# PŘEDNÁŠKA 6

# DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ, PRŮBĚH FUNKCE

# 6.1 Derivace a diferenciály vyšších řádů

**Definice 1.** Má-li funkce $f'$ derivaci v každém bodě intervalu $I$, pak její derivaci

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = (f')'(x)$$

nazýváme **druhou derivací funkce** $f$ **na intervalu** $I$**.**

Je-li $n \in \mathbb{N}\,, n = 2, 3, \cdots$ , pak $n$**-tou derivaci funkce** $f$ **na intervalu** $I$ definujeme rekurentně vztahem

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}(x)\,, \quad x \in I\,,$$

pokud tyto derivace na $I$ existují. Hovoříme též o **derivaci** $n$**-tého řádu na intervalu** $I$.

Je-li $I = D_f$, hovoříme o **derivaci** $n$**-tého řádu funkce** $f$.

Pro sjednocení symboliky zavádíme označení $f^{(0)} \equiv f$.

☛ ***Příklad 6.1.***

Nalezněte třetí derivaci funkce

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 1\,.$$

***Řešení.***

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10x^4 - 12x^3 + 15x^2 + 6x + 5 \\ f''(x) &= 40x^3 - 36x^2 + 30x + 6 \\ f'''(x) &= 120x^3 - 72x + 30 \end{aligned}$$

**Definice 2.** Má-li funkce $f$ v bodě $x_0$ $n$-tou derivaci $f^{(n)}(x_0)$, pak mocninnou funkci proměnné $h \in \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$\mathrm{d}^n f(a;h) = f^{(n)}(a)h^n$$

nazýváme **diferenciál $n$-tého řádu funkce $f$ v bodě $x_0$**.

## Věta (Leibnizovo pravidlo)

*Nechť mají funkce $f, g$ v bodě $x_0$ derivaci až do řádu $n$ včetně. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)\,,$$

*kde* $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$..

***Poznámka.*** Například:

$$\begin{aligned} (uv)' &= uv' + u'v \\ (uv)'' &= uv'' + 2u'v' + u''v \\ (uv)''' &= uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v \end{aligned}$$

**Důkaz.** Indukcí: pro $n = 1$ se jedná o derivaci součinu. Nechť vztah platí pro $n$. Jeho derivací dostaneme

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n+1)} = \Big(\big(f(x)g(x)\big)^{(n)}\Big)' =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) =$$

$$= f^{(n+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) +$$

$$+ f(x) g^{(n+1)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)\,.$$

**Poznámka:** Množinu všech funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, které mají na množině $X$ spojité derivace řádu $n$ (a tedy i všechny derivace nižšího řádu) budeme značit $C_n(X)$.

Pro funkce spojité na množině $X$ se používá označení $C_0(X)$.

Množina všech funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, které mají na množině $X$ spojité derivace všech řádů se značí $C_\infty(X)$.
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí inkluze:

$$C_\infty(X) \subset \cdots \subset C_n(X) \subset C_{n-1}(X) \subset \cdots \subset C_1(X) \subset C_0(X)$$

# 6.2 Taylorův polynom

**Definice 3.** Nechť má funkce $f(x)$ v bodě $x_0$ derivace až do řádu $n$ včetně. **Taylorovým polynomem $n$-tého stupně funkce $f$ v bodě $x_0$** nazýváme polynom:

$$\mathrm{T}^n f(x_0;h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

Díky následující větě lze Taylorův polynom použít k aproximaci funkce.

**Věta (Taylor).**

*Nechť funkce $f(x)$ je definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$ a v intervalu $(a, b)$ má spojité derivace všech řádů. Pak pro každé dva body $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ existuje bod $\xi$ mezi body $x$ a $x_0$ takový, že platí tzv. Taylorův vzorec:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_{n+1}(x), \quad (6.1)$$

*kde*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} \quad (6.2)$$

Číslo $R_{n+1}(x)$ se nazývá **zbytek v Lagrangeově tvaru.**

☛ ***Příklad 6.2.***

Nalezněte Taylorův vzorec pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě $x = 0$.

***Řešení.***

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ : $f^{(k)}(x) = (\mathrm{e}^x)^{(k)} = \mathrm{e}^x$, $f^{(k)}(0) = 1$ .

Proto

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \qquad R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde bod $\xi$ leží mezi body $0$ a $x$.

