

PŘEDNÁŠKA 2

POSLOUPNOSTI

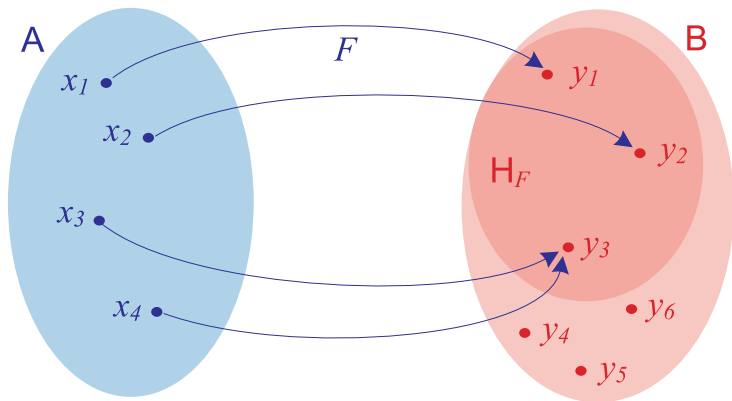
2.1 Zobrazení

Definice 1. Uvažujme libovolné neprázdné množiny A, B . **Zobrazení množiny A do množiny B** je definováno jako množina F uspořádaných dvojic $(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, kde ke každému prvku $x \in \mathbf{A}$ existuje **právě jeden** prvek $y \in \mathbf{B}$, pro který je $(x, y) \in F$.

Prvku x se říká **vzor** prvku y , prvku y se říká **obraz** prvku x v zobrazení F ; rovněž se používá vyjádření, že y je **hodnota zobrazení F** v bodě x a píše se $y = F(x)$ nebo $x \mapsto F(x)$. Množina \mathbf{A} se nazývá **definiční obor zobrazení F** a označuje také symbolem $\mathbf{D}(F)$ či \mathbf{D}_F . Množina všech obrazů v zobrazení F se nazývá **obor hodnot zobrazení F** a označuje se $\mathbf{H}(F)$ či \mathbf{H}_F ; platí: $\mathbf{H}(F) \subset \mathbf{B}$.

Symbolicky se zobrazení F množiny \mathbf{A} do množiny \mathbf{B} zapisuje takto:

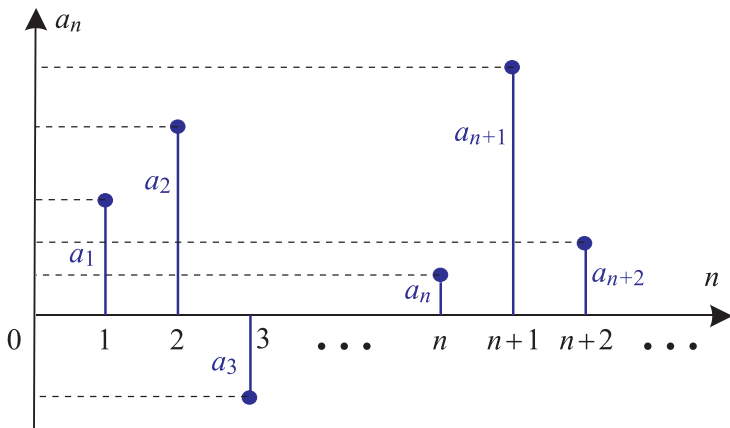
$$F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}(F) = \mathbf{A}$$



2.2 Posloupnost reálných čísel

Definice 2. Posloupností nazýváme zobrazení \mathbb{N} do \mathbb{R} .

Posloupnost tedy přiřazuje každému $n \in \mathbb{N}$ právě jeden prvek $f(n) \in \mathbb{R}$, který se nazývá **člen posloupnosti** a obvykle se značí a_n . Celou posloupnost budeme značit (a_n) . Grafem posloupnosti jsou izolované body:



☛ Příklad 2.1.

