Přednáška 1

Množiny čísel

Osnova přednášky

1. Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$; axióm matematické indukce; příklad:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)\,.$$

2. Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ a množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$.

3. Reálná čísla jako desítkové rozvoje.

4. Omezené množiny.

5. Supremum a infimum množiny.

6. Věta o supremu a infimu.

7. Symboly $\pm\infty$; množina $\mathbb{R}^*$.

8. Kartézský součin množin, množina $\mathbb{R}^n$.

9. Vzdálenost bodů v $\mathbb{R}^n$.

10. Okolí $U_\varepsilon(\mathbf{a})$ a prstencové okolí $P_\varepsilon(\mathbf{a})$ bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

11. Okolí bodů $\pm\infty$.

12. Vnitřní bod množiny, vnější bod množiny, hraniční bod množiny.

13. Vnitřek množiny a otevřená množina.

14. Hromadný bod množiny a izolovaný bod množiny.

15. Příklad: $M = \left\{ \dfrac{1}{n}\,;\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

16. Uzávěr množiny a uzavřená množina.

17. Hranice množiny.

18. Omezené množiny v $\mathbb{R}^n$.

19. Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$.

V této části přednášky se budeme krátce zabývat množinami čísel, které budeme používat.

Množina přirozených čísel

Vycházíme z množiny přirozených čísel, která popisují počet prvků konečných množin. Tyto množiny jsou

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \text{nebo} \qquad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}\,.$$

Na množině přirozených čísel jsou definovány operace sčítání, násobení a uspořádání, tj. $n_1 \le n_2$, které jsou, předpokládám, všem známé.

V matematice se množina přirozených čísel definuje pomocí axiómů. My se těmito axiómy zabývat nebudeme. Uvedeme pouze jeden z nich, který se často používá k důkazu toho, že nějaká vlastnost platí pro všechna přirozená čísla.

Axióm matematické indukce. Nechť má množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$ následující vlastnosti:

1. $1 \in \mathcal{M}$,
2. jestliže je $n \in \mathcal{M}$, pak je $(n+1) \in \mathcal{M}$.

Pak je $\mathcal{M} = \mathbb{N}$.

Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)\,. \tag{1}$$

Řešení: Nechť je $\mathcal{M}$ množina všech $n \in \mathbb{N}$, pro která platí (1). Stačí ukázat, že tato množina má vlastností 1. a 2.

Pro $n = 1$ je

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \tfrac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3\,,$$

a tedy $1 \in \mathcal{M}$.

Předpokládejme, že $n \in \mathcal{M}$. To znamená, že pro n platí (1). Musíme ukázat, že z tohoto předpokladu plyne, že $(n+1) \in \mathcal{M}$, tj. že platí

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \tfrac{1}{6}\,(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big) = \tfrac{1}{6}\,(n+1)(n+2)(2n+3)\,.$$

Protože předpokládáme, že pro n platí (1), je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} + (n+1)^2 = \tfrac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \\ &= \tfrac{1}{6}\,(n+1)(2n^2 + 7n + 6) = \tfrac{1}{6}\,(n+1)(n+2)(2n+3)\,,\end{aligned}$$

a tedy $(n+1) \in \mathbb{N}$.

Podle axiómu matematické indukce je proto $\mathcal{M} = \mathbb{N}$.

Množina celých čísel

Množinu celých čísel zavádíme proto, abychom mohli definovat operaci odčítání. V množině přirozených čísel nemá rovnice $n_1 + x = n_2$ řešení pro všchna n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$. Proto zavádíme množinu všech řešení těchto rovnic. Tato množina se nazývá množina celých čísel a budeme ji značit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

V této množině jsou definovány známé operace sčítání, odčítání, násobení a uspořádání.

