PŘEDNÁŠKA 1

MNOŽINY ČÍSEL

1.1 Základní poznatky o množinách

Množinou budeme rozumět souhrn libovolných objektů. Množinu považujeme za **určenou**, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoli. Každý z objektů, který patří do dané množiny, se nazývá jejím **prvkem (elementem)**. Množiny budeme značit velkými písmeny latinské abecedy, např. **A**, **B**, **M**, apod., prvky množin budeme značit malými písmeny, např. $a, b, x,$ apod. Skutečnost, že a **je prvkem (elementem) množiny** **A**, vyjadřujeme zápisem $a \in$ **A**. Není-li určitý objekt b prvkem množiny **A**, píšeme $b \notin$ **A**.

Obsahuje-li daná množina alespoň jeden prvek, nazývá se **neprázdná množina**; neobsahuje-li žádný prvek, nazývá se **prázdná množina** a značí se symbolem $\emptyset$. Množina, která má konečný počet prvků (tj. množina, která je prázdná, nebo je počet jejích prvků dán přirozeným číslem - viz část 1.1.2), se nazývá **konečná množina**; každá množina, která není konečná, se nazývá **nekonečná**.

Je-li množina **A** konečná, můžeme ji určit **výčtem** jejích prvků, které bez ohledu na pořadí vypíšeme a uzavřeme do složených závorek { }, například **A** $= \{1, 3, 5, 7\}$.

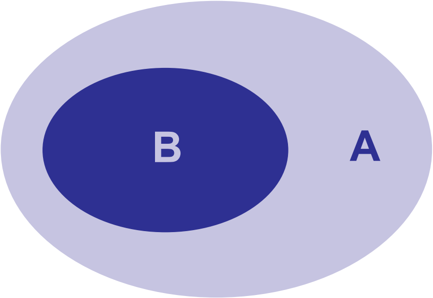
Konečnou i nekonečnou množinu můžeme dále určit **charakteristickou vlastností**, tj. takovou vlastností, kterou mají právě jen prvky zadávané množiny. Zjišťování uvažované vlastnosti se přitom provádí v tzv. **základní (univerzální) množině U**, která obsahuje všechny objekty, které nás v dané situaci zajímají. Budeme například psát:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U};\ V(x)\}$$

a říkat: „**A** je množina všech x z množiny **U**, pro která platí (která mají vlastnost) $V(x)$."

Množinové vztahy a operace

Množina **B** se nazývá **podmnožinou** množiny **A**, je-li každý prvek množiny **B** prvkem množiny **A**; píšeme **B** $\subset$ **A**.



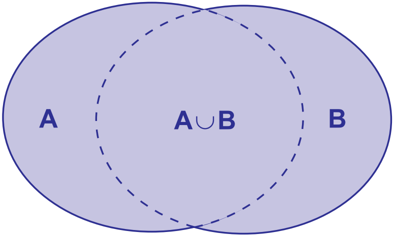
Například množina **B** $= \{3, 5, 7, 9\}$ je podmnožinou množiny **A** $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$; množina *všech pravoúhlých* trojúhelníků je podmnožinou množiny *všech* trojúhelníků, apod.

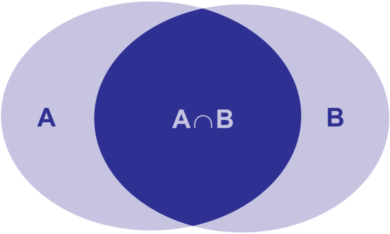
Uvědomme si, že **každá množina je podmnožinou sebe sama**, tj. pro každou množinu **A** platí **A** $\subset$ **A**. Rovněž platí, že **prázdná množina je podmnožinou každé množiny**, tj. pro každou množinu **A** platí: $\emptyset \subset$ **A**.

Množiny **A**, **B** považujeme za **sobě rovné** (píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), právě když $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ **a zároveň** $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, tj. skládají-li se z týchž prvků.

Sjednocení $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ množin **A**, **B** je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin **A**, **B**. Z definice ihned plyne, že sjednocení libovolné množiny **A** s prázdnou množinou je množina **A**, tj. $\mathbf{A} \cup \emptyset = \mathbf{A}$.

Průnik $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ množin **A**, **B** je množina všech prvků, které patří zároveň do obou množin. Průnik každé množiny **A** s prázdnou množinou je zřejmě prázdná množina, $\mathbf{A} \cap \emptyset = \emptyset$. Množiny **A**, **B**, pro které platí $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$, se nazývají **disjunktní**.



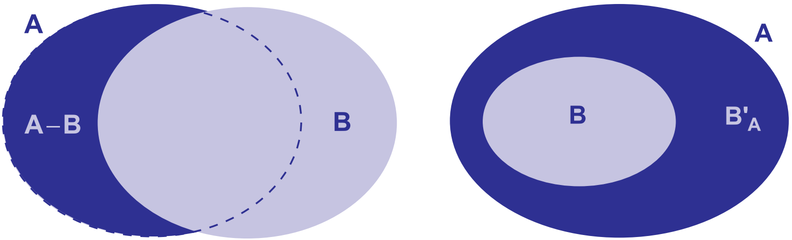


☛ ***Příklad***

- *Sjednocení množin*: $\{2,3,4,5,6,7,8\} \cup \{1,3,5,7,9,11,13\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13\}$

- *Průnik množin*: $\{2,\mathbf{3},4,\mathbf{5},6,\mathbf{7},8\} \cap \{1,\mathbf{3},\mathbf{5},\mathbf{7},9,11,13\} = \{\mathbf{3},\mathbf{5},\mathbf{7}\}$

Rozdíl **A** $\setminus$ **B** množin **A**, **B** je množina všech prvků množiny **A**, které nejsou prvky množiny **B**. Je-li speciálně **B** $\subset$ **A**, hovoříme o **doplňku množiny B v množině A** a píšeme $\mathbf{B}'_{\mathbf{A}}$.