Aritmetická posloupnost je definována předpisem

$$a_1 \in \mathbb{R}, \quad a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

kde a_1, d jsou daná reálná čísla.

Pro členy aritmetické posloupnosti platí: $a_{n+1} - a_n = d$.

Číslo d se nazývá **diference aritmetické posloupnosti**.

Matematickou indukcí lze dokázat, že pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Také lze uvažovat:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \\ s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d) \\ \hline 2s_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) \\ &\implies 2s_n = n(a_1 + a_n) \implies s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

☛ **Příklad 2.2.**

Geometrická posloupnost je definována předpisem

$$a_1 \in \mathbb{R}, \quad a_n = a_1 q^{n-1},$$

kde a_1, q jsou daná reálná čísla.

Je-li $a_1 q \neq 0$, platí mezi dvěma po sobě jdoucími členy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

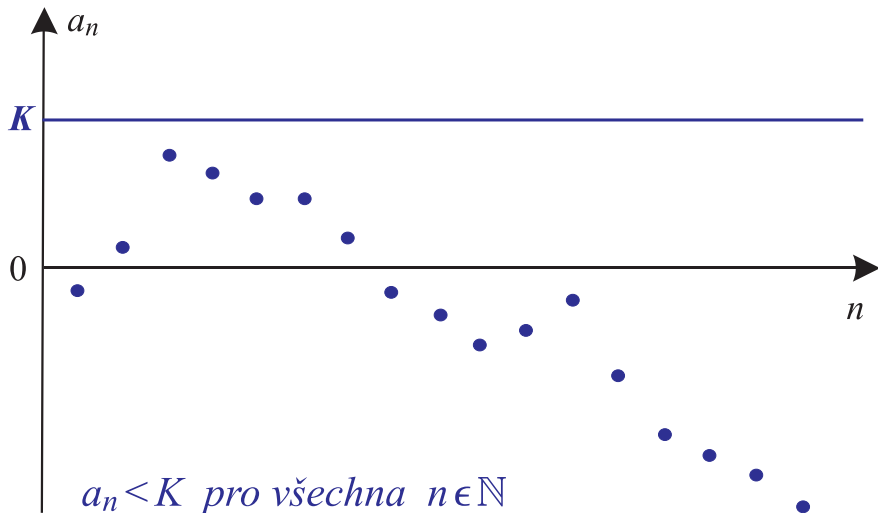
Tento poměr se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti**.

Matematickou indukcí lze dokázat, že pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti platí:

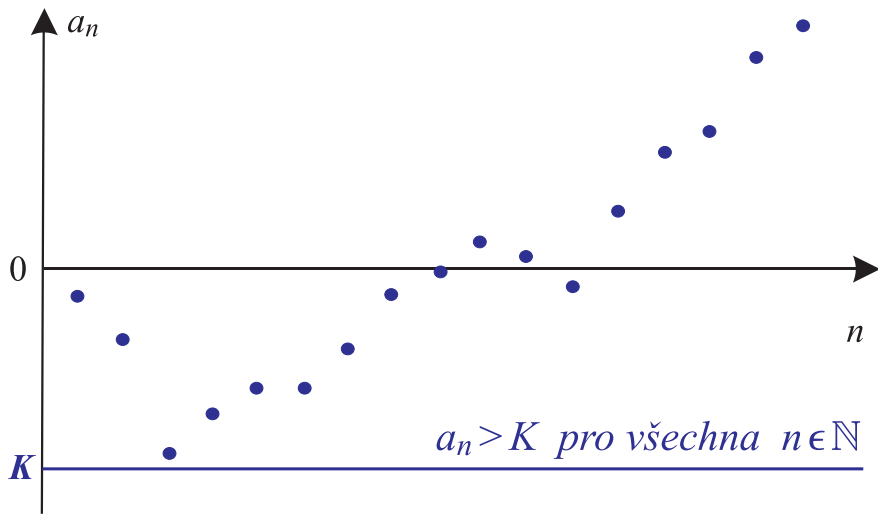
$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{pro } q \neq 1, \\ na_1 & \text{pro } q = 1. \end{cases}$$

