PŘEDNÁŠKA 5

DERIVACE FUNKCE

5.1 Pojem derivace

Definice 1. Derivace funkce v bodě.
Nechť je dána funkce $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bod x_0, který je vnitřním bodem definičního oboru D_f. Existuje-li limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

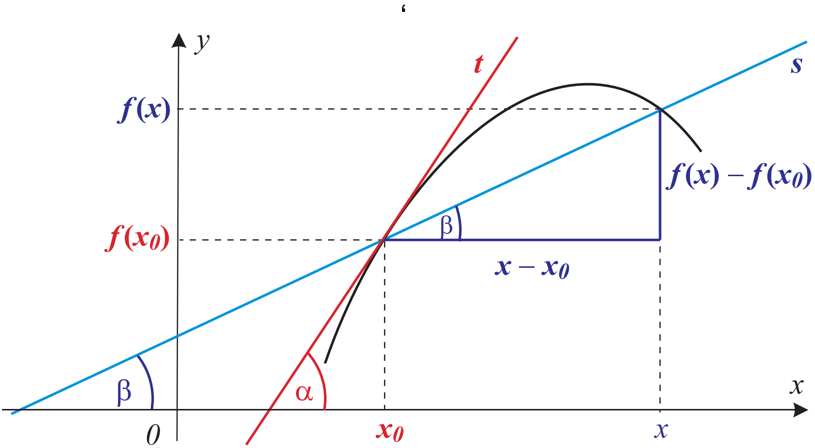
nazveme ji **derivace funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0.

Poznámka. Pro derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0 se rovněž používá označení

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

Označíme-li $h = x - x_0$, pak můžeme definiční vztah přepsat ve tvaru:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$



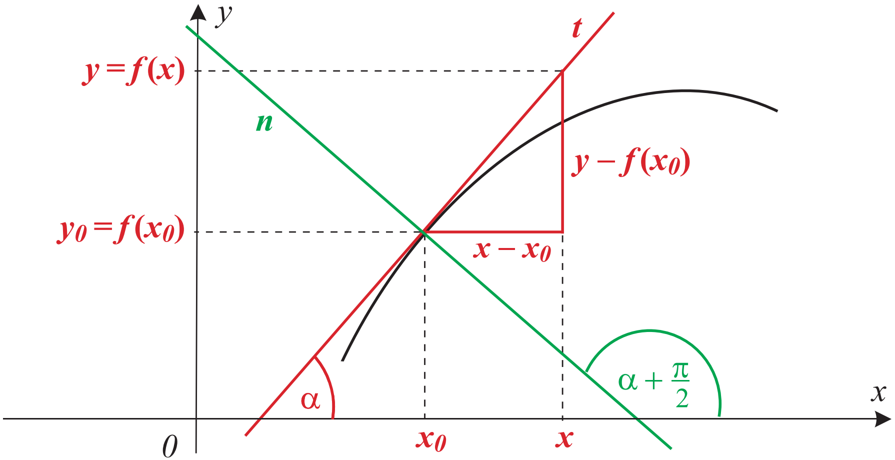
Směrnice sečny s : $\xrightarrow[x \to x_0]{}$ **Směrnice tečny** t :

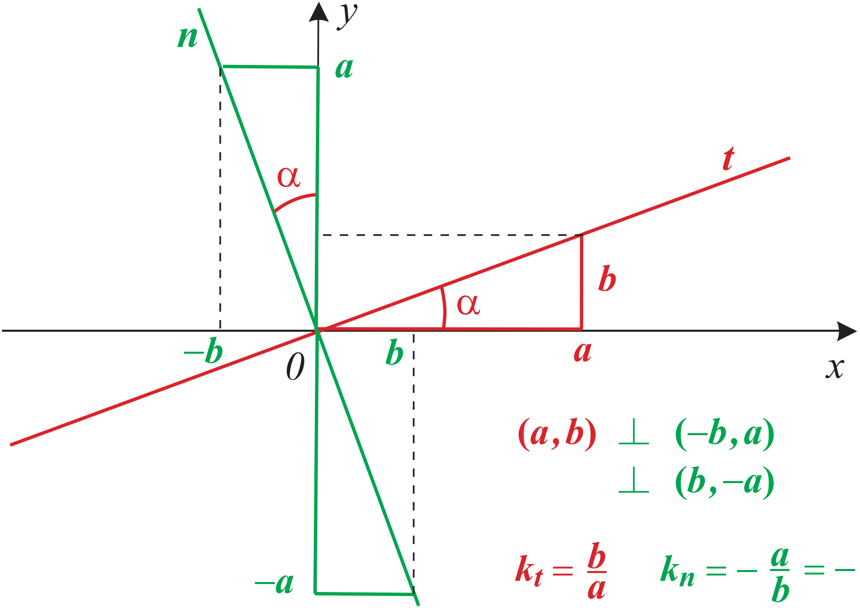
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tečna a normála ke grafu funkce

Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 udává směrnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ procházející bodem $(x_0, f(x_0))$. Pro souřadnice libovolného bodu této tečny proto platí:

$$k_t = f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{neboli} \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$





$$(a, b) \perp (-b, a)$$
$$\perp (b, -a)$$

$$k_t = \frac{b}{a} \qquad k_n = -\frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Normála ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$ je kolmá na tečnu, její směrnice je proto

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

a pro libovolný bod normály platí: $k_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0}.$

Získali jsme tedy rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$:

tečna $t: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

normála $n: \quad y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Definice 2. Nechť je dána funkce $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bod x_0, který je vnitřním bodem definičního oboru D_f. Jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\tau(h), \qquad \text{kde} \quad \lim_{h\to 0} = \tau(h)\,,$$

nazývá se lineární funkce

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = Ah$$

diferenciál funkce $f(x)$ **bodě** x_0.

Má-li funkce $f(x)$ diferenciál v bodě x_0, říkáme, že je **diferencovatelná v bodě** x_0.

Jinými slovy, funkce $f(x)$ je diferencovatelná v bodě $x_0 \in D_f$ právě tehdy, když ji lze v okolí bodu x_0 aproximovat lineární funkcí ve výše zmíněném smyslu: $f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + Ah$.

Věta. *Funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když existuje konečná derivace $f'(x_0)$. V takovém případě je $\mathrm{d}f(x_0; h) = f'(x_0)h$.*

Důkaz. Nechť je funkce $f(x)$ diferencovatelná v bodě x_0. Pak existuje konstanta $A \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0\,,$$

tj.
$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - A \right) = f'(x_0) - A = 0\,.$$

Proto $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h$.

Naopak, nechť existuje $f'(x_0)$. Označme

$$\tau(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h}\,.$$

Pak je

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0\,.$$

5.2 Fyzikální aplikace derivace

Značí-li $s(t)$ dráhu, kterou urazil po přímce se pohybující hmotný bod v čase t od okamžiku, kdy jsme začali čas měřit, pak podíl

$$v_p = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

představuje **průměrnou rychlost** tohoto pohybu mezi časovými okamžiky t_0 a t. Výraz

$$v(t_0) = \lim_{x \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

potom udává **okamžitou rychlost** pohybu v čase t_0.

Podobně

$$a(t_0) = \lim_{x \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

udává **okamžité zrychlení** pohybu v čase t_0.

5.3 Ekonomické aplikace derivace

- Označme symbolem TC **celkové náklady (total cost)**, které jsou funkcí určitého vstupu, resp. výrobního faktoru F. Průměrné rychlosti budou odpovídat **průměrné náklady** AC **(average cost)** a okamžité rychlosti budou odpovídat **mezní náklady** MC **(marginal cost)**:
$$MC = \frac{\mathrm{d}TC}{\mathrm{d}F}\,.$$
- Označme symbolem TP **celkový produkt (total product)**, který je funkcí určitého vstupu F. Průměrné rychlosti bude odpovídat **průměrný produkt** AP **(average product)** a okamžité rychlosti bude odpovídat **mezní produkt** MP **(marginal cost)**:
$$MP = \frac{\mathrm{d}TP}{\mathrm{d}F}\,.$$
- Označme symbolem TU **celkový užitek (total utility)**, který je funkcí množství spotřebovávaného statku Q. Okamžité rychlosti bude odpovídat **mezní užitek** MU **(marginal utility)**:
$$MU = \frac{\mathrm{d}TU}{\mathrm{d}Q}\,.$$

Definice 3. Jednostranné derivace.

Nechť je dána funkce $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a takový bod x_0, že pro nějaké $\delta > 0$ je $\langle x_0, x_0 + \delta) \subset \mathrm{D}_f$. Existuje-li limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazveme ji **derivace zprava funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0.

Je-li pro nějaké $\delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0\rangle \subset \mathrm{D}_f$ a existuje-li limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazveme ji **derivace zleva funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0.

Definice 4. Derivace na intervalu.