☛ ***Příklad***

- *Rozdíl množin*:

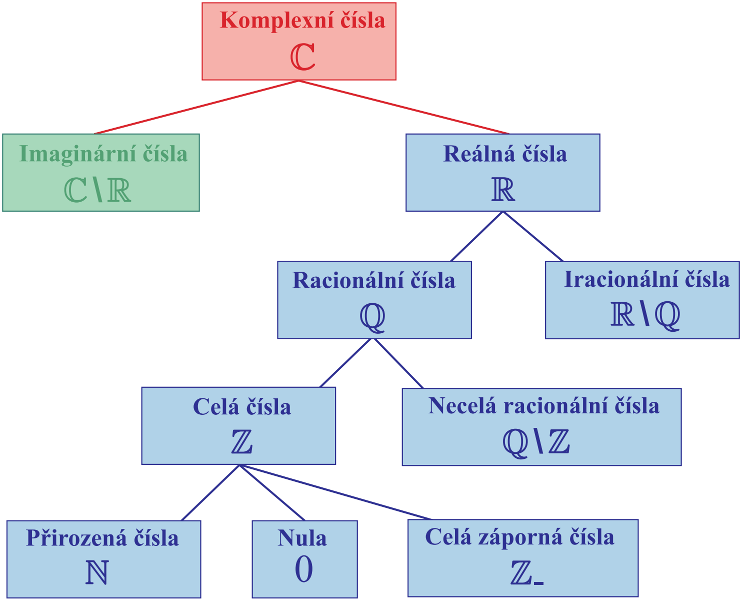
$$\{2,3,4,5,6,7,8\} \setminus \{1,3,5,7,9,11,13\} = \{2,4,6,8\}$$

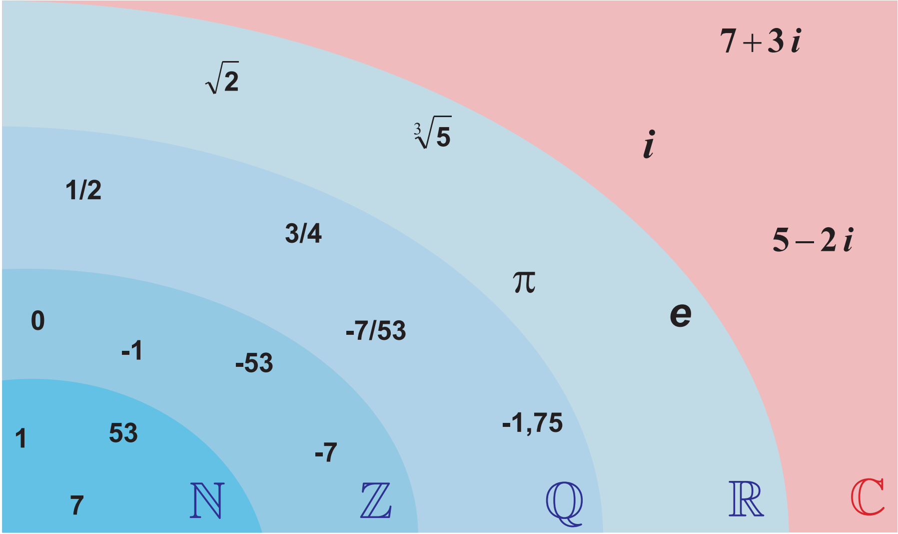
- *Doplněk množiny* $\boldsymbol{B} = \{3,5,7,9\}$ *v množině* $\boldsymbol{A} = \{1,3,5,7,9,11,13\}$:

$$\mathbf{B}'_{\mathbf{A}} = \{1,11,13\}.$$

1.2 Druhy čísel

Zopakujme si, že jsme se již setkali s následujícími druhy čísel:



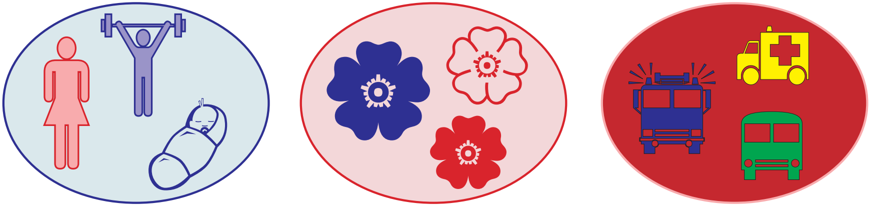


$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1.2.1 Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \qquad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Přirozená čísla slouží k vyjádření počtu osob, zvířat, předmětů aj., obecněji počtu prvků konečných neprázdných množin. Přirozené číslo - uvažujme například číslo 3 - můžeme chápat jako společnou vlastnost následujících množin:



Obor přirozených čísel je **uzavřený na sčítání a násobení**, není však **uzavřený na odčítání** (ne vždy je rozdíl dvou přirozených čísel přirozené číslo, např. $2-5=-3$) ani na dělení (např. $2:5=0,40$ není přirozené číslo). V oboru přirozených čísel **k žádnému číslu neexistuje číslo opačné ani převrácené**.