2.3 Vlastnosti posloupností

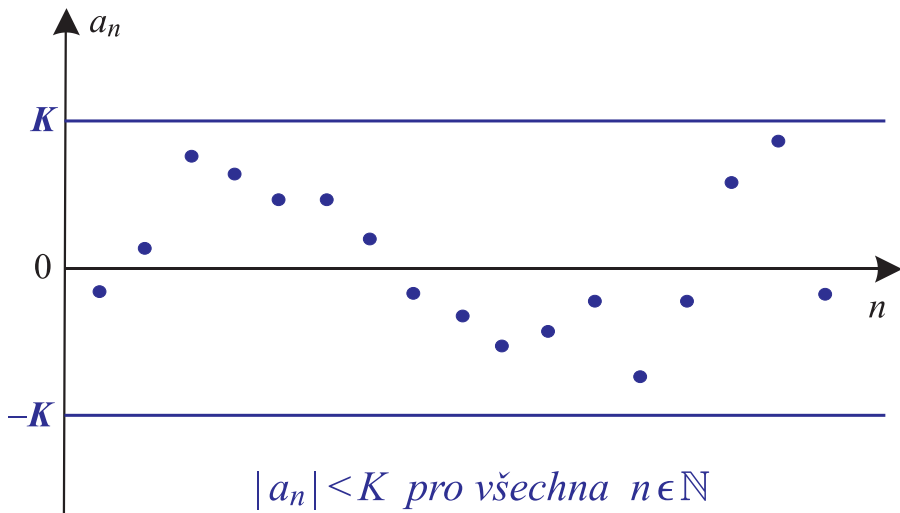
Definice 3. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **shora omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq K$.



Definice 4. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **zdola omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq K$.



Definice 5. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:
 $|a_n| \leq K$.



☛ **Příklad 2.3.**

Pro $d > 0$ je aritmetická posloupnost zdola omezená číslem a_1 , ale není omezená shora, a tedy není ani omezená

☛ **Příklad 2.4.**

Pro $a_1 \neq 0$ a $q < -1$ není geometrická posloupnost omezená ani shora, ani zdola. Pro $|q| \leq 1$ je geometrická posloupnost omezená. Stačí zvolit $K = |a_1|$.

Definice 6. Posloupnost (a_n) se nazývá

- **rostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n < a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n > a_{n+1}$,
- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq a_{n+1}$,
- **nerostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq a_{n+1}$.

Posloupnost, která splňuje jednu z výše uvedených podmínek, se nazývá **monotónní**. Je-li rostoucí nebo klesající, nazývá se též **ryze monotónní**.

☛ **Příklad 2.5.**

Nechť je dána posloupnost (a_n) , kde $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Členy posloupnosti: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$

Posloupnost není monotónní, je omezená např. číslem 1.

Definice 7. Necht' je dána posloupnost (a_n) a rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) , tj.

$$k_n \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad k_n < k_{n+1}.$$

Posloupnost (b_n) , pro jejíž členy platí $b_n = a_{k_n}$, nazveme **vybranou posloupností** z posloupnosti (a_n) .

☛ **Příklad 2.6.**

Posloupnost (b_n) definovaná vztahem

$$b_n = \frac{(-1)^{n^2+1}}{n^2}$$

je vybraná z posloupnosti (a_n) , kde

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

V tomto případě je $k_n = n^2$ ($b_1 = 1 = a_1$; $b_2 = -\frac{1}{4} = a_4 \dots$).

☛ **Příklad 2.7.**

Posloupnost (c_n) , kde $c_n = \frac{1}{n^2}$, není vybraná z posloupnosti (a_n) , kde

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

protože neexistuje rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) tak, aby $a_{k_n} = c_n = \frac{1}{n^2}$ ($c_1 = 1 = a_1$; $c_2 = \frac{1}{4}$, $a_4 = -\frac{1}{4}$).

