Cvičení 8.2.

1. Derivace složené funkce

<u>Věta.</u> Nechť je funkce $F(u, v, w)$ diferencovatelná. Jsou-li diferencovatelné funkce

$$u = u(x, y, z)\,, \qquad v = v(x, y, z)\,, \qquad w = w(x, y, z)$$

je diferencovatelná také funkce $f(x, y, z)$, která je definována vztahem

$$f(x, y, z) = F\big(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\big)$$

a platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial z}\,.
\end{aligned}$$

<u>Řešené úlohy</u>

Příklad 1.1.r. Nechť je $u = x^2 + y^2$ a $v = \dfrac{x}{y}$. Nechť funkce $f(x, y)$ splňuje rovnici

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = f\,. \tag{1}$$

Jakou rovnici splňuje funkce $F(u, v)$ definovaná vztahem $f(x, y) = F\Big(x^2 + y^2, \dfrac{x}{y}\Big)$?

<u>*Řešení:*</u> Pro parciální derivace funkce $f(x, y)$ platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\,\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{y}\,\frac{\partial F}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\,\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{x}{y^2}\,\frac{\partial F}{\partial v}\,.
\end{aligned}$$

Když dosadíme tyto vztahy do (1), dostaneme

$$y\left(2x\,\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{y}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right) - x\left(2y\,\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{x}{y^2}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right) = F\,,$$

neboli $\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right)\dfrac{\partial F}{\partial v} = F$. A protože $\dfrac{x}{y} = v$, dostaneme pro funkci $F(u, v)$ rovnici

$$\big(1 + v^2\big)\,\frac{\partial F}{\partial v} = F\,.$$

Příklad 1.2.r. Ukažte, že každá funkce $f(x,y,z)$, pro kterou je $f(x,y,z) = xzF\left(\frac{x}{z}, \frac{z^2}{y}\right)$, kde $F(u,v)$ je diferencovatelná funkce, splňuje rovnici

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\,\frac{\partial f}{\partial y} + z\,\frac{\partial f}{\partial z} = 2f\,. \tag{2}$$

<u>*Řešení:*</u> Když označíme $u = \frac{x}{z}$ a $v = \frac{z^2}{y}$, dostaneme pro parciální derivace funkce $f(x,y,z) = xzF(u,v)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= zF + xz\left(\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = zF + x\,\frac{\partial F}{\partial u}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= xz\left(\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{xz^3}{y^2}\,\frac{\partial F}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= xF + xz\left(\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial z}\right) = xF - \frac{x^2}{z}\,\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{2xz^2}{y}\,\frac{\partial F}{\partial v}\,.
\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (2) zjistíme, že tento vztah skutečně platí.

Příklad 1.3.r. Nechť je $f(x,y)$ diferencovatelná funkce. Definujme funkci

$$F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,. \tag{3}$$

Najděte vztah mezi parciálními derivacemi funkcí $f(x,y)$ a $F(r,\varphi)$.
<u>*Řešení:*</u> V tomto příkladě se vlastně jedná o převod derivací podle kartézských souřadnic x, y na derivace podle polárních souřadnic r, φ, které jsou definovány vztahy

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,,\qquad r > 0\,,\quad 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Jestliže derivujeme rovnost (3) podle r a φ (když se na tento vztah podíváte, podle jiných ani derivovat nemůžeme), dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\,,\\
\frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\,.
\end{aligned}$$

Pomocí těchto rovnic jsou vyjádřeny parciální derivace podle polárních souřadnic pomocí parciálních derivací podle kartézských. Pokud nás zajímá vyjádření parciálních derivací podle x a y pomocí derivací podle proměnných r a φ, budeme předchozí vztahy chápat jako soustavu dvou rovnic s neznámými parciálními derivacemi $f'_{,x}$ a $f'_{,y}$. Její řešení dává

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\,.$$

Neřešené úlohy

Příklad 1.1. Najděte parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ funkce $f(x,y) = F(x+y, x-y)$.

