3}{4\sqrt{2x^2y+\sqrt{y^2+3z}}\,\sqrt{y^2+3z}}\,. \end{array} \right]$$

Příklad 1.2. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \ln \dfrac{3y^3}{x^2+y^2+z^2}$.

$$\left[f_x = -\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\,, \quad f_{,y} = \frac{3x^2+y^2+3z^2}{y(x^2+y^2+z^2)}\,, \quad f_{,z} = \frac{-2z}{x^2+y^2+z^2}\,. \right]$$

Příklad 1.3. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \dfrac{2x+y}{z-2x}$.

$$\left[\begin{array}{c} f_{,x} = \dfrac{2(y+z)}{(2x+y)^2+(z-2x)^2}\,, \qquad f_{,y} = \dfrac{z-2x}{(2x+y)^2+(z-2x)^2}\,, \\ f_{,z} = \dfrac{-2x-y}{(2x+y)^2+(z-2x)^2}\,. \end{array} \right]$$

Příklad 1.4. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \sqrt{2-x^2-y^2} \cdot \operatorname{arctg} xz$.

$$\left[\begin{array}{c} f_{,x} = \dfrac{-x \operatorname{arctg} xz}{\sqrt{2-x^2-y^2}} + \dfrac{z\sqrt{2-x^2-y^2}}{1+x^2z^2}\,, \\ f_{,y} = \dfrac{-y \operatorname{arctg} xz}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,, \qquad f_{,z} = \dfrac{x\sqrt{2-x^2-y^2}}{1+x^2z^2}\,. \end{array}\right]$$

Příklad 1.5. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \arccos \dfrac{y+z}{x-y}$.

$$\left[\begin{array}{l} f_{,x} = \dfrac{y+z}{(x-y)\sqrt{(x+z)(x-2y-z)}}\,, \\ f_{,y} = \dfrac{-x-z}{(x-y)\sqrt{(x+z)(x-2y-z)}}\,, \\ f_{,z} = \dfrac{-1}{\sqrt{(x+z)(x-2y-z)}} \end{array}\right]$$

Příklad 1.6. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \arcsin \dfrac{2xz}{x-y}$.

$$\left[\begin{array}{l} f_{,x} = \dfrac{2yz}{(y-x)\sqrt{(x-y+2xz)(x-y-2xz)}}\,, \\ f_{,y} = \dfrac{2xz}{(x-y)\sqrt{(x-y+2xz)(x-y-2xz)}}\,, \\ f_{,z} = \dfrac{2x}{\sqrt{(x-y+2xz)(x-y-2xz)}}\,. \end{array}\right]$$

Příklad 1.7. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = x^2 \left(\dfrac{2-x}{3+2y}\right)^{3z}$.

$$\left[\begin{array}{c} f_{,x} = 2x\left(\dfrac{2-x}{3+2y}\right)^{3z} - \dfrac{3x^2z}{3+2y}\left(\dfrac{2-x}{3+2y}\right)^{3z-1}\,, \\ f_{,y} = \dfrac{6x^2z(x-2)}{(3+2y)^2}\left(\dfrac{2-x}{3+2y}\right)^{3z-1}\,, \qquad f_{,z} = 3x^2\left(\dfrac{2-x}{3+2y}\right)^{3z} \ln\left(\dfrac{2-x}{3+2y}\right)\,. \end{array}\right]$$

Příklad 1.8. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \left(\dfrac{y+z}{x-y}\right)^{x}$.

$$\left[\begin{array}{c} f_{,x} = \left(\dfrac{y+z}{x-y}\right)^{x}\left[\ln\left(\dfrac{y+z}{x-y}\right) + \dfrac{x}{x-y}\right]\,, \\ f_{,y} = \dfrac{x(x+z)}{(x-y)^2}\left(\dfrac{y+z}{x-y}\right)^{x-1}\,, \qquad f_{,z} = \dfrac{x}{x-y}\left(\dfrac{y+z}{x-y}\right)^{x-1}\,. \end{array}\right]$$

Příklad 1.9. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \sqrt[5]{\dfrac{\left(x^2-2xy^2\right)^{2z}}{x-y}}$.

