Přednáška 2

Posloupnosti

Osnova přednášky

1. Krátká zmínka o zobrazení.

2. Zobrazení do $\mathbb{R}^k$ jako k funkcí.

3. Definice posloupnosti v $\mathbb{R}^k$.

4. Posloupnosti v $\mathbb{R}^k$ a k posloupností reálných čísel.

5. Aritmetická posloupnost.

6. Geometrická posloupnost.

7. Vlastní limita posloupnosti v $\mathbb{R}$.

8. Nevlastní limita posloupnosti.

9. Definice limity posloupnosti v $\mathbb{R}$ pomocí okolí bodu.

10. Příklad $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2+3n+2}{n^3+n+3} = 1$.

11. Posloupnost má nejvýše jednu limitu.

12. Konvergentní a divergentní posloupnosti.

13. Definice limity posloupnosti v $\mathbb{R}^k$.

14. Výpočet limity posloupnosti v $\mathbb{R}^k$ pomocí limit posloupností reálných čísel.

15. Některé známé limity: $\lim\limits_{n\to\infty} n^p$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

16. Limita posloupnosti, která vznikla algebraickými operacemi.

17. Příklady: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-2n+2}\,\sqrt{2n+3}}{\sqrt{8n^3+2n^2+3}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+4}-n\right)$.

18. $a_n \le b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

19. $a_n \le b_n \le c_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

21. Omezené posloupnosti.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a b_n omezená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

23. Příklad: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+2}}{n} \sin n^2$.

24. Příklad: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{a_n} + a_n\right)$, najít $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ za předpokladu, že a_n konverguje.

25. Monotonní posloupnost.

26. Limita monotonní posloupnosti.

27. Příklad $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

28. Limity typu 1^∞.

29. Příklad: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{1-3n}$.

30. Cauchy–Bolzanova podmínka.

31. Rozdíl mezi limitou posloupnosti a jejími hromadnými body.

32. Vybraná posloupnost z posloupnosti $\mathbf{a}_n$.

33. Limita vybrané posloupnosti.

34. Příklad $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

35. Limity vybraných posloupností a její hromadné body.

36. Příklady: hromadné body posloupností $a_n = \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\sin\frac{2}{3}n\pi$,
$b_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, \dots\right\}$ a $c_n = \sin n$.

37. Limes superior a limes inferior posloupnosti.

38. Posloupnosti na kompaktních množinách.

V minulé přednášce jsme se zabývali množinami čísel. Druhý základní pojem v matematice je pojem *zobrazení*. Zobrazení f množiny X do množiny Y zhruba řečeno přiřazuje každému prvku $x \in X$ právě jeden prvek $y = f(x) \in Y$.

V první části semestu se budeme zabývat zobrazeními, kde $X \subset \mathbb{R}$ a $Y \subset \mathbb{R}^k$ a ve druhé části pak zobrazeními, kde $X \subset \mathbb{R}^n$ a $Y \subset \mathbb{R}^k$.

V případě $Y \subset \mathbb{R}^k$ přiřazuje zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y$ každému $x \in X$ uspořádanou k–tici reálných čísel $\big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\big) \in \mathbb{R}^k$, kde $f_i(x) \in \mathbb{R}$ jsou to zobrazení $X \to \mathbb{R}$.

Zobrazení $f : X \to Y$, kde $Y \subset \mathbb{R}$ se nazývají funkce (reálné) na množině X. Proto je možné říct, že každé zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y \subset \mathbb{R}^k$ dáno pomocí k reálných funkcí na množině X.

V této přednášce se budeme zabývat případem $X = \mathbb{N}$, tj. posloupnostmi.

Definice. Posloupnost v $\mathbb{R}^k$ je zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}^k$.

Posloupnost tedy přiřazuje každému $n \in \mathbb{N}$ prvek z $\mathbb{R}^k$, které budeme značit $\mathbf{a}_n$ a nazývat ho *členem posloupnosti*. Pro celou posloupnost pak budeme používat značku $(\mathbf{a}_n)$. Protože $\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^k$, je $\mathbf{a}_n = \big(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(k)}\big)$, kde $a_n^{(i)} \in \mathbb{R}$. Tedy posloupnost $\big(\mathbf{a}_n\big)$ v $\mathbb{R}^k$ je zadána k posloupnostmi $\big(a_n^{(i)}\big)$ v $\mathbb{R}$.

Jako příklad posloupnosti reálných čísel uvedeme dva příklady, které by měly být známé ze střední školy.

Příklad: (*aritmetická posloupnost*). Aritmetická posloupnost je určena dvěmi reálnými čísly a_1 a d a vztahem $a_{n+1} - a_n = d$ pro $n \in \mathbb{N}$. Proto se číslo d nazývá *diference* aritmetické posloupnosti a n–tý člen aritmetické posloupnosti lze zapsat jako $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Uvedeme ještě vztah pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti. Platí

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \tfrac{1}{2}\big(a_n + a_1\big)n\,. \tag{1}$$

Tento vztah lze dokázat například matematickou indukcí. Označme U množinu všech $n \in \mathbb{N}$ takových, že platí vztah (1). Protože

$$s_1 = a_1 = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_1) \cdot 1\,,$$

je $1 \in U$. Jestliže je $n \in U$, tj. platí pro ně vztah (1), lze psát

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + a_1)n + a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_{n+1} - d + a_1)n + a_{n+1} = \\ &= \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_1)n - \tfrac{1}{2}\,nd + a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Jestliže použijeme vztah $nd = a_{n+1} - a_1$, dostaneme

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_1)n - \tfrac{1}{2}(a_{n+1} - a_1) + a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_1)n + \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_1) = \\ &= \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_1)(n+1)\,. \end{aligned}$$

To ale znamená, že $(n+1) \in U$ a podle axiómu matematické indukce je $U = \mathbb{N}$.