Podobně lze odvodit vzorce:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ + (-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} +$$

$$(-1)^n \frac{1}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}} x^{n+1}, \quad x > -1$$

## 6.3 Průběh funkce – monotonie

Nechť má funkce $f$ derivaci v intervalu $I = (a, b)$.

**Věta.** *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce $f$ rostoucí v intervalu $I$.*

**Důkaz.** Uvažujme $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Máme dokázat, že $f(x_1) < f(x_2)$. Z Lagrangeovy věty plyne existence bodu $\xi \in (x_1, x_2)$ , pro který

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1). \tag{6.3}$$

Z předpokladů $x_2 > x_1$ a $f'(\xi) > 0$ plyne, že na pravé straně rovnosti (6.3) je kladné číslo. Platí tedy $f(x_2) > f(x_1)$.

**Důsledek.** *Je-li funkce $f$ klesající nebo nerostoucí v intervalu $I$ a má tam derivaci, pak $f'(x) \leq 0$.*

Analogicky lze dokázat:

**Věta.** *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce $f$ neklesající v intervalu $I$.*

**Věta.** *Jestliže $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce $f$ klesající v intervalu $I$.*

**Důkaz.** Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Máme dokázat, že pak je $f(x_1) > f(x_2)$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (x_1, x_2)$, pro které platí (6.3). Protože $x_2 > x_1$ a $f'(\xi) < 0$, je na pravé straně rovnosti (6.3) záporné číslo, tj. $f(x_2) < f(x_1)$.

**Důsledek.** *Je-li funkce $f$ rostoucí nebo neklesající v intervalu $I$ a má tam derivaci, pak $f'(x) \geq 0$.*

**Věta.** *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce $f$ nerostoucí v intervalu $I$.*

☛ ***Příklad 6.3.***

Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = 12x - 2x^2\,.$$

***Řešení.***

$$f'(x) = 12 - 4x = 4(3 - x) = 0 \qquad \text{pro} \quad x = 3\,;$$

$$f(x) > 0 \ \text{ pro } \ x < 3; \qquad f(x) < 0 \ \text{ pro } \ x > 3.$$

Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty, 3)$, klesající v $(3, \infty)$.

# 6.4 Lokální extrémy funkce

**Definice 4.** Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $x_0 \in D_f$ **lokální maximum**, resp. **lokální minimum**, právě tehdy, když existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$, resp. $f(x) \geq f(x_0)$.

Nahradíme-li neostré nerovnosti nerovnostmi ostrými, mluvíme o **ostrém lokálním maximu**, resp. **ostrém lokálním minimu**.

Lokální maxima a minima nazýváme **lokální extrémy**, ostrá maxima a minima **ostré lokálními extrémy** funkce $f$.

**Věta.** *Nechť $x_0 \in D_f$ není hraničním bodem definičního oboru $D_f$ funkce $f$. Je-li $f'(a) \neq 0$, nemá funkce $f$ v bodě $x_0$ lokální extrém.*

**Důkaz.** Nechť $f'(x_0) = A \neq 0$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ je

$$A - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < A + \varepsilon\,.$$

Předpokládejme například, že $A > 0$ a zvolme $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$. Pak pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ platí:

$$0 < \frac{A}{2} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Pro $x > a$ je $f(x) > f(a)$ a pro $x < a$ je $f(x) < f(a)$, funkce $f$ tedy nemá v bodě $x_0$ lokální extrém.
Případ $A < 0$ vyřešíme obdobně. $\square$

***Poznámka.*** Z toho, že $f'(x_0) > 0$ nebo $f'(x_0) < 0$, neplyne, že existuje okolí bodu $x_0$ takové, že je na něm funkce $f(x)$ rostoucí, resp. klesající.

☛ ***Příklad 6.4.***

Uvažujme funkci $f(x) = x + \pi x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ pro $x \neq 0\,;\ f(0) = 0$.
Platí $f'(0) = 1$, ale funkce není na žádném okolí bodu $x = 0$ rostoucí, protože pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ je

$$f\left(\frac{1}{(2n+1/2)\pi}\right) > f\left(\frac{1}{(2n-1/2)\pi}\right).$$

**Věta.** *Nechť $f$ je diferencovatelná funkce, nechť $f'(x_0) = 0$.*
*Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu $x_0$ takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$, $x < a$, je $f'(x) > 0$ a pro $x > x_0$ je $f'(x) < 0$, má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum.*
*Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu $x_0$ takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$, $x < x_0$, je $f'(x) < 0$ a pro $x > x_0$ je $f'(x) > 0$, má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální minimum.*
*Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu $x_0$ takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ je $f'(x) < 0$ nebo $f'(x) > 0$, nemá funkce $f$ v bodě $x_0$ lokální extrém.*

