Cvičení 9.2.

1. Parciální derivace vyššího řádu složené funkce

Řešený příklad

Příklad 1.1.r. Nechť funkce $f(x,y)$ splňuje rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

Jakou rovnici splňuje funkce $F(u,v)$, která je definována vztahem

$$f(x,y) = F\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Řešení: Označme

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}\,, \qquad v = \frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

Podle věty o derivaci složené funkce je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial u}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Pro druhé parciální derivace funkce $f(x,y)$ pak máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) - \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3} - \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) + \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial F}{\partial u}\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3} + \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}\,.
\end{aligned}$$

Protože $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ a $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ jsou funkce proměnných u a v musíme je podle proměnných x a y derivovat jako složené funkce. To znamená, že platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě dostaneme pro druhé derivace funkce $f(x,y)$ podle x a y vztahy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{4xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \\
&\qquad + \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}\frac{\partial F}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{4xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \\
&\qquad - \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}\frac{\partial F}{\partial v}\,.
\end{aligned}$$

Tedy pro funkci $F(u,v)$ platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right) = 0\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0\,.$$

Neřešené příklady

Příklad 1.1. Ověřte, že každá funkce $f(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct)$, kde $\varphi(u)$ a $\psi(v)$ jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce a c je konstanta, je řešením tzv. *vlnové rovnice*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0\,.$$

$$\left[f_{,xx} = \varphi''(u) + \psi''(v)\,, \quad f_{,tt} = c^2\varphi''(u) + c^2\psi''(v)\,.\right]$$

Příklad 1.2. Nechť je funkce $F(u,v) \in C_2(\mathbb{R}^2)$ a funkce $f(x,y)$ je definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde

$$u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{a} \qquad v(x,y) = y^2\,.$$

Vyjádřete parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ pomocí parciálních derivací $\dfrac{\partial F}{\partial u}$, $\dfrac{\partial F}{\partial v}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$.

$$\left[\begin{aligned}
f_{,xx} &= \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\,F_{,uu} + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,F_{,u}\\
f_{,xy} &= \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,F_{,uu} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\,F_{,uv} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,F_{,u}\\
f_{,yy} &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\,F_{,uu} + \frac{4y^2}{x^2+y^2}\,F_{,uv} + 4y^2F_{,vv} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,F_{,u} + 2F_{,v}\,.
\end{aligned}\right]$$

Příklad 1.3. Nechť je funkce $F(u,v) \in C_2(\mathbb{R}^2)$ a funkce $f(x,y)$ je definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{a} \qquad v(x,y) = \frac{1}{y}\,.$$

Vyjádřete parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ pomocí parciálních derivací $\dfrac{\partial F}{\partial u}$, $\dfrac{\partial F}{\partial v}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$.

$$\left[\begin{aligned}
f_{,xx} &= \frac{y^4}{(x^2+y^2)^3}\,F_{,uu} - \frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,F_{,u}\\
f_{,xy} &= \frac{-xy^3}{(x^2+y^2)^3}\,F_{,uu} - \frac{2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,F_{,uv} + \frac{2x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,F_{,u}\\
f_{,yy} &= \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}\,F_{,uu} + \frac{2x}{y(x^2+y^2)^{3/2}}\,F_{,uv} + \frac{1}{y^4}\,F_{,vv} + \frac{2xy^2-x^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,F_{,u} + \frac{2}{y^3}\,F_{,v}
\end{aligned}\right]$$

Příklad 1.4. Nechť je funkce $F(u,v) \in C_2(\mathbb{R}^2)$ a funkce $f(x,y)$ je definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde

$$u(x,y) = \frac{x}{y} \qquad \text{a} \qquad v(x,y) = \ln\big(x + \sqrt{1+x^2}\big)\,.$$

Vyjádřete parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ pomocí parciálních derivací $\dfrac{\partial F}{\partial u}$, $\dfrac{\partial F}{\partial v}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$.