$$\left[\begin{array}{l} f_{,x} = \frac{4}{5}\,z(x-y^2)\big(x^2-2xy^2\big)^{2z/5-1}(x-y)^{-1/5} - \frac{1}{5}\left(x^2-2xy^2\right)^{2z/5}(x-y)^{-6/5}, \\ f_{,y} = -\frac{8}{5}\,xyz\big(x^2-2xy^2\big)^{2z/5-1}(x-y)^{-1/5} + \frac{1}{5}\left(x^2-2xy^2\right)^{2z/5}(x-y)^{-6/5}, \\ f_{,z} = \frac{2}{5}\big(x^2-2xy^2\big)^{2z/5}(x-y)^{-1/5}\ln\big(x^2-2xy^2\big)\,. \end{array}\right]$$

Příklad 1.10. Najděte parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\left[f_{,x} = \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_{,y} = \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_{,z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}. \right]$$

2. Derivace podle vektoru, gradient funkce

Nechť je dána funkce $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, bod $\mathbf{a} = [a_1; a_2; \ldots; a_n]$, který je vnitřím bodem D_f a vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. V okolí bodu $t = 0$ je pak definována funkce proměnné t

$$F(t) = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t) = f(a_1 + v_1 t, a_2 + v_2 t, \ldots, a_n + v_n t).$$

Jestliže existuje derivace

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = f_{,\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = F'(0),$$

nazývá se *derivace funkce* $f(\mathbf{x})$ *podle vektoru* $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$.

Je-li $\mathbf{s}$ jednotkový vektor, tj. $\|\mathbf{s}\| = 1$, nazývá se derivace podle vektoru $\mathbf{s}$ *derivace ve směru* $\mathbf{s}$.

Má-li funkce $f(\mathbf{x})$ spojité parciální derivace, je

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i,$$

kde $\operatorname{grad} f = \big(f_{,1}, f_{,2}, \ldots, f_{,n}\big)$, tj. vektor, jehož složky jsou parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ podle proměnných x_i.

Řešené příklady

Příklad 2.1.r. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ v bodě $\mathbf{a} = [1;1]$ ve směru vektoru $\mathbf{s}$, který svírá s kladným směrem osy x úhel α.

Řešení: Směr $\mathbf{s}$ dán jednotkovým vektorem $\mathbf{s} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Protože funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ má spojité parciální derivace, je

$$f'_{\mathbf{s}}(\mathbf{a}) = \mathbf{s} \cdot \operatorname{grad} f(1,1),$$

kde

$$\operatorname{grad} f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)} = (1,1).$$

Proto je

$$f'_{\mathbf{s}}(1,1) = (\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (1,1) = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Příklad 2.2.r. Najděte derivaci diferencovatelné funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ ve směru $\mathbf{v}$ a určete, ve kterém směru je tato derivace největší a ve kterém je rovna nule.

Řešení: Protože je funkce $y = f(\mathbf{x})$ diferencovatelná je derivace ve směru $\mathbf{v}$, tj. $\|\mathbf{v}\| = 1$, rovna

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{a}). \tag{1}$$

Jestliže napíšeme

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \big(f'_{,1}(\mathbf{a}), f'_{,2}(\mathbf{a}), \dots, f'_{,n}(\mathbf{a})\big) = \big\|\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\big\|\, \mathbf{s}\,, \tag{2}$$

kde

$$\big\|\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\big\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f'_{,i})^2(\mathbf{a})}$$

a $\mathbf{s}$, $\|\mathbf{s}\| = 1$, je směr vektoru gradientu, plyne z (1) a (2)

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \big\|\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\big\|\, \mathbf{s}\cdot\mathbf{v} = \big\|\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\big\|\, \cos\alpha\,,$$

kde α je úhel mezi jednotkovými vektory $\mathbf{s}$ a $\mathbf{v}$.

Tedy derivace je největší ve směru rovnoběžném se směrem gradientu a je rovna nule v každém směru, který je na směr gradientu kolmý.

Protože tečný vektor ke křivce $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dané parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t\,, \qquad y = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t)$$

v bodě $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ je

$$\mathbf{t} = \big(\mathbf{v}, f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})\big)\,,$$

je tento vektor nejstrmější, tj. má největší poslední složku, má-li vektor $\mathbf{v}$ směr vektoru $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$.