Má-li funkce f derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b), pak funkci f', která každému bodu $x \in (a, b)$ přiřazuje hodnotu derivace $f'(x)$, nazýváme **derivací funkce f na otevřeném intervalu (a, b).**

Má-li funkce f derivaci na otevřeném intervalu (a, b) a má-li obě jednostranné derivace $f'(a+)$, $f'(b-)$, pak funkci f', definovanou předpisem

$$f'(x) = \begin{cases} f'(a+) & \text{pro } x = a\,, \\ f'(x) & \text{pro } x \in (a, b)\,, \\ f'(b-) & \text{pro } x = b \end{cases}$$

nazýváme **derivací funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.**

5.4 Vlastnosti derivace

Věta (Vztah mezi spojitostí a derivací).

Má-li funkce f derivaci v bodě x_0, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz. Existuje-li v bodě x_0 derivace funkce $f(x)$, pak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right] = \\ = f(x_0) + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = \\ = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)\,.\end{aligned}$$

Funkce $f(x)$ je tedy v bodě x_0 spojitá.

Poznámka. Obrácené tvrzení neplatí, neboť například funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě 0, ale nemá v něm derivaci.

Věta (Algebraické operace s derivacemi).

Mají-li funkce f a g derivace v bodě x_0, pak v tomto bodě existují i derivace funkcí kf, kde $k \in \mathbb{R}$, $f \pm g$ a fg a platí:

$$(kf)'(x_0) = kf'(x_0)\,, \tag{5.1}$$

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)\,, \tag{5.2}$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,. \tag{5.3}$$

Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, má také funkce $\dfrac{f}{g}$ derivaci v bodě x_0 a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,. \tag{5.4}$$

Stejné vztahy platí pro derivace funkcí na intervalu.

Důkaz.

$$(kf)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{kf(x_0+h) - kf(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} k\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = kf'(x_0)$$

$$(f \pm g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h) \pm g(x_0+h)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x_0)) \pm (g(x_0+h) - g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$$

$$= f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0+h) + \lim_{h\to 0} f(x_0) \frac{(g(x_0+h) - g(x_0))}{h} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) \pm f(x_0)g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right) =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Věta (Derivace složené funkce).

Existuje-li derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $g(x_0)$, pak existuje také derivace složené funkce $h = f \circ g$ v bodě x_0 a platí:

$$h'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\,. \tag{5.5}$$

Věta (Derivace inverzní funkce).

Nechť funkce $x = f(y)$ je ryze monotónní v intervalu J a nechť má derivaci $f'(y_0) \neq 0$ v bodě $y_0 \in J$. Pak také inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0) \in I = f(J)$ a platí:

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} \equiv \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}\,. \tag{5.6}$$

Důkaz. Dokazované tvrzení plyne limitním přechodem v rovnosti

$$\frac{f^{-1}(x - x_0) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\dfrac{x - x_0}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} = \frac{1}{\dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}}.$$

5.5 Derivace elementárních funkcí

(i) Derivace konstatntní funkce $f(x) = c$ je v každém bodě rovna nule, $(c)' = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$(c)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

(ii) $(x)' = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$(x)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

(iii) $(x^2)' = 2x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$(x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2x+h)h}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 1$$

(iv) $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro každé $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) x^{n-1}h + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

(v) $(\sin x)' = \cos x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h} = \\
&= \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}
\end{aligned}
$$

Tímto způsobem je možné odvodit derivace všech základních elementárních funkcí – uveďme zde jejich přehled.

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0, && x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = c\,; \\
(x^n)' &= nx^{n-1}\,, && n \in \mathbb{N}\,, \, x \in \mathbb{R}\,; \\
& && n \in \mathbb{Z}\,, \, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,; \\
& && n \in \mathbb{R}\,, \; x > 0; \\
(e^x)' &= e^x\,, && x \in \mathbb{R}; \\
(a^x)' &= a^x \ln a; && x \in \mathbb{R}, \, a \in (0; \infty); \\
(\ln|x|)' &= \frac{1}{x}; && x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\
(\log_a|x|)' &= \frac{1}{x \ln a}; && x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \, a \in (0, 1) \cup (1, \infty);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x; && x \in \mathbb{R}; \\
(\cos x)' &= -\sin x; && x \in \mathbb{R}; \\
(\sinh x)' &= \cosh x; && x \in \mathbb{R}; \\
(\cosh x)' &= \sinh x; && x \in \mathbb{R}; \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}; && x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}; \\
(\operatorname{cotg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}; && x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}; \\
(\operatorname{tgh} x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x}; && x \in \mathbb{R}; \\
(\operatorname{cotgh} x)' &= \frac{-1}{\sinh^2 x}; && x \in \mathbb{R} - \{0\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & x &\in (-1,1);\\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; & x &\in (-1,1);\\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}; & x &\in \mathbb{R};\\
(\operatorname{arccotg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}; & x &\in \mathbb{R};\\
(\operatorname{argsinh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; & x &\in \mathbb{R};\\
(\operatorname{argcosh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; & x &\in (1,\infty);\\
(\operatorname{argtgh} x)' &= \frac{1}{1-x^2}; & x &\in (-1,1);\\
(\operatorname{argcotgh} x)' &= \frac{1}{1-x^2}; & x &\in (-\infty,-1)\cup(1,\infty).
\end{aligned}
$$