☛ **Příklad 2.8.**

Posloupnost (d_n) , jejíž členy jsou postupně

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{11}, \dots$$

také není vybranou posloupností z posloupnosti (a_n) , přestože množina členů obou těchto posloupností je stejná. Lze sice najít posloupnost přirozených čísel (k_n) tak, aby $d_n = a_{k_n}$, ale tato posloupnost není rostoucí.

2.3.1 Algebraické operace

Násobení posloupnosti (a_n) reálným číslem $c \in \mathbb{R}$ definujeme jako posloupnost, jejíž n -tý člen je ca_n , tj. jako posloupnost

$$c(a_n) = (ca_n).$$

Součet posloupností (a_n) a (b_n) je definován předpisem

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n).$$

Součin posloupností (a_n) a (b_n) je definován předpisem

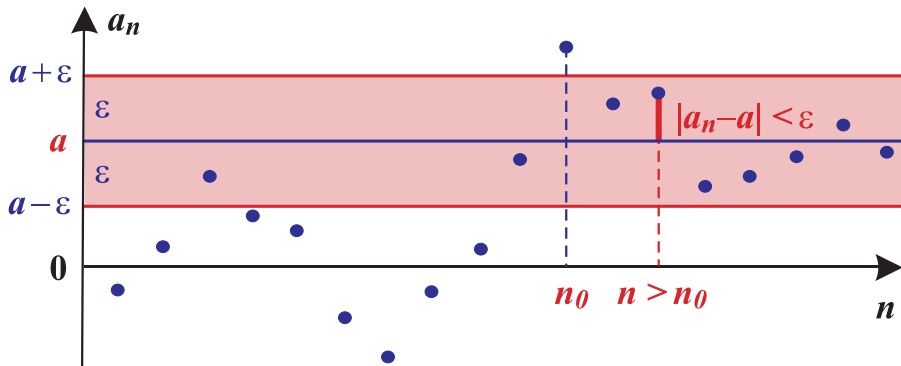
$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n).$$

Je-li $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je **podíl posloupností (a_n) a (b_n)** definován jako

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n} \right).$$

2.3.2 Limita posloupnosti

Definice 8. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **limitu** $a \in \mathbb{R}$ (**vlastní limitu**), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$, neboli $a_n \in U_\varepsilon(a)$. Výrok posloupnost (a_n) má limitu a zapisujeme jako $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.



☛ **Příklad 2.9.**

Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n^3+n+1} = 0$.

Řešení. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z nerovnosti

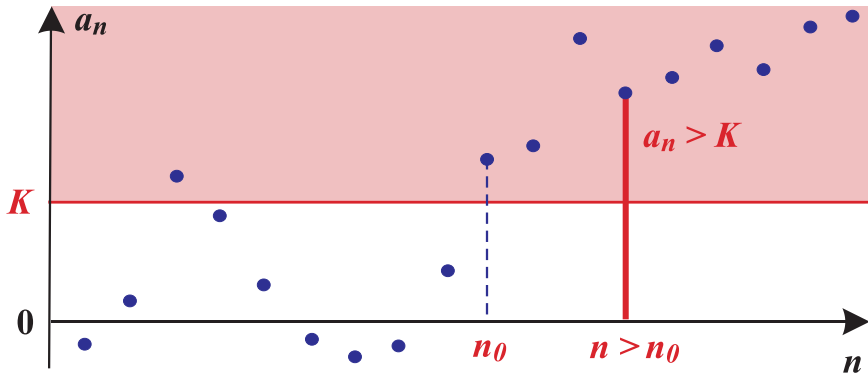
$$\frac{n+4}{n^3+n+1} < \frac{5n^2}{n^3} = \frac{5}{n}$$

plyne, že pokud zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{5}{n_0} < \varepsilon$, bude pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, splněna nerovnost