Množina racionálních čísel

Tato množina se zavádí proto, abychom mohli definovat operaci dělení. V množině celých čísel nemá rovnice $xz_1 = z_2$ řešení pro všechna z_1, $z_2 \in \mathbb{Z}$, kde $z_1 \neq 0$. Proto rozšiřujme množinu celých čísel o všechna řešení těchto rovnic. Tím získáme množinu racionálních čísel, kterou budeme značit $\mathbb{Q}$. Množinu racionálních čísel lze ztotožnit s množinou

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n}\,,\ \text{kde } z \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N} \text{ jsou nesoudělná} \right\}.$$

To znamená, že největší společný dělitel čísel $|z|$ a n je jedna.

Na množině racionálních čísel jsou definovány známé operace sčítání, odčítání, násobení, dělení nenulovým číslem a uspořádání.

Množina reálných čísel

V matematické analýze je nejdůležitější množina reálných čísel, kterou budeme značit $\mathbb{R}$. Tuto množinu nedefinujeme proto, abychom definovali nové algebraické operace jako jsme to dělali dříve, ale proto, abychom v množině racionálních čísel zaplnili jisté "díry" a v jistém smyslu množinu racionálních čísel "zúplnili".

Nebudeme se zabývat přesnou definicí reálných čísel, protože to přesahuje rámec přednášky, ale uvedeme pouze jistý popis množiny reálných čísel

Když použijeme desítkový zápis reálného čísla x, tj. budeme číslo x psát ve tvaru nekonečného řetězce čísel

$$x = a_0, a_1 a_2, \ldots a_n \ldots\,, \quad \text{kde} \quad a_0 \in \mathbb{Z} \quad \text{a} \quad a_1,\, a_2,\, \ldots = 0,\, 1,\, \ldots,\, 9\,,$$

lze ukázat, že racionální čísla odpovídají řetězcům

$$x = a_0, a_1, \ldots a_n \overline{a_{n+1} \ldots a_{n+p}}\,,$$

tj. periodickým řetězcům. Proto je lze zadat i v tomto tvaru pomocí konečného počtu čísel. Všechny ostatní řetězce odpovídají tzv. iracionálním číslům. Abychom tedy zadali iracionální číslo, musíme zadat nekonečnou posloupnost znaků.

Při takové definici není snadné definovat algebraické operace mezi reálnými čísly. Proto se množina reálných čísel definuje jinak.

Jedna z důležitých vlastností množiny reálných čísel je existence tzv. suprema a infima jistých množin.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *shora omezená*, když existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $x \leq K$.
Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *zdola omezená*, když existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $x \geq K$.
Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *omezená*, když existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $|x| \leq K$.

`Poznámka:` Lze také říct, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená právě tehdy, když je omezená shora i zdola.

Je-li množina M shora omezená, není číslo K v definici jediné. Důležitou úlohu hraje nejmenší číslo, které omezuje množinu M shora. Toto číslo budeme nazývat supremum množiny M. Podobně se infimum množiny M nazývá největší omezení množiny M zdola.

Definice. Číslo S se nazývá *supremum množiny M*, když

1. pro každé $x \in M$ je $x \leq S$ a
2. pro každé $S' < S$ existuje $x \in M$ takové, že $x > S'$.

Supremum množiny M budeme značit $\sup M$.

`Poznámka:` K zápisu takových výroků se v matematice používají značky, které se nazývají kvantifikátory. Měli byste vědět, že znak $\forall x \in M$ znamená pro každé x z množiny M, a značka $\exists x \in M$ znamená, že existuje x z množiny M. Pomocí těchto značek je S supremum množiny M právě tehdy, když

1. $\forall x \in M$ je $x \leq M$,
2. $\forall S' < S \; \exists x \in M$ takové, že $x > S'$.

Definice. Číslo s se nazývá *infimum množiny M*, když

1. $\forall x \in M$ je $x \geq s$ a
2. $\forall s' > s \; \exists x \in M$ takové, že $x < s'$.

Infimum množiny M budeme značit $\inf M$.