☛ *Příklad 5.1.*

(a) $f(x) = 5x^6 + 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 3x + 12$

$$f'(x) = 5 \cdot 6x^5 + 2 \cdot 4x^3 + 7 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 3 + 0 =$$

$$= 30x^5 + 8x^3 + 21x^2 - 8x + 3$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2}{3x^2 - 12}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$$f'(x) = \frac{4x^3(3x^2 - 12) - (x^4 - 2)6x}{(3x^2 - 12)^2} = \frac{6x^5 - 48x^3 + 12x}{9x^4 - 72x^2 + 144}$$

(c) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt[5]{x^4}$$

(d) $f(x) = \sin(x^5 + 3x)$

$$f'(x) = \cos(x^5 + 3x) \cdot (5x^4 + 3) = (5x^4 + 3)\cos(x^5 + 3x)$$

(e) $f(x) = \left(\sin(x^5 + 3x)\right)^4$

$$f'(x) = 4\left(\sin(x^5 + 3x)\right)^3 \cdot \cos(x^5 + 3x) \cdot (5x^4 + 3)$$

(f) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

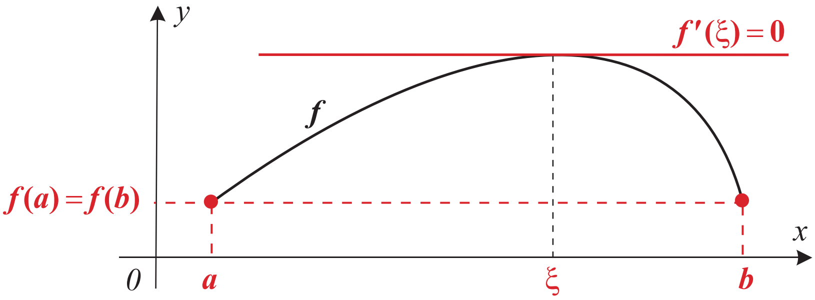
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\mathrm{e}^{\ln(\sin x)^{\cos x}}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\cos x \ln \sin x}\right)' = \\
&= \mathrm{e}^{\cos x \ln \sin x} \cdot (-\sin x \ln \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cos x) = \\
&= (\sin x)^{\cos x} (-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x})
\end{aligned}
$$

(g) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1+x^2}$

$$
f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{x^4 + 2x^2 + 2}
$$

5.6 VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

Věta (Rolle). *Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b), nechť platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.*



Důkaz. Je-li funkce f konstantní, je tvrzení zřejmé.

Není-li konstantní, pak podle Weierstrassovy věty existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že číslo $f(\xi)$ je maximem nebo minimem funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Předpokládejme nejprve, že toto číslo je maximem. Pokud by bylo

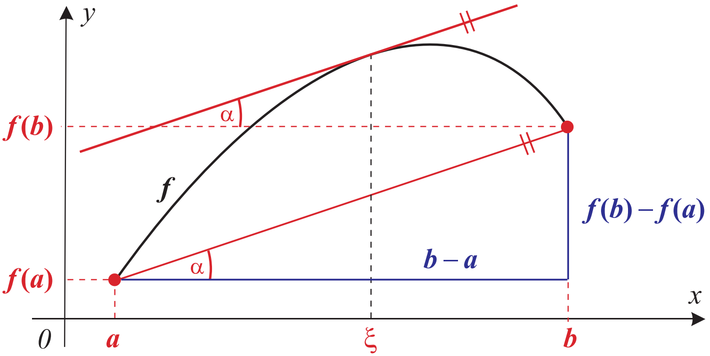
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0\,,$$

existovalo by takové okolí $\mathrm{P}(x_0, \delta)$, že

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathrm{P}(x_0, \delta)\,.$$

Pak by bylo $f(x) > f(x_0)$ pro všechna $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, což je spor s předpokladem, že f nabývá v bodě x_0 maxima. Analogicky v ostatních případech.

Věta (Lagrange). *Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b). Pak existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$.*



Důkaz. Stačí aplikovat Rolleovu větu na funkci

$$h(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a).$$

☛ ***Příklad 5.2.***

Dokažte, že pro každé $x \geq 0$ platí nerovnost $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$, kde α je libovolné číslo z intervalu $(0,1)$.