**Důkaz.** Je-li $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, je funkce $f$ na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ rostoucí, a tedy $f(x) < f(x_0)$, a na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ klesající, tedy $f(x) < f(x_0)$. To znamená, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ ostré lokální maximum. Případ, kdy $f'(x) < 0$ pro $x < x_0$ a $f'(x_0) > 0$ pro $x > x_0$, se dokáže podobně.
Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in P_\delta(x_0)$, je funkce $f$ rostoucí v $P_\delta(x_0)$ a nemá v bodě $x_0$ lokální extrém. Podobně v případě, že $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$. $\square$

## ☛ *Příklad 6.5.*

Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x) = 12x - 2x^2\,.$$

### *Řešení.*

$$f'(x) = 12 - 4x = 4(3 - x) = 0 \qquad \text{pro} \quad x = 3\,;$$

$$f(x) > 0 \;\text{ pro }\; x < 3; \qquad f(x) < 0 \;\text{ pro }\; x > 3.$$

Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty, 3)$, klesající v $(3, \infty)$, v bodě $3$ proto má ostré lokální maximum, a to $18$.

## 6.5 Globální extrémy

Někdy je třeba nalézt **globální extrémy na kompaktní, tj. omezené a uzavřené množině** $M$. Jak již víme, je-li funkce $f(x)$ spojitá, existují v množině $M$ body, ve kterých nabývá funkce $f(x)$ své největší a nejmenší hodnoty. Je zřejmé, že pokud není bod $x$ hraničním bodem množiny $M$ a existuje v tomto bodě nenulová derivace, nemá funkce $f(x)$ v tomto bodě globální extrém. Zbývá nám tedy vyšetřit ostatní body množiny $M$ :

- hraniční body množiny $M$
- body, v nichž je derivace rovna nule
- body, ve kterých derivace neexistuje

Je-li těchto bodů pouze konečný počet, stačí pro nalezení extrémů vybrat body, ve kterých je největší a nejmenší hodnota funkce $f(x)$.

☛ ***Příklad 6.6.***

Nalezněte globální extrémy funkce

$$f(x) = |x^3 - 3x|\,, x \in \langle -2\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle\,.$$

***Řešení.*** Funkce $f$ je spojitá na kompaktním intervalu $\langle -2\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$, má proto na tomto intervalu globální maximum i minimum.

*Podezřelé body:*

- Krajní body intervalu, tj. $-2\sqrt{3}$ a $\sqrt{3}$
- $f'(x)$ neexistuje pro $-\sqrt{3}$, $0$ a $\sqrt{3}$
- $f'(x) = 0$ pro $-1, 1$

Nyní stačí nalézt funkční hodnoty v podezřelých bodech:

$$f(-2\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}\,, \quad f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = f(0) = 0\,,$$

$$f(-1) = f(1) = 2\,.$$

Funkce $f$ nabývá globálního maxima $18\sqrt{3}$ v bodě $-2\sqrt{3}$ a globálního minima $0$ v bodech $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ a $0$.

## 6.6 Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body

**Definice 5.** Nechť funkce $f$ má derivaci v bodě $x_0$. Říkáme, že $f$ je **konvexní**, resp. **konkávní v bodě** $x_0$ právě tehdy, když existuje takové okolí $\mathsf{U}(x_0;\delta)$ bodu $x_0$, že graf funkce $f$ pro $x \in \mathsf{U}(x_0;\delta)$ leží nad, resp. pod tečnou grafu v bodě $x_0$.

Říkáme, že funkce $f$ je **konvexní**, resp. **konkávní v intervalu** $(a,b)$ právě tehdy, když je konvexní, resp. konkávní v každém bodě intervalu $(a,b)$.

Říkáme, že bod $x_0 \in \mathsf{D}_f$ je **inflexním bodem** funkce $f$ právě tehdy, když v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ existuje tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ a funkce se v tomto bodě mění z konvexní na konkávní nebo obráceně.