$$\left[\begin{aligned}
f_{,xx} &= \frac{1}{y^2}\,F_{,uu} + \frac{2}{y\sqrt{1+x^2}}\,F_{,uv} + \frac{1}{1+x^2}\,F_{,vv} - \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,F_{,v}\\
f_{,xy} &= -\frac{x}{y^2}\,F_{,uu} - \frac{x}{y^2\sqrt{1+x^2}}\,F_{,uv} - \frac{1}{y^2}\,F_{,u}\\
f_{,yy} &= \frac{x^2}{y^4}\,F_{,uu} + \frac{2x}{y^3}\,F_{,u}
\end{aligned}\right]$$

Příklad 1.5. Nechť je funkce $F(u,v) \in C_2(\mathbb{R}^2)$ a funkce $f(x,y)$ je definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde

$$u(x,y) = x + y \qquad \text{a} \qquad v(x,y) = \frac{x}{y}\,.$$

Vyjádřete parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ pomocí parciálních derivací $\dfrac{\partial F}{\partial u}$, $\dfrac{\partial F}{\partial v}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$.

$$\left[\begin{aligned} f_{,xx} &= F_{,uu} + \frac{2}{y}\,F_{,uv} + \frac{1}{y^2}\,F_{,vv} \\ f_{,xy} &= F_{,uu} + \frac{y-x}{y^2}\,F_{,uv} - \frac{x}{y^3}\,F_{,vv} - \frac{1}{y^2}\,F_{,v} \\ f_{,yy} &= F_{,uu} - \frac{2x}{y^2}\,F_{,uv} + \frac{x^2}{y^4}\,F_{,vv} + \frac{2x}{y^3}\,F_{,v} \end{aligned}\right]$$

Příklad 1.6. Nechť je $f(x,y)$ dvakrát spojitě diferencovatelná funkce. Definujme funkci

$$F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

a pomocí parciálních derivací funkce $F(r,\varphi)$ napište výraz

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

$$\left[F_{,rr} + \frac{1}{r^2}\,F_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\,F_{,r}\,.\right]$$

2. Skalární a vektorová pole v $\mathbb{R}^3$, operátory gradient, rotace a divergence[1]

Skalární pole $F = F(x,y,z)$ na množině $M \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá funkce $F : M \to \mathbb{R}$. Hodnota funkce $F(x,y,z)$ v každém bodě je skalár, Co je skalár, je trochu složitější.

Vektorové pole $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x,y,z)$ na množině M se nazývá vektorová funkce $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^3$. Hodnota vektorové funkce $\mathbf{f}(x,y,z)$ v každém bodě je vektor. Co je vektor je opět složitější. V každém případě má vektor v $\mathbb{R}^3$ tři složky. Proto pro vektorové pole budeme často používat zápis

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \big(f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\big), \quad \text{nebo zkráceně} \quad \mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)\,,$$

kde f_x, f_y a f_z jsou funkce na množině M (nejsou to ale skalární funkce).

Jiný zápis vektorové funkce je pomocí báze. Pokud označíme jednotkové vektory ve směru osy x, resp. y, resp. z jako $\mathbf{i}$, resp. $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, lze vektorové pole zapasat jako

$$\mathbf{f}(x,y,z) = f_x(x,y,z)\,\mathbf{i} + f_y(x,y,z)\,\mathbf{j} + f_z(x,y,z)\,\mathbf{k}\,, \quad \text{nebo zkráceně} \quad \mathbf{f} = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k}\,.$$

K diferencovatelnému skalárnímu poli F lze sestrojit vektorové pole $\operatorname{grad} F$, tj. vektorové pole

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right), \quad \text{neboli} \quad \operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathbf{k}\,.$$

Při zápisu gradientu a některých jiných operací se používá tzv. operátor nabla, který se zapisuje jako

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \text{nebo} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\,.$$