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\,, \quad \text{kde} \quad u = x+y\,, \quad v = x-y\,.\right]$$

Příklad 1.2. Ukažte, že funkce $f(x,y) = \dfrac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$, kde $\varphi(u)$ je diferencovatelná funkce, je řešením rovnice

$$x^2\,\frac{\partial f}{\partial x} - xy\,\frac{\partial f}{\partial y} + y^2 = 0\,.$$

Příklad 1.3. Do rovnice

$$x^2\,\frac{\partial f}{\partial x} - y^2\,\frac{\partial f}{\partial y} = (x-y)f$$

zaveďte nové proměnné $u = xy$ a $v = \dfrac{xy}{x+y}$. $\quad\left[uF_{,u} = F\,.\right]$

Příklad 1.4. Nechť je funkce $f(x,y)$ řešení rovnice

$$(x+2y)\,\frac{\partial f}{\partial x} - (2x+y)\,\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2-y^2)f$$

a funkce $F(u,v)$ je definována vztahem $F\left(\sqrt{x^2+xy+y^2}, xy\right) = f(x,y)$. Jakou rovnici splňuje funkce $F(u,v)$? $\quad\left[F_{,v} + \frac{1}{2}\,F = 0\,.\right]$

Příklad 1.5. Nechť je funkce $f(x,y)$ řešení rovnice

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 2f\,.$$

Najděte rovnici pro funkci $F(u,v)$, která je definována vztahem $f(x,y) = uF(u,v)$, kde $u = xy$ a $v = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. $\quad\left[F_{,u} = 0\,.\right]$

Příklad 1.6. Do rovnice

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 2f\,.$$

zaveďte nové proměnné $u = x^2+y^2$ a $v = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $\quad\left[uF_{,u} = F\,.\right]$

Příklad 1.7. Nechť je funkce $f(x,y)$ řešení rovnice

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0\,.$$

Najděte rovnici pro funkci $F(u,v)$, která je definována vztahem $(x+y)^2 f(x,y) = F(u,v)$, kde $u = x+y$ a $v = \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$. $\quad\left[F_{,u} = 0\,.\right]$

Příklad 1.8. Do rovnice

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x}+x\,\frac{\partial f}{\partial y}+2f=0\,.$$

zaveďte nové proměnné $u=x^2-y^2$ a $v=\ln\dfrac{x-y}{x+y}$. $\big[F_{,v}=F\,.\big]$

Příklad 1.9. Převeďte rovnici

$$(x+y)\,\frac{\partial f}{\partial x}-(x-y)\,\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

do proměnných u a v, které jsou definovány vztahy

$$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}\,,\qquad v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.$$

$\big[F_{,u}-F_{,v}=0\,.\big]$

Příklad 1.10. Nechť je funkce $f(x,y)$ řešení rovnice

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x}-x\,\frac{\partial f}{\partial y}=f\,.$$

Najděte rovnici pro funkci $F(u,v)$, která je definována vztahem $f(x,y)=\mathrm{e}^{-v}F(u,v)$, kde $u=\sqrt{x^2+y^2}$ a $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. $\big[F_{,v}=0\,.\big]$

Příklad 1.11. Pro funkci $f(x,y,z)=F\Big(\dfrac{x}{z},\dfrac{z}{y}\Big)$, kde $F(u,v)$ je diferencovatelná funkce, spočítejte výraz

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}+y\,\frac{\partial f}{\partial y}+z\,\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

$\big[0\,.\big]$

Příklad 1.12. Ukažte, že pro každou diferencovatelnou funkci $F(u,v)$ je funkce $f(x,y,z)$ definovaná vztahem $f(x,y,z)=x^nF\Big(\dfrac{y}{x^\alpha},\dfrac{z}{x^\beta}\Big)$, kde n, α a β jsou reálná čísla, řešením rovnice

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha y\,\frac{\partial f}{\partial y}+\beta z\,\frac{\partial f}{\partial z}=nf\,.$$

2. Konstrukce funkce více proměnných ze znalostí jejích parciálních derivací [1]

V přednášce jsme ukázali, že pokud má diferencovatelná funkce na otevřené konvexní množině $M\subset\mathbb{R}^n$ všechny parciální derivace rovny nule, je na M konstantní. Následující příklady ukazují, jak lze najít funkci, jejíž parciální derivace známe.

