

# PŘEDNÁŠKA 4

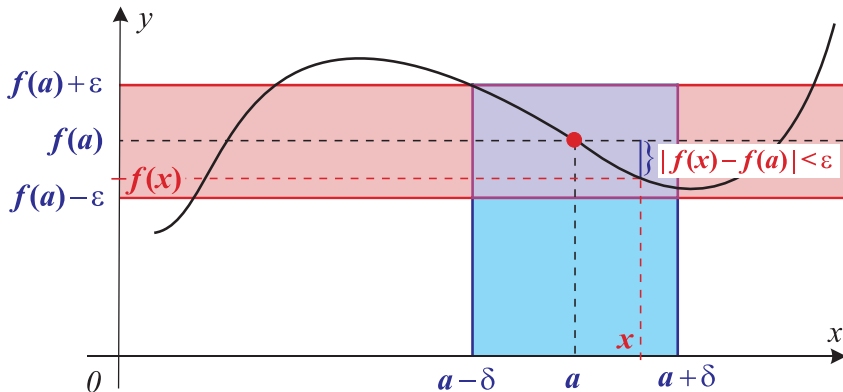
---

## LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

## 4.1 Spojitost funkce

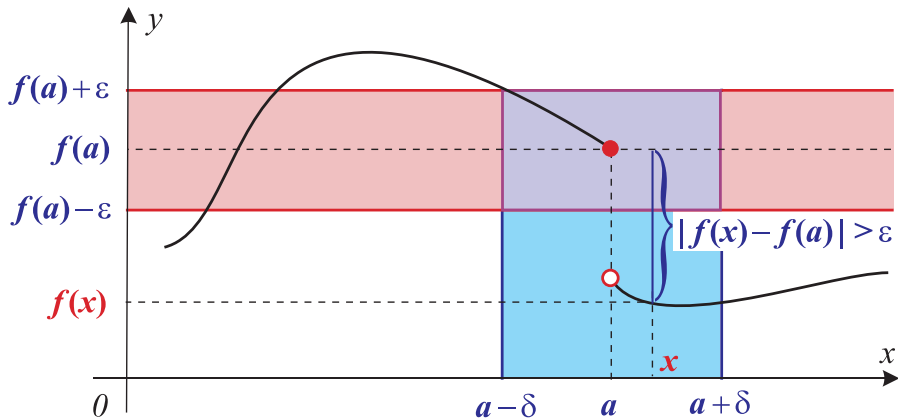
**Definice 1.** Řekneme, že funkce  $f(x)$  je **spojitá** v bodě  $a \in D_f$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D_f$  platí nerovnost:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



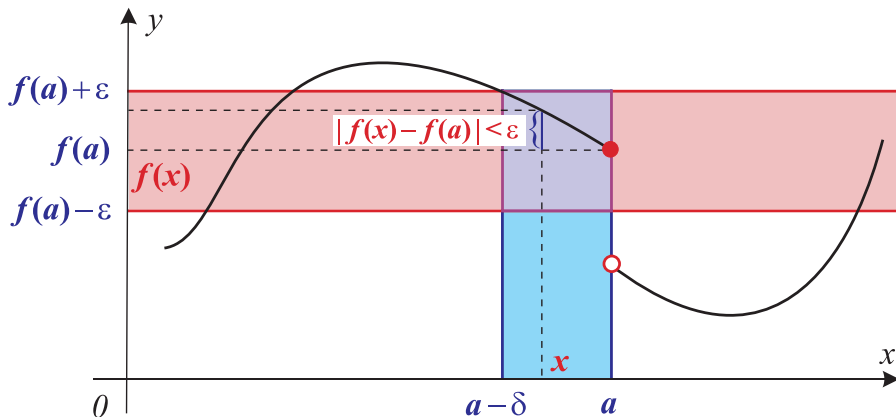
Následující funkce není spojitá, neboť pro uvedenou hodnotu  $\varepsilon$  existuje v každém okolí bodu  $a$  takový bod  $x$ , pro který je