Přirozená čísla jsme zvyklí zapisovat v **poziční číselné soustavě o základu deset**, neboli v **desítkové soustavě**. K tomu používáme deset číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jejichž význam závisí na jejich umístění či pozici. Číslice zapisujeme za sebe v pořadí zprava doleva a postupně tak udáváme, kolik dané číslo obsahuje jednotek, desítek, stovek, tisíců, desetitisíců, statisíců, milionů, . . . , tedy nultých, prvních, druhých, . . . , šestých, . . . mocnin čísla 10. Jistě víte, že například skupina číslic

$$87\,956$$

vyjadřuje číslo obsahující 6 jednotek, 5 desítek, 9 stovek, 7 tisíc a 8 desetitisíc:

$$\begin{aligned} & 8 \cdot 10\,000 + 7 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ = {} & 8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 . \end{aligned}$$

Právě uvedený výraz se nazývá **rozvinutý zápis daného čísla v desítkové soustavě**, zápis 387 956 se nazývá **zkrácený**.

Obecně lze každé přirozené číslo a vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0\,,$$

neboli ve zkráceném zápisu

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0\,,$$

kde n je přirozené číslo nebo nula, a_n, a_{n-1}, . . . , a_1, a_0 jsou některá z čísel 0, 1, . . . , 9, přičemž $a_n \neq 0$. Číslo a_i se nazývá **číslice (cifra) řádu i čísla a**, číslo 10^i se nazývá **jednotka řádu** i.

Kromě desítkové soustavy se často setkáváme i se soustavou šedesátkovou, dvojkovou a příležitostně i s některými dalšími.

K důkazu toho, že nějaká vlastnost platí pro všechna přirozená čísla, se často používá tzv. axiom matematická indukce:

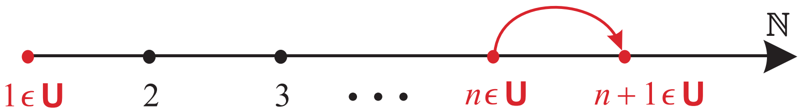
Axiom matematické indukce.

Nechť je množina $U \subset \mathbb{N}$ taková, že platí:

1) $1 \in U$,

2) jestliže $n \in U$, pak $(n+1) \in U$.

Potom $U = \mathbb{N}$.



Máme-li dokázat, že všechna přirozená čísla mají vlastnost $V(n)$, pak stačí, abychom dokázali, že ji má číslo 1 a potom že má-li ji číslo n, má ji i číslo $n+1$. Máme-li například dokázat, že pro všechna přirozená čísla platí rovnost (1.1) (viz str. 14), stačí, abychom dokázali, že platí pro $n = 1$ a dále že platí-li pro n, pak platí i pro $n+1$.

☛ ***Příklad 1.1.***

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \tag{1.1}$$

Řešení. Označme $U = \{n \in N \mid \text{pro } n \text{ platí } (\textbf{??})\}$.

1. krok: $1 \in U: \quad 1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

2. krok: $n \in U \Rightarrow (n+1) \in U:$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,,$$

to je právě vztah (1.1) pro $n = n+1$. $\square$

1.2.2 Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$$

Množina celých čísel je rozšířením množiny $\mathbb{N}_0$ o množinu všech řešení rovnic tvaru

$$n_1 + x = n_2\,, \quad \text{kde} \quad n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}\,.$$

1.2.3 Množina racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n},\ \text{kde } z \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Množina racionálních čísel je rozšířením množiny $\mathbb{Z}$ o množinu všech řešení rovnic tvaru

$$z_1 x = z_2\,, \quad \text{kde} \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{Z}\,.$$

1.2.4 Množina reálných čísel

$$\mathbb{R} = \{a_0.a_1a_2\ldots a_n\ldots,\ a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0,\ldots,9\} \text{ pro } k \geq 1\}\ ,$$

kde ke každému $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ takové, že $a_n \neq 9$.

Množina reálných čísel je tedy zavedena jako množina všech desetinných rozvojů, které nejsou zakončeny samými devítkami – jinak by např. číslo 1 mělo dva různé rozvoje,

$$1.000\ldots \qquad \text{a} \qquad 0.999\ldots\ ,$$

a jeho vyjádření by nebylo jednoznačné:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = 1\,.$$

Racionální čísla představují pouze **periodické desetinné rozvoje**, kde existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ je $a_{n+k} = a_n$ (jistá skupina čísel se neustále opakuje). Čísla, která neodpovídají periodickým desetinným rozvojům, se nazývají **iracionální čísla**.

Uspořádání na množině $\mathbb{R}$.

Řekneme, že reálné číslo

$$x = x_0.x_1x_2 \dots x_{n-1}x_nx_{n+1} \dots$$

je menší než reálné číslo

$$y = y_0.y_1y_2 \dots y_{n-1}y_ny_{n+1} \dots ,$$

píšeme $x < y$, právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $x_k = y_k$ pro $k < n$ a $x_n < y_n$.

Chceme-li vyjádřit, že $a < b$ nebo $a = b$, píšeme $a \leq b$; je-li $a > b$ nebo $a = b$, píšeme $a \geq b$.

Reálná čísla $a > 0$ se nazývají **kladná čísla**, $a < 0$ **záporná čísla**, $a \geq 0$ **nezáporná čísla** a $a \leq 0$ **nekladná čísla**.

Vlastnosti uspořádání

➥ Pro každá dvě reálná čísla a, b platí právě jeden ze vztahů:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

➥ Pro každá tři reálná čísla $a,\ b,\ c$ platí:

- Je-li $a < b$ a zároveň $b < c$, pak $a < c$.
- Je-li $a < b$, pak $a + c < b + c$.
- Je-li $a < b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac < bc$.