Příklad 2.1.r. Najděte funkci $z=z(x,y)$, která je řešením rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$ a splňuje podmínku $z(x,x^2)=1$.

[1] Toto sem nepatří, protože ještě nebyl integrální počet. Původně jsem to zamýšlel jako příklad na záměnnost parciálních derivací. Nechám to tam jenom proto, že to mám.

Řešení: Když počítáme parciální derivaci podle proměnné y, je x konstantní. Proto všechny funkce $z(x,y)$, pro které je $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, jsou

$$z(x,y) = \int \left(x^2 + 2y\right) \mathrm{d}y + C = x^2 y + y^2 + C\,.$$

Ale na rozdíl od funkcí jedné proměnné, může "integrační konstanta" C záviset na proměnné x. Tedy musí být

$$z(x,y) = x^2 y + y^2 + \varphi(x)\,,$$

kde funkce φ nezávisí na proměnné y.

Podmínka $z(x,x^2) = 1$ pak znamená, že (do vztahu pro $z(x,y)$ musíme dosadit $y = x^2$)

$$z(x,x^2) = x^4 + x^4 + \varphi(x) = 1\,, \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = 1 - 2x^4\,.$$

Tedy hledaná funkce $z(x,y)$ je

$$z(x,y) = 1 - 2x^4 + x^2 y + y^2\,.$$

Příklad 2.2.r. Najděte všechny diferencovatelné funkce $U(x,y,z)$, pro které platí

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - y - z\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -x + 4y - 2z\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = -x - 2y + 6z\,.$$

Řešení: Z první rovnice dostaneme integrací podle x při konstantních y a z (proto může integrační konstanta záviset na y a z)

$$U(x,y,z) = x^2 - xy - xz + \psi(y,z)\,. \tag{4}$$

Když dosadíme toto vyjádření funkce $U(x,y,z)$ do druhé a třetí rovnice, dostaneme

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x + 4y - 2z\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = -x + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -x - 2y + 6z\,,$$

neboli

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 4y - 2z\,, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -2y + 6z\,.$$

Integrace první z těchto rovnic podle y při konstantním z vede ke vztahu

$$\psi(y,z) = 2y^2 - 2yz + \varphi(z)\,. \tag{5}$$

Dosazením do druhé rovnice, získáme vztah

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -2y + \varphi'(z) = -2y + 6z\,, \quad \text{tj.} \quad \varphi'(z) = 6z\,.$$

Tedy $\varphi(z) = 3z^2 + C$, kde C je libovolná konstanta. Zpětné dosazení do (5) a (4) pak dá

$$U(x,y,z) = x^2 - xy - xz + 2y^2 - 2yz + 3z^2 + C\,.$$

Příklad 2.3.r. Najděte všechny diferencovatelné funkce $U(x,y)$, pro které platí

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - y\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = x - 2y\,.$$

Řešení: Budeme postupovat jako v předchozím příkladu. Integrací první rovnice podle proměnné x při konstantním y, dostaneme

$$U(x,y) = x^2 - xy + \varphi(y)\,.$$

Když dosadíme toto vyjádření funkce $U(x,y)$ do druhé rovnice, dostaneme

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + \varphi'(y) = x - 2y\,, \quad \text{tj.} \quad \varphi'(y) = 2x - 2y\,.$$

Jestliže se na tento vztah podíváte podroněji, vidíte, že jeho levá strana nezávisí na proměnné x, kdežto pravá strana na proměnné x závisí. Že to není možné, je vidět například z toho, když derivujeme tuto rovnost parciálně podle x, tj. podle x při konstantním y. Protože je na levé straně konstanta, vede tato derivace ke sporu $0 = 2$. Proto žádná funkce $U(x,y)$, která má uvedené derivace neexistuje.

Tento příklad ukazuje, že nemůžeme úplně libovolně zadat parciální derivace funkce více proměnných, ale že mezi nimi musí existovat nějaký vztah.