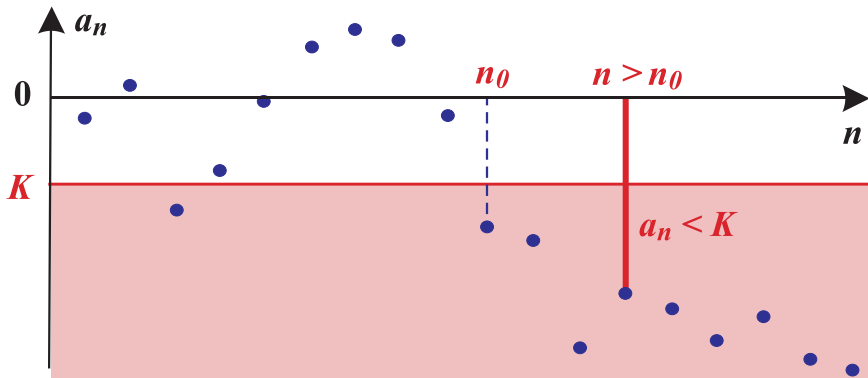
$$\left| \frac{n+4}{n^3+n+1} - 0 \right| = \frac{n+4}{n^3+n+1} < \frac{5}{n} < \frac{5}{n_0} < \varepsilon.$$

Tedy stačí zvolit $n_0 = \left[\frac{5}{\varepsilon} \right] + 1$, kde $[x]$ je tzv. celá část reálného čísla x , která je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definována jako jediné celé číslo, pro které platí nerovnosti $[x] \leq x < [x] + 1$.

Definice 9. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu** $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n > K$, neboli $a_n \in U_\varepsilon(+\infty)$.



Definice 10. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu** $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n < K$, neboli $a_n \in U_\varepsilon(-\infty)$.



Věta. Posloupnost (a_n) má limitu a (vlastní nebo nevlastní) právě tehdy, když mimo každé okolí $U_\varepsilon(a)$ leží pouze konečný počet členů posloupnosti (a_n) .

Důkaz. Nechť je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ a $U_\varepsilon(a)$ je libovolné okolí bodu a . Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, existuje k tomuto $\varepsilon > 0$ index n_0 takový, že pro každé $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Ale to je tvrzení, že pro každé $n > n_0$ leží všechny body a_n uvnitř okolí $U_\varepsilon(a)$. Tedy mimo množinu $U_\varepsilon(a)$ mohou ležet pouze body a_1, a_2, \dots, a_{n_0} , což je konečná množina.

Nechť naopak pro každé okolí $U_\varepsilon(a)$ leží mimo toto okolí pouze konečný počet členů posloupnosti (a_n) . Je-li dáno $\varepsilon > 0$, leží podle předpokladu mimo okolí $U_\varepsilon(a)$ pouze konečná množina členů posloupnosti. Označme tuto množinu M a zvolme $n_0 = \max_{a_n \in M} n$.

Protože je množina M konečná, toto maximum existuje a pro každé $n > n_0$ je $a_n \in U_\varepsilon(a)$, což znamená, že $|a_n - a| < \varepsilon$.