➥ Pro každá čtyři reálná čísla a, b, c, d platí:

- Je-li $a < b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac > bc$.
- Je-li $a < b$ a zároveň $c < d$, pak $a + c > b + d$.
- Je-li $0 < a < b$ a zároveň $0 < c < d$, pak $ac < bd$.
- Je-li $0 < a < b$, pak $1/a < 1/b$.

Geometrická reprezentace množiny reálných čísel

Reálná čísla jsme zvyklí znázorňovat pomocí **číselné osy**. To nám umožňuje následující tvrzení:

Tvrzení 1. *Existuje zobrazení množiny* $\boldsymbol{R}$ *na přímku, které má tyto vlastnosti:*

- *Je vzájemně jednoznačné, tj. obrazem každého reálného čísla je právě jeden bod přímky a naopak, každý bod přímky je obrazem právě jednoho reálného čísla.*
- *Jsou-li* $a,\ b,\ c$ *libovolná reálná čísla, pro která platí* $a < b < c$*, pak obraz čísla* b *leží na přímce mezi obrazy čísel* $a,\ c$.

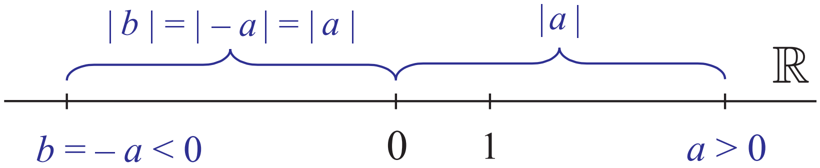
Grafické znázornění reálných čísel na číselné ose

Zvolme přímku x a na ní dva různé body, z nichž jeden prohlásíme za obraz čísla 0, označíme jej stejným symbolem a nazveme jej **počátkem**, druhý zvolíme za obraz čísla 1, označíme jej rovněž symbolem 1 a nazveme jej **jednotkovým bodem**. Přímce x se pak říká **číselná osa**; její poloha se obvykle volí vodorovná a bod 1 se na ní volí vpravo od počátku 0.

Každému reálnému číslu a se na číselné ose přiřazuje bod zvaný **obraz čísla** a, který budeme značit stejně. **Kladné číslo** a se přitom zobrazuje na polopřímku '01' tak, že vzdálenost obrazu od počátku je rovna číslu a (tj. a krát velikost jednotkové úsečky '01'), obraz **záporného čísla** b leží na polopřímce opačné k polopřímce '01' a jeho vzdálenost od počátku 0 je rovna číslu $-b$. Polopřímka '01' se proto nazývá **kladná poloosa** (obvykle je opatřena šipkou), polopřímka opačná k polopřímce '01' se nazývá **záporná poloosa**. Pro jednoduchost se o reálných číslech často hovoří přímo jako o **bodech číselné osy**.

Absolutní hodnota reálného čísla a je definována takto:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{je-li} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{je-li} \quad a < 0. \end{cases}$$



Absolutní hodnota nezáporného čísla je tedy dané číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné.

Vzdálenost reálných čísel

Uvědomme si, že pro libovolná $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

1. $|x - y| \geq 0,$
2. $|x - y| = 0 \iff x = y,$
3. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ (trojúhelníková nerovnost).

V grafickém znázornění reálných čísel na číselné ose představuje absolutní hodnota $|\,a\,|$ **vzdálenost obrazu čísla a od počátku**; $|\,a - b\,|$ pak představuje **vzdálenost obrazů čísel $a,\ b$.**

Obecně bychom mohli **vzdálenost** dvou reálných čísel zavést jako libovolnou funkci $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující podmínky 1.–3. Nebude-li však řečeno jinak, budeme vzdáleností rozumět absolutní hodnotu.

Rozšíření množiny reálných čísel o $+\infty$ a $-\infty$

Mnohdy je výhodné rozšířit množinu reálných čísel o dva symboly, $+\infty$ a $-\infty$, pro které platí: $-\infty < x < +\infty$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Takto rozšířenou množinu budeme značit jako $\mathbb{R}^*$ a přirozeně na ni rozšíříme některé algebraické operace:

$$\left|\pm\infty\right| = +\infty\,, \qquad \pm\infty + x = \pm\infty \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}\,,$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty\,, \qquad -\infty - (-\infty) = -\infty\,,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ pro každé } x > 0\,,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ pro každé } x < 0\,,$$

$$\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty \text{ pro } x > 0\,, \qquad \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty \text{ pro } x < 0\,,$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}\,.$$

Nelze definovat: $+\infty + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad 0/0, \quad \pm\infty/\pm\infty\,.$

Interval je podmnožina množiny všech reálných čísel, která se na číselné ose zobrazí jako úsečka, polopřímka nebo přímka, přičemž krajní body úsečky a počáteční bod polopřímky k ní mohou, ale nemusí patřit.

- **Interval omezený** (na číselné ose znázorněn **úsečkou**)

  - **Uzavřený:** $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

  - **Polouzavřený:**

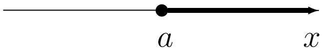
$$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}\,, \ (a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$

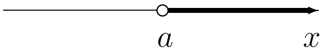
  - **Otevřený:** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

- **Neomezený** (znázorněn přímkou nebo polopřímkou)

- **Neomezený zprava:**

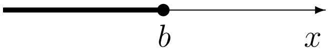
$$\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}\,,\ \ (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$$

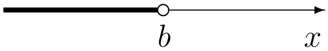




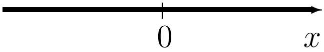
- **Neomezený zleva:**

$$(-\infty, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}\,,\ \ (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$$





- **Oboustranně neomezený:** $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



1.2.5 Množina komplexních čísel

$$\mathbb{C} = \{\dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$$

Rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá v množině $\mathbb{R}$ řešení. Snaha o vytvoření takového oboru čísel, v němž by každá algebraická rovnice měla řešení, vedla k vytvoření množiny komplexních čísel, kterou budeme značit symbolem $\mathbb{C}$.

Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšíříme na množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ takto. Nejdříve přidáme k množině $\mathbb{R}$ číslo, které budeme značit i a které definujeme požadavkem, aby splňovalo rovnost $i^2 = -1$. Číslo i budeme nazývat **imaginární jednotkou**. Pak přidáme všechna čísla tvaru $x + iy$, kde x, y jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka. Takto utvořená čísla budeme nazývat **komplexními čísly**. Číslo x nazýváme **reálnou částí** komplexního čísla $z = x + iy$ a značíme je $\Re z$; číslo y nazýváme **imaginární částí** komplexního čísla $z = x + iy$ a značíme je $\Im z$. Komplexní číslo, jehož reálná část je rovna nule, nazýváme **ryze imaginárním číslem**. **Číslem komplexně sdruženým** ke komplexnímu číslu $z = x + iy$ nazýváme číslo $\overline{z} = x - iy$. (Reálné části obou čísel jsou si rovny, imaginární se liší ve znaménku.)

Rovnost dvou komplexních čísel se definuje tak, že dvě komplexní čísla jsou si **rovna** právě tehdy, když se rovnají jejich reálné i jejich imaginární části.

Pro imaginární jednotku zřejmě platí rovnosti

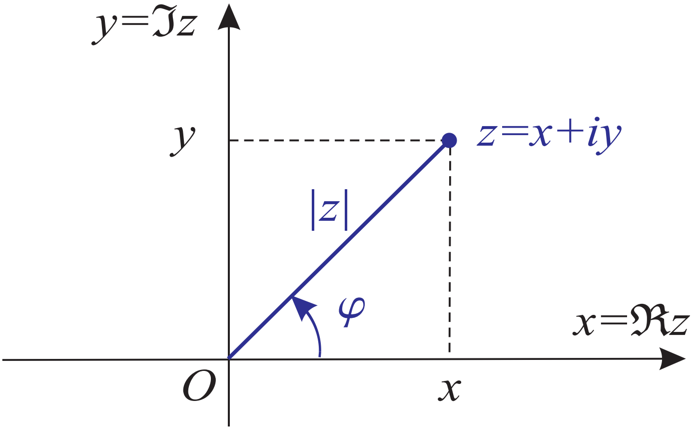
$$i^{4k} = 1\,,\ i^{4k+1} = i\,,\ i^{4k+2} = -1\,,\ i^{4k+3} = -i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.2}$$

Každé komplexní číslo $z = x + iy$ je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí reálných čísel (x, y). Tato dvojice určuje v rovině $\mathbb{R}^2$ s kartézskou soustavou souřadnic právě jeden bod, který má souřadnice (x, y). Také obráceně, každé uspořádané dvojici (x, y) souřadnic nějakého bodu roviny $\mathbb{R}^2$ můžeme přiřadit právě jedno komplexní číslo $z = x + iy$. Dostali jsme tak vzájemně jednoznačný vztah mezi rovinou $\mathbb{R}^2$ a množinou komplexních čísel $\mathbb{C}$. Budeme proto i komplexní čísla chápat jako body v rovině a tuto rovinu budeme nazývat **rovinou komplexních čísel**, nebo také

komplexní rovinou C. Přímku

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = 0\}, \quad \text{resp.} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = 0\}$$

nazýváme **reálnou**, resp. **imaginární osou** komplexní roviny **C**.



Modul komplexního čísla

Číslo

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.3}$$

je tzv. **modul (absolutní hodnota)** komplexního čísla $z = x + iy$. Zřejmě je $|z| \in \langle 0, \infty)$. Každé komplexní číslo, jehož modul je roven 1, se nazývá **komplexní jednotka**.

Hlavní hodnota argumentu

Důležitou roli v celé analýze komplexní proměnné má velikost orientovaného úhlu, který svírá kladná reálná poloosa a průvodič bodu $z \neq 0$ v komplexní rovině. Toto číslo se obvykle značí symbolem φ a zpravidla se požaduje, aby leželo v intervalu $\langle -\pi, \pi)$. Tento úhel φ, který je přiřazen každému nenulovému komplexnímu číslu z, nazýváme **hlavní hodnota argumentu** komplexního čísla z. Někdy se místo intervalu $\langle -\pi, \pi)$ volí interval $\langle 0, 2\pi)$. Pro hlavní hodnotu φ argumentu komplexního čísla z se používá označení $\arg z$. Jelikož každému nenulovému komplexnímu číslu

z je přiřazena právě jedna hlavní hodnota argumentu $\arg z$, můžeme $\arg z$ chápat jako reálnou funkci komplexní proměnné, definovanou na množině $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, nebo také jako reálnou funkci dvou reálných proměnných. Explicitně ji můžeme definovat předpisem:

$$\arg z = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna} \quad x < 0\,, y > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro všechna} \quad x = 0\,, y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna} \quad x > 0\,, y \in \mathbb{R}, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro všechna} \quad x = 0\,, y < 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna} \quad x < 0\,, y \leq 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Pomocí hlavní hodnoty $\arg z$ nenulového komplexního čísla můžeme definovat nekonečně mnoho dalších hodnot argumentu tohoto čísla z, a to předpisem

$$\text{Arg}_k z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

Zřejmě $\mathrm{Arg}_k z \in \langle (2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ a $\mathrm{Arg}_0 z = \arg z$. Takto definované funkce $\mathrm{Arg}_k z$, jejichž definičním oborem je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, nazýváme **jednoznačnými větvemi argumentu**. Funkce $\arg z$ se nazývá **hlavní větev argumentu**.