To lze interpretovat také tak, že pokud sestrojíme v rovině $\mathbb{R}^n$ vrstevnice funkce $y = f(\mathbf{x})$, bude mít vektor gradientu funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ směr, ve kterém jsou vrstevnice nejhustší.

`Poznámka:` Ve směru $\mathbf{v}$, které jsou kolmé na $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ je derivace funkce $y = f(\mathbf{x})$ podle vektoru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$ rovna nule. To nám naznačuje, že v těchto směrech by mohla být funkce $y = f(\mathbf{x})$ konstantní. Proto lze očekávat, že pro vrstevnici $y = f(\mathbf{x}) = c = f(\mathbf{a})$ bude vektor $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ kolmý k ploše $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ dané rovnicí $f(\mathbf{x}) = c = f(\mathbf{a})$ v bodě $\mathbf{a}$, tj. bude vektorem normály. Později uvidíme, že tomu tak skutečně je.

Proto lze psát rovnici tečné roviny k ploše $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$, která je dána rovnicí $f(\mathbf{x}) = c$ v bodě $\mathbf{a}$, pro který je $f(\mathbf{a}) = c$ ve tvaru

$$\big(\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\big)\cdot\big(\mathbf{x} - \mathbf{a}\big) = 0\,.$$

Příklad 2.3.r. Podle definice nalezněte derivaci funkce

$$f(x,y) = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \quad \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0]\,, \qquad f(0,0) = 0$$

podle vektorů $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ a $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (1,1)$.

Řešení: Podle definice najdeme derivaci funkce $f(\mathbf{x})$ podle vektoru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$ tak, že sestrojíme funkci jedné proměnné $F(t) = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t)$ a

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$$

Pro $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ máme $F_1(t) = f(t,0) = 0$, a tedy

$$F'_{1,\mathbf{e}_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0\,.$$

Pro $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2$ je $F_2(t) = f(0,t) = 0$, a tedy

$$F'_{2,\mathbf{e}_2}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,.$$

Pro $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ dostaneme $F(t) = f(t,t) = t$, a tedy

$$f'_{\mathbf{v}}(0,0) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = 1\,.$$

V tomto případě neplatí rovnost $f'_{\mathbf{v}}(0,0) = \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} f(0,0)$.

Příklad 2.4.r. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = \sqrt{2-x^2-y^2}$ v bodě $\mathbf{a} = [1,0]$ ve směru tečny ke grafu funkce $y = \ln\dfrac{1}{x}$ v bodě $\mathbf{a}$.

Řešení: Funkce $f(x,y)$ má na množině $x^2+y^2<2$ spojité parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,.$$

Proto je na této množině diferencovatelná a její derivace podle vektoru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a} = [1,0]$ lze najít podle vztahu

$$f'_{\mathbf{v}}(1,0) = \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} f(1,0) = \mathbf{v}\cdot(-1,0) = -v_1\,.$$

Graf funkce $y = \dfrac{1}{x}$ určuje v rovině xy křivku $\mathcal{C}$ s parametrickými rovnicemi

$$x = t\,,\qquad y = \ln\frac{1}{t} = -\ln t\,.$$

Protože bod $\mathbf{a} = [1,0]$ odpovídá hodnotě parametru $t = 1$, je vektor tečny ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\mathbf{a}$ rovna $\mathbf{t} = (1,-1)$. A protože $\|\mathbf{t}\| = \sqrt{2}$, máme derivovat ve směru

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}\,.$$

Hledaná derivace tedy je

$$f'_{\mathbf{v}}(1,0) = \mathbf{v}\cdot(-1,0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \Big(\text{ale může být také }\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

`Poznámka.` Při výpočtu směru, ve kterém máme derivovat, jsme mohli postupovat také podle poznámky k příkladu 2. Uvažovali bychom funkci $z = h(x,y) = \ln\dfrac{1}{x} - y$. Graf funkce $y = \ln\dfrac{1}{x}$ je pak vrstevnice funkce $z = h(x,y)$ pro $z = 0$, tj. křivka $\mathbb{C}$ daná rovnicí $h(x,y) = \ln\dfrac{1}{x} - y = 0$. Proto je normála ke grafu funkce $y = \ln\dfrac{1}{x}$ v bodě $[1;0]$ rovnoběžná s vektorem $\mathbf{n} = \operatorname{grad} h(1,0) = (-1,-1)$, a tedy tečna je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{t} = (1,-1)$ nebo $\mathbf{t} = (-1,1)$.

