Cvičení 9.1.

1. Parciální derivace vyššího řádu

Neřešené příklady

Příklad 1.1. Pro funkci $f(x,y) = x\ln(xy)$ najděte $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$. $\left[0\,.\right]$

Příklad 1.2. Pro funkci $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xyz}$ najděte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y \partial z}$. $\left[(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)\mathrm{e}^{xyz},\right]$

Příklad 1.3. Najděte všechny parciální derivace třetího řádu funkce $f(x,y) = y\cos(x^2 + y^2)$.

$$\left[\begin{array}{l} f_{,xxx} = 8x^3y\sin(x^2+y^2) - 12xy\cos(x^2+y^2)\,, \\ f_{,xxy} = (8x^2y^2-2)\sin(x^2+y^2) - 4(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\,, \\ f_{,xyy} = 8xy^3\sin(x^2+y^2) - 12xy\cos(x^2+y^2)\,, \\ f_{,yyy} = (8y^4-6)\sin(x^2+y^2) - 24y^2\cos(x^2+y^2)\,. \end{array}\right]$$

Příklad 1.4. Najděte všechny parciální derivace do druhého řádu funkce $f(x,y,z) = x^2z\mathrm{e}^{y^2-z^2}$.

$$\left[\begin{array}{ll} f_{,xx} = 2z\mathrm{e}^{y^2-y^2}, & f_{,xy} = 4xyz\mathrm{e}^{y^2-z^2}, \\ f_{,xz} = 2x(1-2z^2)\mathrm{e}^{y^2-z^2}, & f_{,yy} = 2x^2z(1+2y^2)\mathrm{e}^{y^2-z^2}, \\ f_{,yz} = 2x^2y(1-2z^2)\mathrm{e}^{y^2-z^2}, & f_{,zz} = 2x^2(2z^2-3)\mathrm{e}^{y^2-z^2}. \end{array}\right]$$

2. Diferenciály vyššího řádu

Nechť má funkce $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spojité derivace k–tého řádu. Pak funkci proměnné $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, resp. prměnné $\mathrm{d}\mathbf{x} = (\,\mathrm{d}x_1,\,\mathrm{d}x_2, \ldots,\,\mathrm{d}x_n)$, definovanou předpisem

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{x};\mathbf{h}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}\, h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k}$$

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{x};\mathrm{d}\mathbf{x}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}\, \mathrm{d}x_{i_1}\,\mathrm{d}x_{i_2}\ldots\,\mathrm{d}x_{i_k}$$

nazýváme diferenciál k–tého řádu (nebo k–tý diferenciál) funkce $f(\mathbf{x})$.

Diferenciál k–tého řádu funkce $f(\mathbf{x})$ lze také vyjádřit ve tvaru

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{x};\mathbf{h}) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_n!}\,\frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}\, h_1^{k_1}h_2^{k_2}\ldots h_n^{k_n}\,,$$

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{x};\mathrm{d}\mathbf{x}) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_n!}\,\frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}\, \mathrm{d}x_1^{k_1}\,\mathrm{d}x_2^{k_2}\ldots\,\mathrm{d}x_n^{k_n}\,.$$

Speciálně je druhý diferenciál funkce n proměnných $f(x_1,\ldots,x_n)$ roven

$$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x};\mathrm{d}\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}\,\mathrm{d}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<k\le n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_k}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k\,.$$

a n–tý diferenciál funkce dvou proměnných $f(x,y)$ je roven

$$\mathrm{d}^n f(x,y;\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n\partial y^{n-k}}\,\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}y^{n-k}\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 2.1. Najděte diferenciál třetího řádu funkce $f(x,y)=y\cos(x^2+y^2)$ v bodě $\mathbf{a}=\big[0,\sqrt{\pi}\,\big]$. $\big[\mathrm{d}^3 f(0,\sqrt{\pi})=12\pi\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y+24\pi\,\mathrm{d}y^3.\big]$

Příklad 2.2. Najděte diferenciály prvního a druhého řádu funkce $f(x,y,z)=x^2z\mathrm{e}^{y^2-z^2}$ v bodě $\mathbf{a}=[1,1,1]$.