Zápis komplexních čísel

Každé komplexní číslo $z \neq 0$ lze zapsat právě jedním způsobem v jeho tzv. **kartézském (algebraickém) tvaru**

$$z = x + iy \tag{1.6}$$

nebo v tzv. **goniometrickém (polárním) tvaru**

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi\,. \tag{1.7}$$

Z goniometrického tvaru komplexního čísla z plynou rovnosti

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{1.8}$$

Uvedeme ještě třetí, tzv. **exponenciální tvar** komplexního čísla

$$z = |z| e^{i\varphi}\,, \tag{1.9}$$

kde komplexní funkci reálné proměnné $e^{i\varphi}$ definujeme pomocí tzv. **Eulerova vztahu**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,. \tag{1.10}$$

☛ ***Příklad***

Vyjádřeme komplexní číslo $z = 1 + i\sqrt{3}$ v goniometrickém a exponenciálním tvaru.

Řešení. Nejdříve vypočteme modul $|z|$ a hlavní hodnotu argumentu $\varphi = \arg z$. Podle (1.3) je $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Pro hodnotu φ podle (1.8) musí platit

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\,, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad -\pi \le \varphi < \pi\,.$$

Odtud dostáváme $\varphi = \pi/3$. Podle (1.7) goniometrický tvar komplexního čísla z je

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\,.$$

Podobně podle (1.9) pro exponenciální tvar komplexního čísla z platí

$$z = 2e^{i\pi/3}\,.$$

Početní operace s komplexními čísly

Nechť $z = x + iy$ a $w = u + iv$ jsou dvě komplexní čísla. Pak jejich **součet, rozdíl, součin a podíl** definujeme vztahy:

$$
\begin{aligned}
z + w &= (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)\\
z - w &= (x + iy) - (u + iv) = (x - u) + i(y - v)\\
zw &= (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)\\
\frac{z}{w} &= \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\frac{yu - xv}{u^2 + v^2}\,.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Slovy můžeme operace s komplexními čísly popsat takto.

Sčítání a **odčítání** je nejvýhodnější ve tvaru kartézském. Sečteme, resp. odečteme reálné části a sečteme, resp. odečteme imaginární části.

Násobení komplexních čísel v kartézském tvaru provádíme jako násobení dvojčlenu dvojčlenem, v goniometrickém a exponenciálním tvaru se vynásobí moduly a sčítají argumenty:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = |w|e^{i\psi}$$

$$zw = |z|e^{i\varphi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i\varphi}e^{i\psi} = |z||w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= |z||w|\big[(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\big] =$$

Tedy

$$zw = |z||w|\big[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big] = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}\,. \tag{1.12}$$

Současně jsme ukázali, že platí rovnost

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}. \tag{1.13}$$

Odtud indukcí pro každé přirozené n plyne

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}. \tag{1.14}$$

Dělení komplexních čísel v kartézském tvaru pro $w \neq 0$ provádíme tak, že zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli. V goniometrickém a exponenciálním tvaru se dělí moduly a argumenty se odečítají:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = |w|e^{i\psi},$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{|w|(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi)}{|w|(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\psi - i\sin\psi)} =$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\left(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)\right) = \frac{|z|}{|w|}\, e^{i(\varphi - \psi)}\,. \tag{1.15}$$

Moivreova věta

Z Eulerova vztahu

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,, \tag{1.16}$$

plyne

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)\ ; \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right). \tag{1.17}$$

Umocníme-li obě strany rovnosti (1.16) na číslo n, dostaneme rovnost

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (e^{i\varphi})^n.$$

Protože $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, platí tzv. **Moivreova věta:**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\,, \tag{1.18}$$

Jestliže

$$z = |z|e^{i(\varphi+2k\pi)} = |z|(\cos(\varphi+2k\pi) + i\sin(\varphi+2k\pi)),$$

pak pomocí Moivreovy věty dostáváme:

$$\left(\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)^n =$$

$$= |z|(\cos(\varphi+2k\pi) + i\sin(\varphi+2k\pi)) = z$$

pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Je tedy přirozené prohlásit každé z n čísel

$$\left(\sqrt[n]{z} \right)_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) , \qquad (1.19)$$

$$k = 0, \ldots, n-1 ,$$

za n**-tou odmocninu komplexního čísla** z**.** Povšimněte si, že pro $n = 2$ a reálná $z > 0$ odpovídá $\left(\sqrt[2]{z} \right)_0 = \left(\sqrt{z} \right)_0$ obvyklé definici druhé odmocniny v oboru reálných čísel. Podrobnější rozbor a zdůvodnění definice n-té odmocniny bude dáno ve druhé kapitole při studiu zobrazení v komplexní rovině.