Případ nevlastních limit se dokáže obdobně. \square

Věta. *Posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Nechť má posloupnost (a_n) dvě limity a a b , $a \neq b$. Vyberme disjunktní okolí $U_{\varepsilon_1}(a)$ bodu a a $U_{\varepsilon_2}(b)$ bodu b , tj. $U_{\varepsilon_1}(a) \cap U_{\varepsilon_2}(b) = \emptyset$. Jestliže $a \neq b$, taková okolí vždy existují. Například pro $a, b \in \mathbb{R}$ lze zvolit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{|a - b|}{3} > 0$. Protože a je limitou posloupnosti (a_n) existuje index n_1 takový, že pro všechna $n > n_1$ je $a_n \in U_{\varepsilon_1}(a)$. Podobně protože b je limitou posloupnosti (a_n) existuje index n_2 takový, že pro všechna $n > n_2$ je $a_n \in U_{\varepsilon_2}(b)$. Nechť $n > \max(n_1, n_2)$. Pak je $a_n \in U_{\varepsilon_1}(a)$ a také $a_n \in U_{\varepsilon_2}(b)$. Ale z toho plyne, že $a_n \in U_{\varepsilon_1}(a) \cap U_{\varepsilon_2}(b) = \emptyset$. Ale to je spor. Tedy předpoklad $a \neq b$ vede ke sporu. Proto musí pro každé dvě limity posloupnosti (a_n) platit $a = b$. \square

Definice 11. Jestliže posloupnost (a_n) má vlastní limitu, nazýváme ji **konvergentní**. Jestliže posloupnost (a_n) má nevlastní limitu nebo limitu nemá, nazýváme ji **divergentní**.

Věta. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz. Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $a - 1 < a_n < a + 1$. Označme $K = \max(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a + 1)$ a $L = \min(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a - 1)$. Protože se jedná o konečné množiny, taková K a L existují. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $L \leq a_n \leq K$. \square

Věta. Necht' posloupnosti (a_n) a (b_n) konvergují, $c \in \mathbb{R}$. Necht'
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Pak konvergují také posloupnosti

$$(ca_n), (a_n + b_n), (a_n \cdot b_n)$$

a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca, \quad (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = ab.$$

*Jestliže je navíc $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, pak konverguje i posloupnost $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$
a platí*

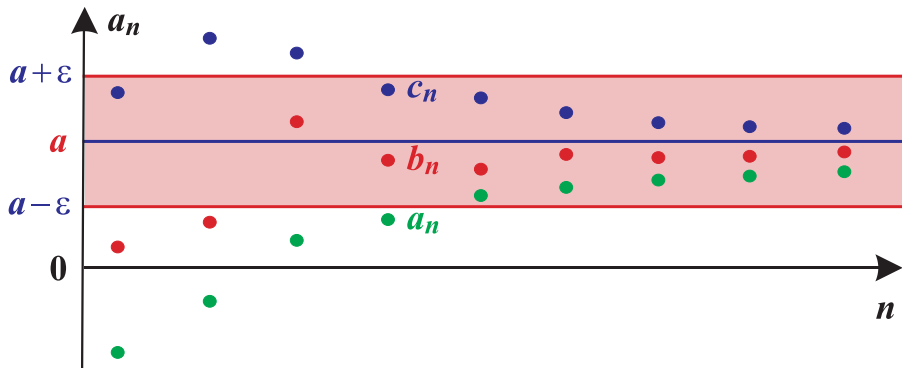
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

Věta. Jsou-li posloupnosti (a_n) a (b_n) konvergentní a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$, je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Důkaz. Necht' je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ a $a > b$. Pak je $\frac{a-b}{2} > 0$. K tomuto ε existují n_a a n_b taková, že pro každé $n > n_a$ je $a - \varepsilon = \frac{a+b}{2} < a_n$ a pro každé $n > n_b$ je $b_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$. Tedy pro $n > \max(n_a, n_b)$ platí $b_n < \frac{a+b}{2} < a_n$, což je spor. \square

Poznámka: Pro limity a a b může platit $a = b$ i v případě, kdy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < b_n$; například $a_n = 0$ a $b_n = \frac{1}{n}$.

Věta. Necht' pro členy posloupností (a_n) , (b_n) a (c_n) platí $a_n \leq b_n \leq c_n$ a existují limity $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. Pak existuje také limita posloupnosti (b_n) a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.