Jednu z hlavních vlastností množiny reálných čísel vyjadřuje tvrzení následující věty:
Věta (*o supremu a infimu*).
Každá neprázdná shora omezená podmnožina $M \subset \mathbb{R}$ má $\sup M \in \mathbb{R}$.
Každá neprázdná zdora omezená podmnožina $M \subset \mathbb{R}$ má $\inf M \in \mathbb{R}$.

`Poznámka:` Například množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ vlastnost z předchozí věty nemá. Třeba množina M všech racionálních čísel $q \in \mathbb{Q}$ takových, že $q^2 < 2$ je neprázdná, protože $\{0\} \in M$, a omezená, protože pro každé $q \in M$ je $|q| \leq 2$. V množině reálných čísel je $\sup M = \sqrt{2}$ a $\inf M = -\sqrt{2}$. Ale lze ukázat, že tato čísla jsou iracionální.

`Poznámka:` Často se také používá terminologie, že pokud je $\sup M \in M$, nazývá se *maximum množiny M*, a pokud je $\inf M \in M$, nazývá se *minimum množiny M*.

Například interval $\mathcal{I} = (-1, 1\rangle \subset \mathbb{R}$ má supremum $\sup \mathcal{I} = 1$, které je jeho maximem, protože $\{1\} \in \mathcal{I}$, má infimum $\inf \mathcal{I} = -1$, které ale není jeho minimum, protože $\{-1\} \notin \mathcal{I}$.

Rozšířená množina reálných čísel

Existence suprema a infima množiny bude pro mnohé úvahy v matematické analýze podstatná. Proto se množina reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšiřuje tak, aby věta o supremu a infimu platila pro všechny podmnožiny množiny $\mathbb{R}$. Tím získáme tzv. rozšířenou množinu reálných čísel, kterou budeme značit $\mathbb{R}^*$.

Množina $\mathbb{R}^*$ se skládá z množiny reálných čísel a dvou symbolů $-\infty$ a $+\infty$, tj.

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

takových, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $-\infty < x < +\infty$.

Jestliže množina $M \subset \mathbb{R}$ není shora omezená, je z definice suprema snadno vidět, že $\sup M = +\infty$. Podobně pro zdola neomezenou množinu M je $\inf M = -\infty$.

Prázdná množina $\emptyset$ je omezená shora i zdola libovolným reálným číslem. Proto je podle definice $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = +\infty$. To nám umožňuje vypustit ve větě o supremu a infimu předpoklady o množině M. Takto dostaneme větu:

Věta. Pro každou množinu $M \subset \mathbb{R}^*$ existuje $\sup M \in \mathbb{R}^*$ a $\inf M \in \mathbb{R}^*$.

V množině $\mathbb{R}^*$ bohužel nelze rozumně definovat všechny algebraické operace. Ale některé aritmetické operace lze rozšířit z množiny reálných čísel na množinu $\mathbb{R}^*$. Definuje se $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$ a

$$\begin{aligned}
a + (+\infty) &= +\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}; \\
a + (-\infty) &= -\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}; \\
a - (+\infty) &= -\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}; \\
a - (-\infty) &= +\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}; \\
a \cdot (+\infty) &= +\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}^*, \quad a > 0; \\
a \cdot (+\infty) &= -\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}^*, \quad a < 0; \\
a \cdot (-\infty) &= -\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}^*, \quad a > 0; \\
a \cdot (-\infty) &= +\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}^*, \quad a < 0; \\
\frac{a}{\pm\infty} &= 0 && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}; \\
\left|\frac{a}{0}\right| &= +\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}^*, \quad a \neq 0.
\end{aligned}$$

Další operace zůstávají nedefinovány. Jedná se zejména o operace $+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Výrazy takového typu je často nazývají *neurčité výrazy*.