$$|f(x) - f(a)| > \varepsilon.$$



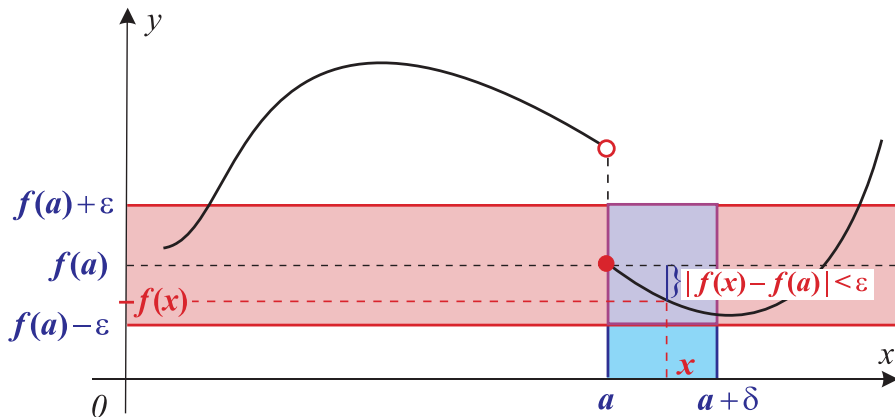
**Definice 2.** Řekněme, že funkce  $f(x)$  je **spojitá zleva** v bodě  $a \in D_f$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $x \in (a - \delta, a) \cap D_f$  platí nerovnost:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



**Definice 3.** Řekneme, že funkce  $f(x)$  je **spojitá zprava** v bodě  $a \in D_f$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $x \in \langle a, a + \delta \rangle \cap D_f$  platí nerovnost:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



**Věta.** Funkce  $f(x)$  spojitá v bodě  $a$  právě tehdy, když je v bodě  $a$  spojitá zleva i zprava.

**Důkaz.** Přímo z definice.

**Věta.** Necht' jsou funkce  $f, g$  spojité (resp. spojité zleva, resp. spojité zprava) v bodě  $a$ , necht'  $k \in \mathbb{R}$  je konstanta. Pak jsou v bodě  $a$  spojité (resp. spojité zleva, resp. spojité zprava) také funkce  $kf$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  a je-li  $g(a) \neq 0$ , také funkce  $\frac{f}{g}$ .

**Věta.** Necht' je funkce  $f(x)$  spojitá v bodě  $a$  a funkce  $g(y)$  je spojitá v bodě  $f(a)$ . Pak je složená funkce  $f(g(x))$  spojitá v bodě  $a$ .

**Poznámka.** Důkazy předchozích vět jsou analogické důkazům obdobných vět pro limity, které jsou uvedeny dále.

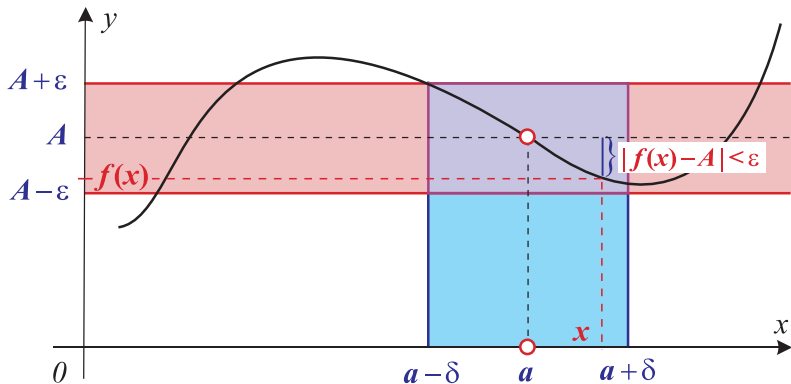
**Definice 4.** Funkce spojitá na množině  $X = D_f$  se nazývá spojitá.

**Věta.** Necht' je  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá funkce a  $X$  je uzavřená a omezená podmnožina  $\mathbb{R}$ . Pak v množině  $X$  existují body  $x_M$  a  $x_m$  takové, že pro každé  $x \in X$  je  $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ , tj. body, ve kterých funkce  $f(x)$  nabývá svého maxima a minima.

## 4.2 Limita funkce a její vlastnosti

### Definice 5. Vlastní limita ve vlastním bodě.

Nechť je dána funkce  $f(x)$ , nechť  $a \in \mathbb{R}$  je hromadný bod jejího definičního oboru. Řekneme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $a$  **limitu**  $A \in \mathbb{R}$ , píšeme  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $x \in D_f$ , pro které je  $0 < |x - a| < \delta$ , platí:  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .





Jiné vyjádření výroku  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  plyne z následující věty.