**Věta. Podmínky pro konvexnost a konkávnost funkce.**
*Nechť funkce* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *má derivaci v intervalu* $(a,b)$*. Pak platí:*

(i) *Je-li* $f'$ *rostoucí v intervalu* $(a,b)$*, je funkce* $f$ *konvexní v intervalu* $(a,b)$*.*

(ii) *Je-li* $f'$ *klesající v intervalu* $(a,b)$*, je funkce* $f$ *konkávní v intervalu* $(a,b)$*.*

(iii) *Má-li funkce* $f'$ *v bodě* $x_0 \in (a,b)$ *lokální extrém, je* $x_0$ *inflexním bodem funkce* $f$ *.*

Odtud pak plyne:

**Věta.** *Nechť funkce* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *má druhou derivaci v intervalu* $(a,b)$*. Pak platí:*

(i) *Je-li* $f''(x) > 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, je funkce* $f$ *konvexní v intervalu* $(a,b)$*.*

(ii) *Je-li* $f''(x) < 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, je funkce* $f$ *konkávní v intervalu* $(a,b)$*.*

(iii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a derivace* $f''$ *mění v bodě* $x_0 \in (a,b)$ *znaménko, má funkce* $f$ *v bodě* $x_0$ *inflexní bod.*

☛ ***Příklad 6.7.***

Nalezněte inflexní body funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2x + 2\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

a určete intervaly konvexnosti a konkávnosti.
***Řešení.*** $f''(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2-1) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 1$. Dále platí, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ a $f''(x) < 0$ pro $x \in (-1, 1)$:

| $x$ | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 1)$ | $1$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\smile$ | inf. bod | $\frown$ | inf. bod | $\smile$ |

Daná funkce je tedy konvexní v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, konkávní v intervalu $(-1, 1)$. Druhá derivace mění znaménko v bodech $x = -1$ a $x = 1$, takže funkce má dva inflexní body, a to $x = -1$ a $x = 1$.

## 6.7 Asymptoty grafu funkce

**Definice 6.** Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ **svislou** (**vertikální**) **asymptotu** $x = x_0$ právě tehdy, když alespoň jedna jednostranná limita je v tomto bodě nevlastní.

Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $\infty$, resp. $-\infty$ **vodorovnou** (**horizontální**) **asymptotu** $y = b$ právě tehdy, když

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b\,, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\,.$$

Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $\infty$, resp. $-\infty$ **šikmou asymptotu** $y = kx + q\,,\ k, q \in \mathbb{R}\,,\ k \neq 0\,,$ právě tehdy, když

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - q) = 0\,, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - q) = 0.$$

**Věta.** *Má-li funkce $f$ v bodě $\infty$ šikmou asymptotu $y = kx + q$, pak platí*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = q\,.$$

**Důkaz.** Rovnost pro výpočet $k$ plyne ze vztahu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k - \lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} = 0.$$

Rovnost pro výpočet $q$ plyne přímo z definice šikmé asymptoty.

☛ ***Příklad 6.8.***

Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

***Řešení.*** Funkce $f$ není definovaná v okolí bodu $x = 0$; Protože

$$\lim_{x \to 0-} \frac{2x^2 + x + 1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+} \frac{2x^2 + x + 1}{x} = \infty,$$

je přímka $x = 0$ svislou asymptotou grafu funkce $f$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2} = 2 = k$$

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \left[ \frac{2x^2 + x + 1}{x} - 2x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x + 1 - 2x^2}{x} = 1 = q\,.$$

Jelikož obě limity jsou vlastní, má graf dané funkce v bodě $\infty$ šikmou asymptotu $y = 2x + 1$. Stejná přímka je šikmou asymptotou grafu funkce $f$ také v bodě $-\infty$.

☛ ***Příklad 6.9.***

Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}\,, \qquad x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty).$$

***Řešení.*** Nejdříve vyšetříme chování funkce v okolí bodů $x=-1$ a $x=1$, v nichž funkce není definovaná:

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty\,.$$

Přímky o rovnicích $x=-1$ a $x=1$ jsou tedy svislými asymptotami grafu dané funkce.
Dále je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

takže funkce $f$ má v bodech $\pm\infty$ vodorovnou asymptotu

$$y = 0\,.$$

☛ ***Příklad 6.10.***

Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \ln x - 5x\,, \quad x \in (0, \infty).$$

***Řešení.*** Nejdříve vyšetříme chování funkce v pravém okolí bodů $x = 0$, který leží na hranici definičního oboru. Platí $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, takže přímka o rovnici $x = 0$ je svislou asymptotou grafu dané funkce. Dále je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, takže by funkce mohla mít v bodě $\infty$ šikmou asymptotu. Budeme tedy hledat limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x - 5x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} - 5 = -5.$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (\ln x - 5x + 5x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Druhá limita je nevlastní, funkce proto šikmou asymptotu nemá.