Neřešené příklady

Příklad 2.1. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = \arcsin\dfrac{1-y}{1+x}$ v bodě $\mathbf{a} = [0,1]$ ve směru tečny ke grafu funkce $y = \cos x$ v bodě $\mathbf{a}$. $\big[\pm 1\,.\big]$

Příklad 2.2. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = \ln\big(x^2 + y^2\big)$ v bodě $\mathbf{a} = [1,1]$ ve směru normály ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{x^2}$ v bodě $\mathbf{a}$. $\big[\pm\frac{3}{5}\sqrt{5}\,.\big]$

Příklad 2.3. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = y + \sqrt{y + \sqrt{x}}$ v bodě $\mathbf{a} = [4,1]$ ve směru tečny ke grafu funkce $x = 4y^2$ v bodě $\mathbf{a}$. $\Big[\pm\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{65}}\,.\Big]$

Příklad 2.4. Najděte derivaci funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodě $A = [1,2,-2]$ ve směru normály k rovině $4x - y + z = 0$. $\big[0\,.\big]$

3. Tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x,y)$

Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace. Její graf $z = f(x,y)$ je plocha v třírozměrném prostoru a leži na ní bod $A = [a_1; a_2, a_3]$, kde $a_3 = f(a_1,a_2)$. Rovnice tečné roviny k ploše $z = f(x,y)$ v bodě A pak je

$$z - f(a_1,a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\,\big(x - a_1\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\,\big(y - a_2\big). \tag{3}$$

V několika dalších příkladech bude úkolem sestrojit tečnou rovinu ke grafu funkce $z = f(x,y)$, nebude-li znám bod dotyku, ale pouze směr normály tečné roviny. Proto budeme muset bod dotyku nejprve spočítat.

Řešené příklady

Příklad 3.1.r. Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x,y) = \ln 2x + y^2$, která je kolmá na přímku $\mathcal{P}$

$$\frac{x}{3} = -\frac{y-1}{3} = -\frac{z-2}{9}\,. \tag{4}$$

Řešení: Rovnice (4) jsou vlastně soustava dvou lineárních rovnic, které určují přímku jako průnik dvou ploch. Abychom našli směrový vektor přímky $\mathcal{P}$, přejdeme k parametrickým rovnicím. Ty dostaneme tak, že položíme

$$\frac{x}{3} = -\frac{y-1}{3} = -\frac{z-2}{9} = t\,,$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. Po úpravě dostaneme parametrické rovnice přímky $\mathcal{P}$ ve tvaru

$$x = 3t\,, \quad y = 1 - 3t\,, \quad z = 2 - 9t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Tedy směrový vektor přímky $\mathcal{P}$ je

$$(3,-3,-9) \sim (1,-1,-3) = \mathbf{s}\,.$$

Označme $A = \big[a_1; a_2; f(a_1,a_2)\big]$ zatím neznámý bod dotyku. Vektor normály ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě A je roven

$$\mathbf{n} = \big(f'_{,x}(a_1,a_2), f'_{,y}(a_1,a_2), -1\big) = \Big(\frac{1}{a_1}, 2a_2, -1\Big)\,.$$

Tento vektor musí být rovnoběžný s vektorem $\mathbf{s}$. Proto musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\mathbf{n} = \lambda\mathbf{s} \iff \frac{1}{a_1} = \lambda\,, \quad 2a_2 = -\lambda\,, \quad -1 = -3\lambda\,.$$

Z těchto rovnic dostaneme pro souřadnice bodu dotyku

$$\lambda = \frac{1}{3}\,, \qquad a_1 = 3\,, \qquad a_2 = -\tfrac{1}{6}\,.$$

A protože

$$a_3 = f\big(3, -\tfrac{1}{6}\big) = \ln 6 + \tfrac{1}{36}\,, \qquad f'_x(3,-\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{3}\,, \qquad f'_y(3,-\tfrac{1}{6}) = -\tfrac{1}{3}\,,$$

je rovnice tečné roviny

$$z - \ln 6 - \tfrac{1}{36} = \tfrac{1}{3}\big(x-3\big) - \tfrac{1}{3}\big(y + \tfrac{1}{36}\big)\,.$$

Příklad 3.2.r. Najděte rovnici tečny ke křivce $\mathcal{C}$, která je dána jako průnik rotačního paraboloidu $\mathcal{S}$ určeného rovnicí $z = x^2 + y^2$ a roviny $\mathcal{P}$, která prochází body $A_1 = [6;0;0]$, $A_2 = [0;4;0]$ a $A_3 = [0;0;3]$, v bodě $[x_0;0;z_0] \in \mathcal{C}$.