**Věta.** *Nechť je dána funkce  $f(x)$  a bod  $a \in \mathbb{R}$ , který je hromadným bodem jejího definičního oboru. Pak je*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

*právě tehdy, když ke každému okolí  $U_\varepsilon(A)$  bodu  $A$  existuje prstencové okolí  $P_\delta(a)$  takové, že pro každé  $x \in P_\delta(a) \cap D_f$  je  $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ .*

**Důkaz.** Věta je pouhým přepsáním definice limity, neboť  $P_\delta(a) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ ,  $U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ .  $\square$

Tato věta umožňuje jediným způsobem definovat limitu i v případě, že bod  $a$  nebo bod  $A$  je nevlastní.

**Definice 6.** Necht' je dána funkce  $f(x)$  a bod  $a \in \mathbb{R}^*$ , který je hromadným bodem jejího definičního oboru. Řekneme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $a \in \mathbb{R}^*$  **limitu**  $A \in \mathbb{R}^*$  právě tehdy, když ke každému okolí  $U(A)$  existuje prstencové okolí  $P(a)$  takové, že pro každé  $x \in P(a) \cap D_f$  je  $f(x) \in U(A)$ .

## Terminologie:

**Vlastní limita ve vlastním bodě:**  $a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R};$

**Nevlastní limita ve vlastním bodě:**  $a \in \mathbb{R}, A = \pm\infty;$

**Vlastní limita v nevlastním bodě:**  $a = \pm\infty, A \in \mathbb{R};$

**Nevlastní limita v nevlastním bodě:**  $a = \pm\infty, A \pm \infty.$

**Definice 7.** Nechť je dána funkce  $f(x)$  a bod  $a \in \mathbb{R}$ , který je hromadným bodem množiny  $\{x \in D_f; x < a\}$ . Řekneme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $a$  **limitu zleva**  $A$ , píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A,$$

jestliže ke každému okolí  $U(A)$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro všechna  $x \in (a - \delta, a) \cap D_f$  je  $f(x) \in U(A)$ .

Nechť je dána funkce  $f(x)$  a bod  $a \in \mathbb{R}$ , který je hromadným bodem množiny  $\{x \in D_f; x > a\}$ . Řekneme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $a$  **limitu zprava**  $A$ , píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A,$$

jestliže ke každému okolí  $U(A)$  bodu  $A$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro všechna  $x \in (a, a + \delta) \cap D_f$  je  $f(x) \in U(A)$ .

**Věta.** Rovnost  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  platí právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A.$$

**Důkaz.** Nechť je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . Protože je  $(a - \delta, a) \subset P_\delta(a)$ ,  $(a, a + \delta) \subset P_\delta(a)$ , platí  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$ .

Naopak, je-li  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$ , pak ke každému  $\varepsilon > 0$  existují  $\delta_-$  a  $\delta_+$  taková, že pro každé  $x \in D_f$ , pro které je  $0 < a - x < \delta_-$  nebo  $0 < x - a < \delta_+$ , je  $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ .

K danému okolí  $U_\varepsilon(A)$  stačí zvolit  $\delta = \min(\delta_-, \delta_+)$ . Je-li totiž  $x \in D_f \cap P_\delta(a)$ , je buď  $0 < a - x < \delta \leq \delta_-$  nebo  $0 < x - a < \delta \leq \delta_+$ , a tedy  $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ .  $\square$

**Věta.** Necht'  $a \in \mathbb{R}^*$  je hromadným bodem definičního oboru  $D_f$  funkce  $f(x)$ , necht'  $A \in \mathbb{R}^*$ . Pak platí:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  právě tehdy, když  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  pro každou posloupnost  $(x_n)$  konvergující k bodu  $a$ , kde  $x_n \in D_f \setminus \{a\}$ .

**Důkaz.** Necht'  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  a  $(x_n)$  je libovolná posloupnost s uvedenými vlastnostmi. Necht' je dáno  $U_\varepsilon(A)$ . Pak existuje  $P_\delta(a)$ , že pro každé  $x \in D_f \cap P_\delta(a)$  je  $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ . Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , existuje  $n_0$ , že pro všechna  $n > n_0$  je  $x_n \in P_\delta(a)$  a tedy  $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ , tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Naopak, necht'  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$ . Pak existuje  $U_\varepsilon(A)$  takové, že pro každé  $\delta > 0$  existuje  $x \in D_f \cap P_\delta(a)$ , pro které je  $f(x) \notin U_\varepsilon(A)$ . Vezměme toto  $\varepsilon > 0$ , označme  $\delta = 1/n > 0$ . Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je množina  $X_n = \{x \in D_f \cap P_{1/n}(a); f(x) \notin U_\varepsilon(A)\}$  neprázdná. Z každé množiny  $X_n$  vybereme jeden prvek  $x_n$  a tak získáme posloupnost  $(x_n)$ , kde pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $x_n \in D_f$ ,  $x_n \neq a$ . Protože pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí:  $|a - x_n| < 1/n$ , je  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Na druhou stranu ale pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$ . Tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$ .  $\square$