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{d}f(1,1,1)=2\,\mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}y-\,\mathrm{d}z\,,\\ \mathrm{d}^2 f(1,1,1)=2\,\mathrm{d}x^2+8\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+6\,\mathrm{d}y^2-4\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2\,\mathrm{d}z^2.\end{array}\right]$$

Příklad 2.3. Najděte druhý diferenciál funkce $f(x,y)=\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$.

$$\left[\mathrm{d}^2 f=\frac{4(1+y)\,\mathrm{d}x^2-4(1+x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+4x\,\mathrm{d}y^2}{(1-x+y)^3}\,.\right]$$

Příklad 2.4. Najděte třetí diferenciál funkce $f(x,y)=x^3+y^3-3xy(x-y)$.

$$\big[\mathrm{d}^3 f=6(\,\mathrm{d}x^3-3\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y+3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2+\,\mathrm{d}y^3)\,.\big]$$

3. Taylorův polynom funkce více proměnných

Nechť má funkce $f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál k–tého řádu. Pak polynom

$$T_k(\mathbf{x})=f(\mathbf{a})+\mathrm{d}f(\mathbf{a};\mathbf{x}-\mathbf{a})+\tfrac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a};\mathbf{x}-\mathbf{a})+\ldots+\tfrac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k(\mathbf{a};\mathbf{x}-\mathbf{a})=\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{r!}\,\mathrm{d}^r f(\mathbf{a};\mathbf{x}-\mathbf{a})$$

nazýváme Taylorův polynom funkce $f(\mathbf{x})$ se středem v bodě $\mathbf{a}$.

Neřešené příklady

Příklad 3.1. Najděte aproximaci funkce $f(x,y,z)=x^2z\mathrm{e}^{y^2-z^2}$ v okolí bodu $\boldsymbol{a}=[1,1,1]$ Taylorovým polynomem druhého stupně.

$$\left[\begin{array}{c}T_3=1+2(x-1)+2(y-1)-(z-1)+(x-1)^2+3(y-1)^2-(z-1)^2+\\ +4(x-1)(y-1)-2(x-1)(z-1)-2(y-1)(z-1)\,.\end{array}\right]$$

Příklad 3.2. Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)=3x^2+2y^3-6xy$ v bodech, kde se její první diferenciál rovná nule.

Jakou kvadratickou plochou je v okolí těchto bodů aproximována funkce $f(x,y)$?

$$\left[\begin{array}{l}\text{v bodě } [0;0] \text{ je } T_2=3x^2-6xy=3\big((x-y)^2-y^2\big);\\ \qquad\qquad\text{hyperbolický paraboloid}\\ \text{v bodě } [1;1] \text{ je } T_2=-1+3(x-1)^2-6(x-1)(y-1)+6(y-1)^2,\\ \qquad\text{neboli } T_2=-1+3\Big(\big((x-1)-(y-1)\big)^2+\big(y-1\big)^2\Big);\\ \qquad\qquad\text{eliptický paraboloid}\end{array}\right]$$

Příklad 3.3. Funkci $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}\,z^2 - 3xz - 2y + 2z$ aproximujte Taylorovým polynomem druhého stupně v okolí bodů, kde je první diferenciál funkce roven nule.

$$\left[\begin{array}{l} \text{v bodě } [1;1;1] \text{ je } T_2 = 3(x-1)^2 + 3(x-1)(z-1) + \frac{1}{2}\,(z-1)^2 + (y-1)^2, \\ \qquad\qquad \text{neboli } T_2 = \frac{1}{2}\,\big((z-1) + 3(x-1)\big)^2 + (y-1)^2 - \frac{3}{2}\,(x-1)^2; \\ \text{v bodě } [2;1;4] \text{ je } T_2 = -9 + 6(x-2)^2 + 3(x-2)(z-4) + \frac{1}{2}\,(z-4)^2 + (y-1)^2, \\ \qquad\qquad \text{neboli } T_2 = -9 + \frac{1}{2}\,\big((z-4) + 3(x-2)\big)^2 + (y-1)^2 + \frac{3}{2}\,(x-2)^2. \end{array}\right]$$