Řešení. Označme

$$f(x) = 1 + \alpha x - (1+x)^{\alpha};$$

funkce f je na intervalu $\langle 0, +\infty)$ spojitá a má zde derivaci

$$f'(x) = \alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1} > 0.$$

Navíc platí $f(0) = 0$. Nechť je $x \in (0, +\infty)$. Podle Lagrangeovy věty existuje takový bod $\xi \in (0, x)$, že

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi) \cdot (x - 0) > 0.$$

Tedy pro každé $x \in (0, +\infty)$ je $f(x) > 0$.

Důsledek. *Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť v každém vnitřním bodě x intervalu $\langle a, b\rangle$ má derivaci $f'(x) = 0$. Pak tato funkce je v intervalu $\langle a, b\rangle$ konstantní.*

Důkaz. Zvolme bod $c \in \langle a, b\rangle$. Pak pro každý bod $x \in \langle a, b\rangle$ podle Lagrangeovy věty existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c) = 0$. Tedy $f(x) = f(c)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$.

☛ *Příklad 5.3.*

Ukažte, že na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ platí rovnost

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2\,.$$

Řešení.

$$(\arcsin x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

podle důsledku 1 je funkce $\arcsin x + \arccos x$ konstantní. Nyní stačí najít její hodnotu v libovolném bodě, např. v bodě $x = 0$: $\arcsin 0 + \arccos 0 = \pi/2$.

Věta (Cauchy). *Nechť jsou funkce f, g spojité na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$, diferencovatelné na otevřeném intervalu (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ je $g'(x) \neq 0$. Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Důkaz. Z podmínky $g'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$ a z Rolleovy věty plyne, že $g(b) \neq g(a)$. Označme

$$F(x) = \big(f(x) - f(a)\big) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big) \cdot \big(g(x) - g(a)\big)\,.$$

$F(a) = F(b) = 0$, F je spojitá na $\langle a, b\rangle$, diferencovatelná na (a, b). Podle Rolleovy věty existuje $\xi \in (a, b)$, pro které

$$F'(\xi) = f'(\xi) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big) \cdot g'(\xi) = 0\,.$$

Zbytek plyne z $g(b) - g(a) \neq 0$ a $g'(\xi) \neq 0$.

Věta (L'Hospitalovo pravidlo). *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$ *a nechť*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0\,,\ \textit{resp.}\ \lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = \infty.$$

Existuje-li $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$*, pak existuje také* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Analogické tvrzení platí pro jednostranné limity.

☛ ***Příklad 5.4.***

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Důkaz. Pro limity zprava.

Z existence limity

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

plyne existence takového pravého okolí (a, x_1) bodu a, že na intervalu $\langle a, x_1 \rangle$ jsou splněny předpoklady Cauchyovy věty.

Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, můžeme předpokládat, že $f(a) = g(a) = 0$. Kdyby funkce v bodě a nebyly definovány, spojitě je dodefinujeme těmito nulovými hodnotami. Podle Cauchyovy věty pak pro každé $x \in (a, x_1)$ existuje $\xi \in (a, x)$ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Odtud již poměrně snadno plyne dokazovaná existence limity a rovnost limit.

Nechť je nyní $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$; nemůžeme pracovat s hodnotami funkcí v bodě a , pro každé $x \in (a, x_1)$ však můžeme aplikovat Cauchyovu větu na interval $\langle x, x_1\rangle$. Podle ní existuje bod $\xi \in (x, x_1)$ tak, že

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Odtud

$$f(x) - f(x_1) = (g(x) - g(x_1))\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

a po vydělení obou stran hodnotou $g(x)$ dostaneme rovnost

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pomocí této rovnosti lze již dokázat jak existenci limity, tak i potřebnou rovnost.

☛ ***Příklad 5.5.***

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left(\frac{"0"}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{"0"}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

(c) $$\lim_{x\to 0+}x\ln x=("0\cdot(-\infty)")=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{"+\infty"}{+\infty}\right)=$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0+}\frac{x}{1}=0$$

(d) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{"+\infty"}{+\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

(e) Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^k} = \left(\frac{\text{''} + \infty\text{''}}{+\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{kx^{k-1}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{k!} = \infty$$

(f) $$\lim_{x\to 0+} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \left((-\infty)^0\right) = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x^2 \ln\frac{1}{x}} = \left(\mathrm{e}^{0\cdot(-\infty)}\right)$$

Protože

$$\lim_{x\to 0+} x^2 \ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\text{''} - \infty\text{''}}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{2} = 0\,,$$

je $$\lim_{x\to 0+} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \mathrm{e}^0 = 1$$