**Věta.** Funkce  $f(x)$  má v bodě  $a$  nejvýše jednu limitu, rovněž nejvýše jednu limitu zprava, resp. zleva.

**Důkaz.** Necht' je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  a zároveň  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ , kde  $A < B$ . Pak existují disjunktní okolí  $U_{\varepsilon_A}(A)$  a  $U_{\varepsilon_B}(B)$ , tj. taková okolí, jejichž průnik je prázdná množina. Ale protože  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ , existují prstencová okolí  $P_{\delta_A}(a)$  a  $P_{\delta_B}(a)$  taková, že pro každé  $x \in D_f \cap P_{\delta_A}(a)$  je  $f(x) \in U_{\varepsilon_A}(A)$  a  $x \in D_f \cap P_{\delta_B}(a)$  je  $f(x) \in U_{\varepsilon_B}(B)$ .

Protože  $a$  je hromadný bod  $D_f$ , je pro  $\delta = \min(\delta_A, \delta_B)$  množina  $D_f \cap U_\delta(a)$  neprázdná. Tedy pro  $x \in D_f \cap P_\delta(a)$  je  $f(x) \in U_{\varepsilon_A}(A) \cap U_{\varepsilon_B}(B) = \emptyset$ . Ale to je spor, a tedy  $A = B$ .  $\square$

**Věta.** Funkce  $f(x)$  je **spojitá** v bodě  $a$  právě tehdy, když je  $a$  izolovaný bod jejího definičního oboru nebo když existuje vlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

**Důkaz.** Necht' je funkce  $f(x)$  spojitá v bodě  $a$ , který je hromadným bodem  $D_f$ . Podle definice spojitosti existuje ke každému okolí  $U_\varepsilon(f(a))$  takové okolí  $U_\delta(a)$ , že pro každé  $x \in D_f \cap U_\delta(a)$  je  $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ . Protože  $P_\delta(a) \subset U_\delta(a)$ , platí pro každé  $x \in D_f \cap P_\delta(a) : f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ , tj.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Naopak, je-li  $a$  izolovaným bodem množiny  $D_f$ , existuje okolí  $P_\delta(a)$  takové, že  $P_\delta(a) \cap D_f = \emptyset$ . Protože  $D_f \cap U_\delta(a) = \{a\}$ , pro každé okolí  $U_\varepsilon(f(a))$  platí, že pro všechna  $x \in D_f \cap U_\delta(a) = \{a\}$  je  $f(x) = f(a) \in U_\varepsilon(f(a))$ .

Je-li bod  $a$  hromadným bodem  $D_f$  a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , pak ke každému okolí  $U_\varepsilon(f(a))$  existuje  $P_\delta(a)$  takové, že pro každé  $x \in D_f \cap P_\delta(a)$  je  $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ . Ale protože  $U_\delta(a) = P_\delta(a) \cup \{a\}$  a  $f(a) \in U_\varepsilon(f(a))$ , je  $f(x)$  spojitá v bodě  $a$ .  $\square$

### ☛ **Příklad 4.1.**

Funkce  $f(x) = 2x$  je spojitá v každém bodě. Budeme-li hledat limitu například v bodě 3, pak podle předchozí věty je  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 6$ .

### ☛ **Příklad 4.2.**

Funkce  $g(x)$  definovaná vztahem  $g(3) = 2$ ,  $g(x) = 2x$  pro  $x \neq 3$ , se pro  $x \neq 3$  shoduje s funkcí  $f(x)$ , tedy

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6.$$

Protože  $g(3) = 2 \neq 6$ , není funkce  $g(x)$  v bodě 3 spojitá.



**Věta.** Funkce  $f(x)$  je **spojitá zleva**, resp. **spojitá zprava** v bodě  $a$  právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

**Věta.** Je-li  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ , pak existuje okolí  $P_\delta(a)$  takové, že je funkce  $f(x)$  v tomto okolí omezená.