Pokud tímto operátorem působíme zleva na skalární diferencovatelné pole F, dostaneme vektorové pole

$$\nabla F = \operatorname{grad} F\,.$$

[1] To je tady navíc, ale mohlo by se to hodit ve fyzice

Poznamenejme, že to není to samé jako $F\nabla$, čímž se rozumí diferenciální operátor

$$F\nabla = F\,\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + F\,\frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + F\,\frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\,,$$

který skalárnímu diferencovatelnému poli G přiřadí vektorové pole

$$\big(F\nabla\big)G = F\,\frac{\partial G}{\partial x}\,\mathbf{i} + F\,\frac{\partial G}{\partial y}\,\mathbf{j} + F\,\frac{\partial G}{\partial z}\,\mathbf{k} = F\,\mathrm{grad}\,G\,.$$

Příklad 2.1. Pro skalární pole $F(x,y,z) = x^2 + xy + xz + y^2 + yz + z^2$, je

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,F &= \Big(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{pdF}{\partial z}\Big) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z) = \\ &= (2x+y+z)\,\mathbf{i} + (x+2y+z)\,\mathbf{j} + (x+y+2z)\,\mathbf{k}\,.\end{aligned}$$

Ale ne každé vektorové pole je gradient nějakého skalárního pole.

Příklad 2.2. Ukažte, že vektorové pole

$$\mathbf{f} = (2x+y-z)\,\mathbf{i} + (x+2y-z)\,\mathbf{j} + (x+y-2z)\,\mathbf{k}$$

není gradient žádného skalárního pole.
Řešení: Složky uvedeného vektorového pole jsou

$$f_x = 2x+y-z\,, \qquad f_y = x+2y-z\,, \qquad f_z = x+y-2z\,.$$

Jestliže předpokládáme, že toto vektorové pole je gradientem skalárního pole F, tj. že platí $\mathbf{f} = \mathrm{grad}\,F$, musí platit rovnosti

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_x = 2x+y-z\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = f_y = x+2y-z\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = f_z = x+y-2z\,.$$

Jestliže ale derivujeme první rovnici podle proměnné z a poslední rovnici podle proměnné x, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = -1 \quad \text{a} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 1\,.$$

Tyto rovnosti jsou ale vedou sporu $-1 = 1$, a proto žádná skalární funkce $F(x,y,z)$, pro kterou je $\mathrm{grad}\,F = \mathbf{f}$ neexistuje.

Obecně je-li $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ spojitě diferencovatelné vektorové pole, tj. funkce f_x, f_y a f_z mají spojité parciální derivace, které je gradient funkce F, musí být

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_x\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = f_y\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = f_z\,.$$

Podobně jako v předcházejícím případě zjistíme, že je to možné pouze tehdy, když platí

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}\,.$$

Lze ukázat, že pokud jsou pro spojitě diferencovatelné vektorové pole $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ splněny uvedené podmínky, existuje alespoň lokálně, tj. v okolí každého bodu, skalární pole F takové, že $\mathbf{f} = \operatorname{grad} F$. Podmínky pro to, aby bylo spojitě diferencovatelné vektorové pole $\mathbf{f}$ gradientem nějakého skalárního pole, lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0\,. \tag{1}$$

Každému diferencovatelnému vektorovému poli $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ můžeme definovat vektorové pole $\operatorname{rot} \mathbf{f}$, čti rotace $\mathbf{f}$, pomocí vztahu

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right).$$

Podmínku (1) pro to, aby vektorové pole $\mathbf{f}$ bylo gradient nějakého skalárního pak lze zapsat ve tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0\,.$$

Operaci rotace lze zapsat pomocí vektorového součinu diferenciálního operátoru ∇ s vektorovým polem $\mathbf{f}$ jako

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}\,.$$

Příklad 2.3. Pro vektorové pole z příkladu 2.1., tj. pro $\mathbf{f} = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$, je $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$. Proto je toto pole gradient nějakého skalárního pole. V našem případě je toto pole například $F(x, y, z) = x^2 + xy + xz + y^2 + yz + z^2$.