## 6.8 Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce postupně hledáme:

- Definiční obor funkce, body nespojitosti, nulové body funkce, intervaly, kde je funkce kladná a kde je záporná
- Zvláštní vlastnosti funkce, např. sudost, lichost, periodičnost, prostota, omezenost.
- Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti funkce a v krajních bodech definičního oboru.
- Intervaly monotonie
- Stacionární body, lokální extrémy funkce.
- Intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body.
- Asymptoty grafu funkce.
- Graf funkce sestrojujeme na základě takto získaných informací a pomocí dalších údajů jako jsou např.
  - hodnoty funkce v některých význačných bodech (nulové body první a druhé derivace dané funkce);
  - průsečíky grafu funkce s osami souřadnic;
  - tečny v inflexních bodech funkce.

☛ ***Příklad 6.11.***

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

***Řešení.***

$$\mathrm{D}_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Funkce není ani sudá, ani lichá, neboť neplatí žádná z rovností $f(-x) = f(x)$ nebo $f(-x) = -f(x)$ pro všechna $x \in \mathrm{D}_f$. Dále pro žádné $c \neq 0$ neplatí rovnost $f(x+c) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathrm{D}_\mathrm{f}$, funkce proto není ani periodická. Žádnou z takových speciálních vlastností tedy nebudeme moci při konstrukci grafu využít.

Bod $x = -1$ je bodem nespojitosti a pro jednostranné limity funkce v tomto bodě platí

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) = -\infty.$$

Pro limity ve zbývajících dvou bodech hranice definičního oboru platí:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$ je funkce spojitá. Pro $x$ záporná nabývá záporné hodnoty, pro $x$ kladná kladné hodnoty. Graf protíná obě souřadnicové osy v počátku.

Derivace

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

má dva nulové body $x = -3$ a $x = 0$, takže funkce má dva stacionární body $x = -3$ a $x = 0$. Je $f(0) = 0$ a $f(-3) = -27/8$. Derivace $f'(x)$ je kladná pro $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ a záporná pro $x \in (-3, -1)$, takže funkce je v intervalech $(-\infty, -3)$ a $(-1, \infty)$ rostoucí, v intervalu$(-3, -1)$ klesající. Tedy v bodě $x = -3$ je lokální maximum $f(-3) = -27/8$.

Druhá derivace

$$f''(x) = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

má jeden nulový bod $x = 0$. Pro $x$ záporná nabývá záporné hodnoty, pro $x$ kladná kladné hodnoty. Funkce $f$ je tedy v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ konkávní a v intervalu $(0, \infty)$ konvexní. Bod $x = 0$ je inflexním bodem.

Z hodnot limit v bodě $-1$ plyne, že přímka $x = -1$ je svislou asymptotou grafu funkce $f$. Jelikož funkce má v nevlastních bodech limity $\pm\infty$, má smysl pokoušet se najít rovnici šikmé asymptoty. Vypočteme nejdříve limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2} = k$$

a limitu

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x(x+1)^2}{2(x+1)^2}\right] = -1 = q\,.$$

Jelikož obě limity jsou vlastní, má graf dané funkce v bodě $\infty$ šikmou asymptotu o rovnici $y = x/2 - 1$. Stejná přímka je šikmou asymptotou grafu funkce $f$ také v bodě $-\infty$.

Údaje o funkci, získané během výpočtu, můžeme zanést do tabulky, která může mít např. takovýto tvar:

| $x$ | $(-\infty,-3)$ | $-3$ | $(-3,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty \leftarrow$ | $-\frac{27}{8}$ | $\rightarrow -\infty$ | N | $-\infty \leftarrow$ | $0$ | $\rightarrow \infty$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | lok. max | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |
| $f''(x)$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | | $\frown$ | | $\frown$ | inf. bod | $\smile$ |
| asym. | $y=\frac{x}{2}-1$ | | | $x=-1$ | | | $y=\frac{x}{2}-1$ |