**Důkaz.** Zvolme  $\varepsilon = 1$ . Pak existuje prstencové okolí  $P_\delta(a)$  takové, že pro každé  $x \in P_\delta(a)$  je  $A - 1 < f(x) < A + 1$ .  $\square$

**Věta.** Necht' je dána funkce  $f(x)$  a bod  $a$ , který je hromadným bodem jejího definičního oboru. Pak existuje konečná limita funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  tehdy a jen tehdy, když je splněna Cauchy–Bolzanova podmínka: Ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé dva body  $x_1, x_2 \in D_f$ , pro které  $0 < |x_1 - a| < \delta$  a  $|x_2 - a| < \delta$ , platí:  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .

**Věta.** *Nechť existují vlastní limity*  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ .

*Potom platí:*  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = A + B$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = AB$ . **Je-li**

*navíc*  $B \neq 0$ , **pak**  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right) (x) = \frac{A}{B}$ .

**Důkaz.** 1) Protože  $|f(x) + g(x) - A - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$ , stačí k danému  $\varepsilon > 0$  uvažovat takové  $P_\delta(a)$ , aby pro každé  $x \in P_\delta(a)$  bylo  $f(x) \in U_{\varepsilon/2}(A)$ ,  $g(x) \in U_{\varepsilon/2}(B)$ .

2) Protože má  $f(x)$  konečnou limitu, existuje okolí  $P_\Delta(a)$ , na němž je  $f(x)$  omezená, tedy existuje takové  $K > 0$ , že pro každé  $x \in P_\Delta(a)$  je  $|f(x)| < K$ . Protože  $|f(x)g(x) - AB| = |f(x)(g(x) - B) + B(f(x) - A)| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - B| + |B| \cdot |f(x) - A| < K \cdot |g(x) - B| + |B| \cdot |f(x) - A|$ , stačí zvolit  $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a)$ , kde vhodně odhadneme  $|f(x) - A|$  a  $|g(x) - B|$ .

3) Existuje okolí  $P_\Delta(a)$  takové, že pro každé  $x \in P_\Delta(a)$  je  $g(x) > |B|/2$  a funkce  $1/g(x)$  má smysl. Pro každé  $x \in P_\Delta(a)$  pak platí:  $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - g(x)|}{|Bg(x)|} < \frac{2|B - g(x)|}{B^2}$ . K danému  $\varepsilon > 0$  stačí zvolit  $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a)$  takové, aby pro každé  $x \in P_\delta(a)$  bylo  $|B - g(x)| < \frac{B^2}{2} \varepsilon$ .  $\square$

**Poznámka:** Předchozí věta platí i v případě, kdy  $A, B \in \mathbb{R}^*$ , a příslušné operace jsou v  $\mathbb{R}^*$  definovány.

**Věta.** Předpokládejme, že  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$ . Nechť existuje okolí  $P_\Delta(a)$  takové, že pro každé  $x \in D_f \cap P_\Delta(a)$  je  $f(x) \neq A$ . Pak je  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$ .

**Důkaz.** Nechť je dáno okolí  $U_\varepsilon(B)$ . Pak existuje prstencové okolí  $P_\eta(A)$  bodu  $A$  takové, že pro každé  $y \in D_g \cap P_\eta(A)$  je  $g(y) \in U_\varepsilon(B)$ . Ale protože je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , existuje prstencové okolí  $P_{\delta_1}(a)$  takové, že pro každé  $x \in D_f \cap P_{\delta_1}(a)$  je  $f(x) \in U_\eta(A)$ . Nechť je  $P_\delta(a)$  prstencové okolí bodu  $a$  takové, že  $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a) \cap P_{\delta_1}(a)$ . Pak pro každé  $x \in D_f \cap P_\delta(a)$  platí  $f(x) \in U_\eta(A) \setminus \{A\} = P_\eta(A)$ . Tedy pro taková  $x$  je  $h(x) = g(f(x)) \in U_\varepsilon(B)$ .  $\square$

### ☛ Příklad 4.3.

Nechť  $f(x) = 0$  a  $g(x) = 0$  pro  $x \neq 0$ ,  $g(0) = 1$ . Pak je  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , ale  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 1$ , protože pro každé  $x \in \mathbb{R}$  je  $g(f(x)) = 1$ .