Důkaz. V případě, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$, je tvrzení zřejmé. Necht' $a \in \mathbb{R}$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existují n_a a n_c taková, že pro každé $n > n_a$ je $a - \varepsilon < a_n$ a pro všechna $n > n_b$ je $c_n < a + \varepsilon$. Tedy pro všechna $n > n_0 = \max(n_a, n_b)$ platí nerovnosti $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$. \square

Věta. Pro posloupnost (a_n) je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

Důkaz. Tvrzení je zcela zřejmé z definice limity. \square

Věta. Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a posloupnost (b_n) je omezená. Pak je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

Důkaz. Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ je také $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. Protože je posloupnost (b_n) omezená, existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $-K \leq b_n \leq K$. Tvrzení věty plyne ze zřejmé nerovnosti $-K|a_n| \leq |a_n b_n| \leq K|a_n|$ a z toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} K|a_n| = 0$. \square

☛ **Příklad 2.10.**

Najděte limitu posloupnosti $a_n = \frac{2^{\cos n}}{n + \sin n!}$.

Řešení: $a_n = b_n \cdot c_n$, kde $b_n = \frac{1}{n}$ a $c_n = \frac{2^{\cos n}}{1 + (\sin n!)/n}$. $\lim b_n = 0$;

$|\cos n| \leq 1 \Rightarrow 2^{\cos n} \leq 2$; $|\sin n!| \leq 1$, proto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n!}{n} = 0 \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin n!}{n}\right) = 1$. Posloupnost (c_n) je omezená a podle předchozí věty je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Věta. Je-li posloupnost (a_n) neklesající, resp. nerostoucí, existuje její limita (vlastní nebo nevlastní) a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf a_n.$$

Poznámka: Tvrzení této věty lze shrnout tak, že monotonní posloupnosti mají vždy limitu, která je rovna supremu pro neklesající posloupnosti a infimu pro posloupnosti nerostoucí.

Pomocí uvedené věty lze ukázat, že platí důležité vztahy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \text{obecněji} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Důkaz. Pro neklesající posloupnosti (pro nerostoucí anal.):

Nechť je (a_n) neklesající posloupnost, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $a_n \leq a_{n+1}$. Jestliže není posloupnost (a_n) omezená, musíme dokázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Nechť je dáno $K \in \mathbb{R}$. Protože posloupnost (a_n) není shora omezená, existuje index n_0 takový, že $a_{n_0} > K$. Ale protože je posloupnost neklesající, platí pro každé $n > n_0$ nerovnost $K < a_{n_0} \leq a_n$.

Nyní předpokládejme, že je neklesající posloupnost (a_n) shora omezená. Pak existuje $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = a \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že toto a je limitou posloupnosti (a_n) . Z první vlastnosti suprema plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq a$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z druhé vlastnosti suprema pak plyne, že existuje index n_0 takový, že $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Protože je posloupnost neklesající, platí pro každé $n > n_0$ nerovnost $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$. \square

Definice 12. Posloupnost (a_n) se nazývá **cauchyovská**, jestliže splňuje **Cauchy–Bolzanovu podmínku**:

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každá m, n , kde $m > n_0$ a $n > n_0$, platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Věta. Posloupnost (a_n) konverguje právě tehdy, když je cauchyovská.

Věta. Necht' je (b_n) posloupnost vybraná z posloupnosti (a_n) a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Pak je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Důkaz. Pro každé $\varepsilon > 0$ (nebo $K \in \mathbb{R}$) stačí zvolit $n_0 = k_{n_0}$.

☛ **Příklad 2.11.**

Dokažte, že $a_n = (-1)^n$ nemá limitu.

Řešení. Pro $n = 2k$ dostaneme vybranou posloupnost $b_k = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ s limitou 1, pro $n = 2k + 1$ vybranou posloupnost $b_k = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ s limitou -1 .

☛ **Příklad 2.12.**

Dokažte, že posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ nemá limitu.