Pro vektorové pole z příkladu 2.2., tj. pro $\mathbf{f} = (2x+y-z, x+2y-z, x+y-2z)$, je $\operatorname{rot} \mathbf{f} = (2, -2, 0)$. Tedy pro toto vektorové pole neexistuje žádné skalární pole $F(x, y, z)$ takové, že $\mathbf{f} = \operatorname{grad} F$.

Příklad 2.4. Jedna ze základních rovnic elektrostatiky, která vlastně vyjadřuje zákon zachovámí enegrie, je rovnice

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0\,,$$

kde vektorové pole $\mathbf{E}(x, y, z) = (E_x, E_y, E_z)$ se nazývá intenzita elektrického pole. Z tohoto vztahu plyne, že vektorové pole $\mathbf{E}$ je gradient jistého skalárního pole. Lze tedy psát

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi\,,$$

kde $\varphi = \varphi(x, y, z)$ je skalární pole, které se nazývá potenciál elektrostatického pole.

Zabývejme se ještě otázkou, jak poznáme, že dané vektorové pole $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ je rotace nějakého vektorového pole. Matematicky lze tuto úlohu formulovat tak, že pro dané spojitě diferencovatelné vektorové pole $\mathbf{f}$ hledáme dvakrát spojitě diferencovatelné vektorové pole $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$ takové, že $\operatorname{rot} \mathbf{g} = \mathbf{f}$. Když tuto rovnici rozepíšeme pomocí složek, dostaneme soustavu tří rovnic

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} = f_x\,, \qquad \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} = f_y\,, \qquad \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} = f_z\,.$$

Abychom z této soustavy rovnic vyloučili hledané funkce g_x, g_y a g_z, derivujeme první rovnost podle x, druhou podle y, třetí podle z a sečteme. Tak dostaneme rovnost

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = 0\,.$$

Operace, která diferencovatelnému vektorovému poli $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ přiřadí skalární pole

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

se nazývá divergence vektorového pole $\mathbf{f}(x, y, z)$. Divergenci vektorového pole $\mathbf{f}$ lze zapsat pomocí skalárního součinu operátoru ∇ a vektorového pole $\mathbf{f}$ jako

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} \,.$$

Platí tvrzení, že spojitě diferencovatelné vektorové pole $\mathbf{f}$ je lokálně rotace nějakého vektorového pole právě tehdy, jestliže je

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \,.$$

Příklad 2.5. Jedno z trvzení teorie elektromagnetického pole je, že neexistují magnetické náboje (monopóly). Matematicky lze toto tvrzení zapsat pomocí vztahu

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \,,$$

kde $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ je vektorové pole magnetické indukce. To ale znamená, že existuje vektorové pole $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ takové, že

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \,.$$

Toto vektorové pole $\mathbf{A}$ se nazývá vektorový potenciál.

Ve fyzice a vlastně v celé matematice se často setkáváme s diferenciálním operátorem druhého řádu, který dvakrát diferencovatelnému skalárnímu poli $F = F(x, y, z)$ přiřazje skalární pole

$$\Delta F = \operatorname{div}\bigl(\operatorname{grad} F\bigr) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \,.$$

Tento operátor se nazývá Laplaceův operátor.

Příklad 2.6. V teorie elektrostatického pole se ukazuje, že vztah mezi hustotou elektrického náboje $\rho = \rho(x, y, z)$ a vektorem elektrické indukce $\mathbf{D}$ zapsat ve tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \,.$$

Vztah mezi vektory elektrické indukce a vektorem intenzity elektrického pole závisí na prostředí. V nejjednodušším případě má tento vztah tvar

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \,,$$

kde ε je konstanta, která se nezývá permitivita. V takovém prostředí proto platí

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \,.$$

Jestliže vezmeme do úvahy, že pro elektrostatické pole je

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \,, \quad \text{neboli} \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \,,$$

kde $\varphi = \varphi(x, y, z)$ je potenciál elektrostatického pole, dostaneme pro potenciál elektrostatického pole rovnici

$$\operatorname{div}\bigl(\operatorname{grad} \varphi\bigr) = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \,.$$