☛ ***Příklad.*** Máme najít všechna řešení algebraické rovnice $z^6 - 8 = 0$.
Řešení. Úloha je ekvivalentní s úlohou najít hodnoty všech šestých odmocnin čísla 8. Podle (1.19) je

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_k = \left(\sqrt[6]{8(\cos 0 + i \sin 0)}\right)_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

Odtud dostáváme hledané odmocniny

$$\begin{aligned}
(\sqrt[6]{8})_0 &= \sqrt{2}(\cos 0 &&+ i\sin 0) &&= \sqrt{2},\\
(\sqrt[6]{8})_1 &= \sqrt{2}(\cos(\pi/3) &&+ i\sin(\pi/3)) &&= \sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2),\\
(\sqrt[6]{8})_2 &= \sqrt{2}(\cos(2\pi/3) &&+ i\sin(2\pi/3)) &&= \sqrt{2}(-1/2 + i\sqrt{3}/2),\\
(\sqrt[6]{8})_3 &= \sqrt{2}(\cos\pi &&+ i\sin\pi) &&= -\sqrt{2},\\
(\sqrt[6]{8})_4 &= \sqrt{2}(\cos(4\pi/3) &&+ i\sin(4\pi/3)) &&= -\sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2),\\
(\sqrt[6]{8})_5 &= \sqrt{2}(\cos(5\pi/3) &&+ i\sin(5\pi/3)) &&= \sqrt{2}(1/2 - i\sqrt{3}/2).
\end{aligned}$$

Řešeními dané rovnice je tedy množina komplexních čísel

$$\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}.$$

Pro komplexní čísla platí užitečné nerovnosti, které budeme používat v dalším textu. Z definice modulu komplexního čísla plynou nerovnosti

$$-|z| \leq \Re z \leq |z|, \quad -|z| \leq \Im z \leq |z|. \tag{1.20}$$

Zřejmě platí

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1\overline{z}_2), \tag{1.21}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\Re(z_1\overline{z}_2). \tag{1.22}$$

Z nerovností (1.20) plyne $\Re(z_1\overline{z}_2) \leq |z_1||\overline{z}_2|$ a z předchozích dvou nerovností plynou nerovnosti

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \tag{1.23}$$

V geometrické interpretaci představují nerovnosti (1.23) známé podmínky pro konstrukci trojúhelníka ze tří zadaných úseček: součet délek dvou stran nemůže být menší než strana třetí a velikost rozdílu délek dvou stran nemůže být větší než strana třetí.

1.2.6 Množiny reálných čísel a jejich vlastnosti

Definice 1. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá

- **shora omezená**, jestliže existuje $H \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí nerovnost $x \leq H$;
- **zdola omezená**, jestliže existuje $D \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí nerovnost $x \geq D$;
- **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

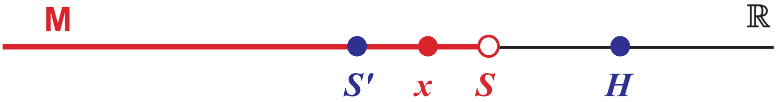
Číslo H se nazývá **horní odhad množiny** M, číslo D se nazývá **dolní odhad množiny** M.

Definice 2. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $S \in \mathbb{R}$, pro které platí:

1. pro každé $x \in M$ je $x \leq S$,
2. pro každé $S' < S$ existuje $x \in M$ takové, že $x > S'$,

se nazývá **supremum množiny** M.

Supremum množiny je tedy její **nejmenší horní odhad.**



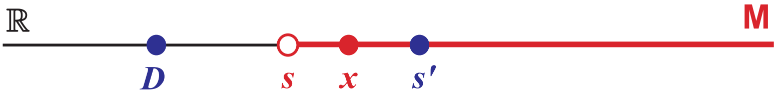
Poznámka. První podmínka říká, že S je horní odhad, druhá podmínka říká, že je ze všech horních odhadů nejmenší, tj. žádné číslo S' menší než supremum není horním odhadem. Supremum S nemusí být prvkem množiny M.

Definice 3. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$, pro které platí

1. pro každé $x \in M$ je $x \geq s$,
2. pro každé $s' > s$ existuje $x \in M$ takové, že $x < s'$,

se nazývá **infimum množiny** M**.**

Infimum množiny je tedy její **nejmenší horní odhad.**



Poznámka. První podmínka říká, že s je dolní odhad, druhá podmínka říká, že je ze všech dolních odhadů největší, tj. žádné číslo s' větší než infimum není dolním odhadem. Infimum s nemusí být prvkem množiny M.

Věta o supremu a infimu v $\mathbb{R}$

1. *Pro každou neprázdnou shora omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje právě jedno supremum $S \in \mathbb{R}$.*

2. *Pro každou neprázdnou zdola omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje právě jedno infimum $s \in \mathbb{R}$.*

Poznámka. Povšimněme si, že v množině racionálních čísel uvedená věta neplatí. Stačí uvažovat

$$M = \left\{q \in \mathbb{Q}\,;\; q^2 < 2\right\} .$$

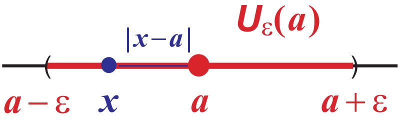
V reálném oboru by bylo supremum $\sqrt{2}$, infimum $-\sqrt{2}$, tato čísla však nejsou racionální.