Řešení: Nejjednodušší bude popsat křivku $\mathcal{C}$ jako průnik dvou ploch, tj. jako řešení soustavy dvou rovnic. Jedna rovnice je rovnice paraboloidu

$$z = x^2 + y^2 \tag{5}$$

a druhá rovnice bude rovnice roviny $\mathcal{P}$. Jedna z možností jak ji sestrojit, je vzít vektory

$$\mathbf{v}_{21} = A_2 - A_1 = (-6,4,0)\,, \qquad \mathbf{v}_{31} = A_3 - A_1 = (-6,0,3)\,,$$

které leží v rovině $\mathcal{P}$ a napsat její parametrické rovnice

$$X = A_1 + \mathbf{v}_{21}s + \mathbf{v}_{31}t\,, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2\,,$$

nebo popsat rovinu $\mathcal{P}$ jako řešení rovnice

$$(X - A_1)\cdot(\mathbf{v}_{21} \times \mathbf{v}_{31}) = 0\,.$$

Ale protože body A_1, A_2 a A_3 mají speciální polohu, jsou průsečíky roviny s osami souřadnic, lze rovinu $\mathcal{P}$ popsat tzv. *úsekovou rovnicí* roviny

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \tag{6}$$

(rovina vytíná na souřadnicových osách úseky 6, 4 a 3). Všechny tyto rovnice jsou ekvivalentní, ale dále budeme používat rovnici roviny (6).

Na křivce $\mathcal{C}$, tj. na množině bodů, kde platí (5) a (6), budeme hledat body, jejichž y–ová souřadnice je rovna nule. Pro tyto body musí platit

$$z = x^2\,, \qquad \tfrac{1}{6}\,x + \tfrac{1}{3}\,z = 1\,, \quad \text{tj.} \quad x_1 = -2\,, \quad z_1 = 4 \quad \text{nebo} \quad x_2 = \tfrac{3}{2}\,, \quad z_2 = \tfrac{9}{4}\,.$$

Takto jsme na křivce $\mathcal{C}$ našli dva body $X_1 = [-2; 0; 4]$ a $X_2 = \left[\frac{3}{2}; 0; \frac{9}{4}\right]$, ve kterých budeme počítat rovnice tečny.

Rovnice tečen bude v daném případě nejjednodušší zapsat jako průnik tečné roviny k paraboloidu $\mathcal{S}$ v bodě X_k a roviny $\mathcal{P}$.

V bodě X_1 dostaneme podle (3) rovnici tečny jako průnik rovin

$$z - 4 = -4(x + 2)\,, \qquad 2x + 3y + 4z = 12$$

a v bodě X_2 jako průnik rovin

$$z - \tfrac{9}{4} = 3\bigl(x - \tfrac{3}{2}\bigr)\,, \qquad 2x + 3y + 4z = 12\,.$$

Z těchto rovnic bychom mohli snadno získat parametrické rovnice tečen

$$\begin{aligned} x &= -2 + 3t\,, & y &= 14t\,, & z &= 4 - 12t & \text{pro} \quad X_1 &= [-2; 0; 4]\,, \\ x &= \tfrac{3}{2} + 3t\,, & y &= -14t\,, & z &= \tfrac{9}{4} + 9t & \text{pro} \quad X_2 &= \left[\tfrac{3}{2}; 0; \tfrac{9}{4}\right]. \end{aligned}$$

Neřešený příklad

Příklad 3.1. Sestrojte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y) = xy$, která je kolmá na přímku, která prochází body $A = [2; 0; 1]$ a $B = [0; -1; 0]$.

$\bigl[2x + y + z + 2 = 0\,.\bigr]$