Řešení. Pro sudá $n = 2k$ dostaneme vybranou posloupnost $b_k = a_{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}$. To je posloupnost vybraná z posloupnosti $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Proto je $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = e$. Pro lichá $n = 2k - 1$ dostaneme vybranou posloupnost

$$c_k = a_{2k-1} = \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1},$$

což je vybraná posloupnost z posloupnosti $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Protože všechny členy této posloupnosti jsou menší než 1, nemůže být její limita rovna $e > 1$. Ve skutečnosti je $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = e^{-1}$. Protože posloupnost a_n obsahuje dvě posloupnosti, které nemají stejnou limitu, neexistuje ani limita posloupnosti (a_n) .

Definice 13. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **hromadným bodem** posloupnosti (a_n) právě tehdy, když existuje vybraná posloupnost (b_n) taková, že $a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Věta. Bod a je hromadným bodem posloupnosti (a_n) právě tehdy, když pro každé okolí $U_\varepsilon(a)$ existuje nekonečná množina indexů $N_a \subset \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in N_a$ je $a_n \in U_\varepsilon(a)$.

Důkaz. Je to vlastně jen jinak přepsaná definice hromadného bodu posloupnosti. \square

☛ **Příklad 2.13.**

Pro posloupnost $a_n = (-1)^n$ jsou hromadné body 1 a -1 , neboť

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1) = -1.$$

☛ **Příklad 2.14.**

Najděte všechny hromadné body posloupnosti

$$a_n = \frac{(n+1)^2 + (-1)^n n^2}{n^2 + n + 1} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} n.$$

Řešení. $a_n = b_n \cdot c_n$, kde

$$b_n = \frac{(n+1)^2 + (-1)^n n^2}{n^2 + n + 1}, \quad c_n = \cos \frac{2}{\pi} 3n.$$

Ani jedna z těchto posloupností nemá limitu.

$$b_{2k} = \frac{8k^2 + 4k + 1}{4k^2 + 6k + 1} \rightarrow 2, \quad b_{2k-1} = \frac{4k - 1}{4k^2 - 2k + 1} \rightarrow 0.$$

Protože posloupnost c_n je omezená, je $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = 0$.

Uvažujme

$$a_{2k} = \frac{8k^2 + 4k + 1}{4k^2 + 6k + 1} \cdot \cos \frac{4\pi}{3} k;$$

$\cos \frac{4\pi}{3} k$ nabývá hodnot 1 pro $k = 3m$, $-\frac{1}{2}$ pro $k = 3m \pm 1$. Tedy z posloupnosti (a_{2k}) lze vybrat posloupnosti (a_{6k}) , která má limitu 2 a $(a_{6k \pm 2})$, která má limitu -1 . Hromadné body posloupnosti (a_n) jsou tedy -1 , 0 a 2 .

☛ **Příklad 2.15.**

Najděte všechny hromadné body posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots$$

Řešení. Tato posloupnost obsahuje všechna racionální čísla z intervalu $(0, 1)$, tj. čísla $\frac{p}{q}$, kde $0 < p < q$ jsou přirozená nesoudělná čísla, a to každé dokonce nekonečně krát. Protože každé reálné číslo lze s libovolnou přesností aproximovat posloupností racionálních čísel, je množina hromadných bodů posloupnosti (a_n) celý interval $\langle 0, 1 \rangle$.

Definice 14. Nechť je M množina všech hromadných bodů posloupnosti (a_n) . Číslo $S = \sup M$, resp. $s = \inf M$ se nazývá **limes superior**, resp. **limes inferior**, posloupnosti (a_n) a značí se $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ nebo $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, resp. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ nebo $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

☛ **Příklad 2.16.**

Pro posloupnost $a_n = (-1)^n$ je

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$$

Věta. Posloupnost (a_n) má limitu tehdy a jen tehdy, když

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

Věta. *Množina M je kompaktní právě tehdy, pokud lze z každé posloupnosti (a_n) takové, že $a_n \in M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, vybrat konvergentní posloupnost, jejíž limita leží v M .*