Předpoklad existence  $P_{\Delta}(a)$  v předcházející větě je tedy podstatný.

**Věta.** Necht' jsou dány funkce  $f(x), g(x)$ , necht' existuje takové okolí  $P_\Delta(a)$  že pro všechna  $x \in D_f \cap P_\Delta(a)$  je

$$f(x) \leq g(x).$$

Existují-li limity  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , pak platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

**Důkaz.** Předpokládejme, že  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ . Pak existují okolí  $U_{\varepsilon_A}(A)$ ,  $U_{\varepsilon_B}(B)$ , pro která je  $U_{\varepsilon_A}(A) \cap U_{\varepsilon_B}(B) = \emptyset$ . Proto pro každé  $y_A \in U_{\varepsilon_A}(A)$ ,  $y_B \in U_{\varepsilon_B}(B)$  je  $y_A > y_B$ . Zároveň však existuje okolí  $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a)$  takové, že pro každé  $x \in U_\delta(a)$  je  $f(x) \in U_{\varepsilon_A}(A)$ ,  $g(x) \in U_{\varepsilon_B}(B)$ . Z toho plyne  $f(x) > g(x)$ , což je spor.  $\square$

**Poznámka.** I když je  $f(x) < g(x)$ , může platit:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

☛ **Příklad 4.4.**

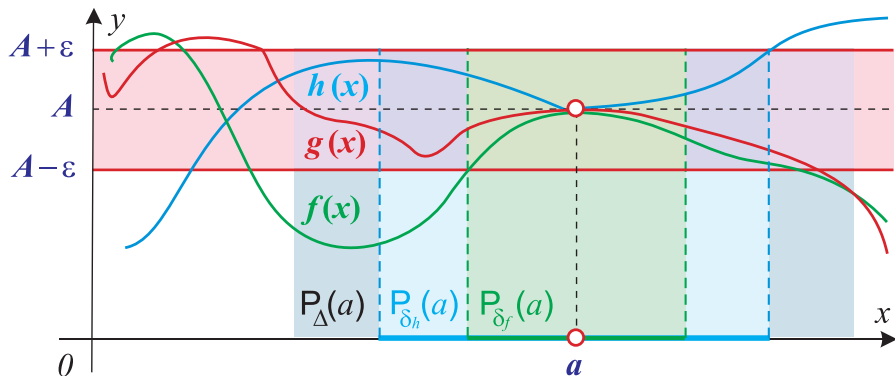
Uvažujme funkce  $f(x) = -2x$ ,  $g(x) = 2x$ . V každém  $P_\Delta(0)$  platí:

$$f(x) < g(x),$$

přitom je

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

**Věta.** Necht'  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ , necht' existuje  $P_\Delta(a)$  takové, že pro všechna  $x \in P_\Delta(a)$  platí:  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ . Potom je také  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ .



**Důkaz.** Necht' je dáno  $U_\varepsilon(A)$ . Pak existují  $P_{\delta_f}(a)$  a  $P_{\delta_h}(a)$  taková, že pro každé  $x \in P_{\delta_f}(a)$  je  $f(x) \in U_\varepsilon(A)$  a pro každé  $x \in P_{\delta_h}(a)$  je  $h(x) \in U_\varepsilon(A)$ . Označme  $P_\delta(a) = P_{\delta_f}(a) \cap P_{\delta_h}(a)$ . Pro každé  $x \in P_\delta(a)$  zřejmě platí:  $A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$ .  $\square$

**Důsledek.** *Nechť existuje číslo  $\delta > 0$  tak, že pro každé  $x \in P_\delta(a)$  platí*

- (i)  $|g(x)| \leq h(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ . *Pak je  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .*
- (ii)  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ . *Pak je  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ .*
- (iii)  $g(x) \leq h(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty$ . *Pak je  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ .*

**Věta.** *Existuje-li  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , pak platí:  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)|$ .*

**Důkaz.** Plyne přímo z definice limity.  $\square$

**Věta.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  *právě tehdy, když  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ .*

**Důkaz.** Přepsání definice obou limit.  $\square$



**Věta.** Necht'  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  a existuje okolí  $P_\Delta(a)$  takové, že funkce  $g(x)$  je omezená na  $P_\Delta(a)$ . Pak je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$ .

**Důkaz.** Protože je funkce  $g(x)$  omezená na  $P_\Delta(a)$ , existuje  $K > 0$  takové, že pro všechna  $x \in P_\Delta(a)$  je  $|g(x)| < K$ . Na tomto okolí tedy platí:  $|f(x) \cdot g(x)| < K|f(x)|$ .