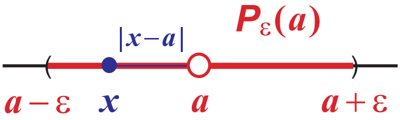
Definice 4. Nechť $\varepsilon > 0$. **Okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$ se nazývá množina $U_\varepsilon(a)$ všech bodů $x \in \mathbb{R}$, jejichž vzdálenost od bodu a je menší než ε, tj.

$$U_\varepsilon(a) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x-a| < \varepsilon\right\}.$$

Definice 5. Prstencovým okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ se nazývá množina $P_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, tj.

$$P_\varepsilon(a) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ 0 < |x-a| < \varepsilon\right\}.$$





Pro $\varepsilon > 0$ definujeme **okolí bodu $+\infty$** jako

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,;\; x > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{+\infty\}$$

a **okolí bodu $-\infty$** jako

$$U_\varepsilon(-\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,;\; x < -\frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{-\infty\} \,.$$

Prstencová okolí se definují bez bodů $\pm\infty$:

$$P_\varepsilon(+\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,;\; x > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \,,$$

$$P_\varepsilon(-\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,;\; x < -\frac{1}{\varepsilon} \right\} \,.$$

1.2.7 Množina $\mathbb{R}^n$ a její podmnožiny

V druhé polovině semestru budeme pracovat s množinou uspořádaných n-tic reálných čísel, která se obvykle značí symbolem $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}, \tag{1.24}$$

tj.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ krát}} .$$

Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme obvykle značit tučně, tj. $\boldsymbol{x} = \big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
V prostoru $\mathbb{R}^n$ se definují operace násobení reálným číslem a a sčítání vztahy

$$a\boldsymbol{x} = a\big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big) = \big(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n\big) ,$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)+\big(y_1, y_2, \ldots, y_n\big) = \big(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n\big) .$$

Jak víme z lineární algebry, množina $\mathbb{R}^n$ s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel.

Vzdálenost dvou bodů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ definujeme vztahem

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}. \tag{1.25}$$

Je to vlastně délka úsečky, jejíž koncové body jsou body $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$.

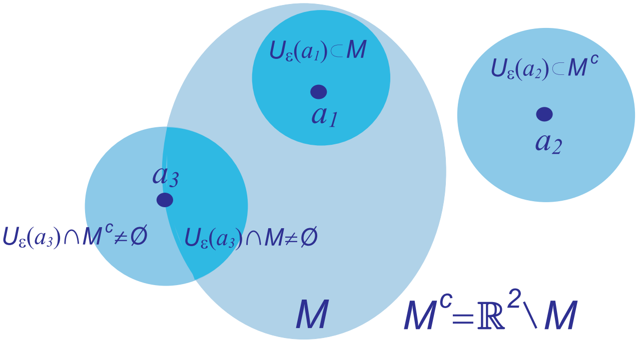
Definice 6. Nechť je $M \in \mathbb{R}^n$. Pro každé $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu všech $\boldsymbol{x} \in M$, pro která je $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \varepsilon$ **okolím bodu** $\boldsymbol{a}$ (přesněji **otevřeným** ε**–ovým okolím** bodu $\boldsymbol{a}$.
ε–ové okolí bodu $\boldsymbol{a}$ budeme značit $U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$.

Množinu všech bodů $\boldsymbol{x} \in M$, pro která je $0 < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \varepsilon$ nazýváme **prstencové oko**l**í bodu** $\boldsymbol{a}$ a budeme jej značit $P_\varepsilon(\boldsymbol{a})$.

Poznámka. Zřejmě platí: $P_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.

Definice 7. Uvažujme množinu $M \subset \mathbb{R}^n$. Bod $\boldsymbol{a}$ se nazývá

- **vnitřní bod množiny** M, existuje-li okolí $U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset M$.
- **vnější bod množiny** M, existuje-li okolí $U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ takové, že $U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap M = \emptyset$.
- **hraniční bod množiny** M má-li každé jeho okolí $U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ neprázdný průnik jak s množinou M tak jejím doplňkem $M^C = \mathbb{R} \setminus M$.

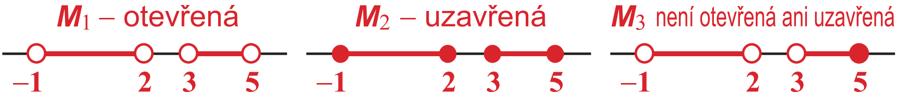


Definice 8. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **otevřená** právě tehdy, když je každý její bod jejím vnitřním bodem.
- **uzavřená** právě tehdy, když je její doplněk $M^C = \mathbb{R}^n \setminus M$ otevřená množina.

Příklad 1.2.

- $M = (-1, 2) \cup (3, 5)$ je otevřená množina.
- $M = \langle -1, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$ je uzavřená množina.
- $M = (-1, 2) \cup (3, 5\rangle$ není otevřená ani uzavřená.



Definice 9. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá **vnitřek množiny** M a značí se M°.

Definice 10. **Uzávěrem množiny** M nazýváme doplněk ke vnitřku doplňku množiny M a značíme jej $\overline{M}$, tj. $\overline{M} = \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{R} \setminus M\right)^\circ$.

Definice 11. **Hranicí množiny** M nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů a značíme ji ∂M.

☛ ***Příklad 1.3.***

Uvažujme $M = (-1, 2) \cup (3, 5\rangle$.

$$M^\circ = (-1, 2) \cup (3, 5)\ , \quad \overline{M} = \langle -1, 2\rangle \cup \langle 3, 5\rangle\ , \quad \partial M = \{-1, 2, 3, 5\}\,.$$

Definice 12. Bod x se nazývá

- ➥ **hromadný bod** množiny M právě tehdy, když pro každé jeho prstencové okolí $P_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ je $M \cap P_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$.
- ➥ **izolovaný bod** množiny M právě tehdy, když existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ takové, že $M \cap P_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \emptyset$.

☛ ***Příklad 1.4.***

$$M = (-1, 2) \cup \{4\}$$

hromadný bod: libovolné $x \in \langle -1, 2 \rangle$ izolovaný bod: **4**

Definice 13. $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in M$ je

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{O}) \leq K.$$

Definice 14. Uzavřená a omezená množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **kompaktní**.