Množina $\mathbb{R}^n$

Pro každé dvě množiny A a B je definován kartezský součin $A \times B$ jako množina všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$. Tedy

$$A \times B = \big\{(a, b);\ a \in A,\ b \in B\big\}.$$

Ve druhé polovině semestru budeme pracovat s množinou uspořádaných n–tic reálných čísel. Její prvky budeme často značit tučnými písmeny, tj. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Tuto množinu budeme značit $\mathbb{R}^n$ a lze ji definovat jako kartezský součin n množin $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{–krát}} .$$

Otevřené a uzavřené množiny v $\mathbb{R}^n$

V přednášce budeme často používat pojmy otevřená a uzavřená množina. Tyto množiny se v matematice definují pomocí pojmu okolí bodu. My budeme okolí bodu množiny definovat pomocí vzdálenosti. Navíc se nebudeme zabývat obecnou vzdáleností bodů množiny, tzv. metrikou, ale budeme používat pouze jednu definici vzdálenosti bodů v $\mathbb{R}^n$, která má obvyklý geometrický význam.

Definice. Nechť jsou $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ body v $\mathbb{R}^n$. *Vzdálenost bodu* $\mathbf{x}$ *od bodu* $\mathbf{y}$ definujeme jako

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} . \qquad (2)$$

Speciálně v množině reálných čísel $\mathbb{R}$ definujeme vzdálenost $d(x, y) = |y - x|$.

Věta. Vzdálenost má následující vlastnosti:

1. pro každé $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq 0$;
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
3. pro každé $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ je $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$

`Poznámka:` Vlastnost 1. z věty vyjadřuje, že vzdálenost bodu $\mathbf{x}$ od bodu $\mathbf{y}$ je stejná jako vzdálenost bodu $\mathbf{y}$ od bodu $\mathbf{x}$. Vlastnost 2. tvrdí, že jediný bod, který má od bodu $\mathbf{x}$ nulovou vzdálenost, je samotný bod $\mathbf{x}$.

Vlastnost 3. je matematické vyjádření známé vlastnosti, že součet délek dvou stran trojúhelníka je větší než délka třetí strany. Proto se často nazývá trojúhelníková nerovnost.

`Poznámka:` Když je M libovolná množina, nazývá se každá funkce $\rho : M \times M \to \langle 0, \infty)$, která má vlastnosti uvedené ve větě, metrika a množina M spolu s metrikou ρ se nazývá metrický prostor. Níže uvedené definice okolí bodu, otevřené a uzavřené množin je stejná ve všech metrických prostorech.

Definice. *Okolí bodu* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ (s poloměrem $\varepsilon > 0$) je množina

$$U_\varepsilon(\mathbf{a}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ;\ d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon \right\} .$$

Prstencové okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ (s poloměrem $\varepsilon > 0$) je množina

$$P_\varepsilon(\mathbf{a}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ;\ 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon \right\} = U_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\} .$$

Speciálně v množině reálných čísel je okolí $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

V rozšířené množině reálných čísel $\mathbb{R}^*$ máme navíc body $\pm\infty$. Okolí těchto bodů definujeme jako intervaly

$$U_k(+\infty) = (k, +\infty)\,, \qquad U_k(-\infty) = (-\infty, k)\,, \quad \text{kde} \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Pomocí okolí lze body v $\mathbb{R}^n$ rozdělit vzhledem k dané množině M na vnitřní, vnější a hraniční body množiny M.

Definice.
Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *vnitřní bod množiny* M právě tehdy, když existuje jeho okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že $U(\mathbf{a}) \subset M$.
Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *vnější bod množiny* M právě tehdy, když existuje jeho okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že $U(\mathbf{a}) \subset M^{\text{comp}}$, kde $M^{\text{comp}} = \mathbb{R}^n \setminus M$ je doplněk množiny M v $\mathbb{R}^n$.
Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *hraniční bod množiny* M právě tehdy, když pro každé jeho okolí $U(\mathbf{a})$ je $U(\mathbf{a}) \cap M \neq \emptyset$ a $U(\mathbf{a}) \cap M^{\text{comp}} \neq \emptyset$.