Protože je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , existuje ke každému  $\varepsilon > 0$  takové okolí  $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a)$ , že pro každé  $x \in P_\delta(a)$  je  $|f(x)| < \varepsilon/K$ . Pro všechna  $x \in P_\delta(a)$  tedy platí:  $|f(x) \cdot g(x)| < K \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$ .

#### ☛ **Příklad 4.5.**

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$ , neboť  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $|\sin x| \leq 1$ .

**Věta.** Necht'  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  a necht' existuje okolí  $P_\Delta(a)$  tak, že pro každé pro  $x \in P_\Delta(a)$  platí:

(i)  $f(x) > 0$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ .

(ii)  $f(x) < 0$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .

**Důkaz.** K danému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každé  $x \in P_\delta(a)$  je  $|f(x)| < \varepsilon$ . Pak platí  $1/|f(x)| > 1/\varepsilon$  a odtud plynou obě dokazovaná tvrzení.

**Věta.** Jestliže  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$ , pak  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

**Důkaz.** Analogicky s důkazem předchozí věty.

**Věta.** *Nechť existuje  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$ . Pak existuje takové okolí  $P_\delta(a)$ , že platí:*

(i) *je-li  $A > 0$ , pak je  $f(x) > 0$  pro všechna  $x \in P_\delta(a)$ ,*

(ii) *je-li  $A < 0$ , pak je  $f(x) < 0$  pro všechna  $x \in P_\delta(a)$ .*

**Důkaz.** (i) Uvažujme  $\varepsilon = A/2 > 0$ . Pak existuje takové  $\delta > 0$ , že pro všechna  $x \in P_\delta(a)$  je

$$0 < \frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} = A - \varepsilon < f(x).$$

(ii) Analogicky: uvažujme  $\varepsilon = -A/2 > 0$ . Pak existuje takové  $\delta > 0$ , že pro všechna  $x \in P_\delta(a)$  je

$$f(x) < A + \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} < 0.$$

**Poznámka.** Uvedené věty platí i pro limity zleva a zprava.

☛ **Příklad 4.6.**

Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} \quad \text{v bodě } a = 1.$$

**Řešení.**  $1 \in D_f$ , funkce  $f(x)$  je v tomto bodě spojitá, limita je rovna funkční hodnotě:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} = \frac{-2}{-9} = \frac{1}{4}.$$

#### ☛ **Příklad 4.7.**

Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} \quad \text{v bodě } a = 3.$$

**Řešení.** 3 nepatří do  $D_f$ , je však jeho hromadným bodem. Při hledání limity pracujeme vždy s prstencovým okolím daného bodu, kde můžeme psát:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} = \frac{(x - 3)(x^2 - 2x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{(x^2 - 2x + 2)}{(x + 3)}.$$

Vzniklá funkce je v bodě 3 spojitá a její limita, která je rovna limitě původní funkce, je rovna  $5/6$ .

V takovýchto případech můžeme psát přímo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 - 2x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x + 2)}{(x + 3)} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

☛ **Příklad 4.8.**

Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{2x^3 + 4x^2 - 9x + 3} \quad \text{v bodě } a = +\infty.$$

**Řešení.**  $+\infty$  je hromadným bodem  $D_f$ ; postup je stejný jako při hledání limit posloupností:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{2x^3 + 4x^2 - 9x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( 3 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{6}{x} \right)}{x^3 \left( 2 + \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{3}{x} \right)} = \frac{3}{2}$$

### ☛ **Příklad 4.9.**

Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{3x} \quad \text{v bodě } a = 0.$$

**Řešení.** Bod  $a = 0$  nepatří do  $D_f$ , ale je jeho hromadným bodem.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{3x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{3x(\sqrt{x+4} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

☛ **Příklad 4.10.**

Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = x \left( \sqrt{x^2 + 4} - x \right) \quad \text{v bodě } a = +\infty.$$

**Řešení.** Bod  $a = +\infty$  je hromadným bodem  $D_f$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \left( \sqrt{x^2 + 4} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( \sqrt{x^2 + 4} - x \right) \left( \sqrt{x^2 + 4} + x \right)}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( x^2 + 4 - x^2 \right)}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x \left( \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 1} = \frac{4}{2}. \end{aligned}$$