Definice. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá *vnitřek množiny* M. Vnitřek množiny M budeme značit M°.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *otevřená*, pokud je rovna svému vnitřku, tj. pokud platí $M = M^\circ$.

`Poznámka:` Tato definice je ekvivalentní tvrzení, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená právě tehdy, když je každý bod množiny M její vnitřní bod.

Asi nejdůležitější z pojmů, které nyní definujeme, je pojem hromadného bodu množiny.

Definice. Bod $\mathbf{a}$ se nazývá *hromadným bod množiny* $M \subset \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když je pro každé jeho prstencové okolí $P_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap M \neq \emptyset$.

`Poznámka:` Z definice hromadného bodu množiny M plyne, že každé okolí hromadného bodu obsahuje nekonečně mnoho bodů, které leží v množině M. Přitom samotný hromadný bod $\mathbf{a}$ nemusí patřit do množiny M.

Definice. Bod $\mathbf{a} \in M$ se nazývá *izolovaný bod množiny* $M \subset \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když existuje jeho okolí $U_\varepsilon(\mathbf{a})$ takové, že $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap M = \{\mathbf{a}\}$.

Příklad: Nechť je

$$M = \left\{\frac{1}{n}\,;\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

pak jsou všechny body $x_n = \dfrac{1}{n}$ izolované, protože když zvolíme $\varepsilon = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ je pro okolí $U_\varepsilon(x_n) \cap M = \{x_n\}$.

Bod $x = 0$ je hromadný bod množiny M, protože pro dané $\varepsilon > 0$ obsahuje okolí $U_\varepsilon(0)$ bod x_n, kde $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, který patří do množiny M.

Definice. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$. *Uzávěr množiny* M je sjednocení množiny M a množiny všech hromadných bodů M. Uzávěr množiny M budeme značit $\overline{M}$.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *uzavřená*, pokud je rovna svému uzávěru, tj. pokud platí $M = \overline{M}$.

`Poznámka:` Ekvivalentní definice uzavřené množiny je: Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená právě tehdy, když obsahuje všechny své hromadné body.

`Poznámka:` Lze ukázat, že vnitřek množiny M je největší otevřená podmnožina množiny M a uzávěr množiny M je nejmenší uzavřená nadmnožina M.

`Poznámka:` Mezi otevřenými a uzavřenými množinami existuje jednoduchý vztah:
Množina M je otevřená právě tehdy, když je její doplněk M^{comp} uzavřená množina.
Množina M je uzavřená právě tehdy, když je její doplněk M^{comp} otevřená množina.

Definice. *Hranice množiny* M se nazývá množina $\mathrm{h}(M) = \overline{M} \cap \overline{M^{\text{comp}}}$.

`Poznámka:` Jinými slovy je hranice množiny M množina všech jejích hraničních bodů.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *omezená* právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in M$ je

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \leq K\,.$$

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$, která je omezená a uzavřená, se nazývá *kompaktní.*

`Poznámka:` Důležitost kompaktních množin spočívá v jejich následující, ne zrovna triviální, vlastnosti. Nechť je A množina a $M_a \subset \mathbb{R}^n$, kde $a \in A$, je systém otevřených množin takových, že $M \subset \bigcup\limits_{a \in A} M_a$. Množina M je kompaktní právě tehdy, když existuje konečná množina $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset A$ taková, že $M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{r} M_{a_i}$. Toto tvrzení se někdy formuluje tak, že množina M je kompaktní právě tehdy, když z jejího otevřeného pokrytí lze vybrat konečné pokrytí.

Existují další důležité podmnožiny $\mathbb{R}^n$ jako například souvislé množiny, konvexní množiny atd. Tyto množiny budeme definovat později, až je budeme potřebovat.