Příklad (*geometrická posloupnost*). Geometrická posloupnost je zadána dvěmi reálnými čísly a_1 a q a vztahem $a_{n+1} = qa_n$, který platí pro $n \in \mathbb{N}$. Je-li $a_1 q \neq 0$, je $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ a nazývá se *kvocient* geometrické posloupnosti. n–tý člen geometrické posloupnosti je $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti je

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1\big(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\big)\,.$$

Jestliže použijeme vztah $\big(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\big)\big(1 - q\big) = 1 - q^n$, dostaneme

$$s_n = \begin{cases} a_1\,\dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{pro } \ q \neq 1\,, \\ na_1 & \text{pro } \ q = 1\,. \end{cases}$$

Limita posloupnosti

Nyní zavedeme jeden z nejdůležitějších pojmů, se kterými se v přednášce setkáme, pojmem *limity* posloupnosti.

Nechť je (a_n) posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Budeme chtít matematicky vyjádřit tvrzení, že pro velká n se hodnota členů posloupnosti blíží k číslu A. Vezmeme $\varepsilon > 0$ a interval délky 2ε se středem v bodě A, tj. interval $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Aby se hodnota členů posloupnosti (a_n) blížila k hodnotě A musí pro "dostatečně velká n" ležet hodnoty členů posloupnosti v intervalu $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Sousloví "dostatečně velká n" zde znamená, že tato n jsou větší než nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$.

Matematicky lze toto tvrzení vyjádřit tak, že pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|A - a_n| < \varepsilon$. Toto tvrzení závisí na námi zvolené hodnotě ε. Ale interval, který jsme vybrali kolem hodnoty A může být libovolně malý. Proto musí takové tvrzení platit pro každé $\varepsilon > 0$. To nás vede k definici:

Definice. Řekneme, že posloupnost reálných čísel (a_n) má limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|A - a_n| < \varepsilon$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}\,; \; \forall n \in \mathbb{N}\,, \; n > n_0 \; \text{ je } \; |A - a_n| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Tento výrok budeme psát jako $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

Řekneme, že posloupnost reálných čísel (a_n) má limitu $+\infty$, jestliže pro každé K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $a_n > K$, tj.

$$\forall K \; \exists n_0 \in \mathbb{N}\,; \; \forall n \in \mathbb{N}\,, \; n > n_0 \; \text{ je } \; a_n > K\,. \tag{3}$$

Tento výrok budeme psát jako $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Řekneme, že posloupnost reálných čísel (a_n) má limitu $-\infty$, jestliže pro každé K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $a_n < K$, tj.

$$\forall K \; \exists n_0 \in \mathbb{N}\,; \; \forall n \in \mathbb{N}\,, \; n > n_0 \; \text{ je } \; a_n < K\,. \tag{4}$$

Tento výrok budeme psát jako $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Tvrzení (2), (3) a (4) lze vyjádřit jediným způsobem pomocí okolí bodu.

Definice. Řekneme, že posloupnost reálných čísel (a_n) má limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže pro každé okolí $U(A)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $a_n \in U(A)$, tj.

$$\forall U(A) \; \exists n_0 \in \mathbb{N}\,; \; \forall n \in \mathbb{N}\,, \; n > n_0 \; \text{ je } \; a_n \in U(A)\,. \tag{5}$$

`Poznámka`: Tvrzení (5) je ekvivalentní tomu, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ právě tehdy, když pro každé okolí $U(A)$ je množina $M = \big\{n \in \mathbb{N}\,; \; a_n \notin U(A)\big\}$ konečná, konkrétně je to podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n_0\}$.

Příklad: Dokažte podle definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 2n^2 + 3n + 2}{n^3 + n + 3} = 1$.

Řešení: Nechť je $\varepsilon > 0$ a označme M_ε množinu všech $n \in \mathbb{N}$ takových, že

$$\left|\frac{n^3 + 2n^2 + 3n + 2}{n^3 + n + 3} - 1\right| = \left|\frac{2n^2 + 2n - 1}{n^3 + n + 3}\right| = \frac{2n^2 + 2n - 1}{n^3 + n + 3} < \varepsilon\,.$$

Množinu M_ε není snadné najít. Proto najdeme její vhodnou podmnožinu $\widehat{M_\varepsilon}$.

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $2n^2 + 2n - 1 \le 3n^2$ a $n^3 + n + 1 > n^3$, je

$$\frac{2n^2 + 2n - 1}{n^3 + n + 3} < \frac{3n^2}{n^3} = \frac{3}{n}\,. \tag{6}$$

Označme $\widehat{M_\varepsilon}$ množinu všech $n \in \mathbb{N}$ takových, že $\dfrac{3}{n} < \varepsilon$, tj.

$$\widehat{M_\varepsilon} = \left\{ n \in \mathbb{N}\,;\ \frac{3}{n} < \varepsilon \right\}.$$

Z nerovnosti (6) plyne, že $\widehat{M_\varepsilon} \subset M_\varepsilon$.

Pro $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\dfrac{3}{\varepsilon} < n_0 \leq \dfrac{3}{\varepsilon} + 1$, je každé $n > n_0$ prvkem množiny $\widehat{M_\varepsilon}$, a tedy i množiny M_ε, tj. platí pro ně nerovnost

$$\left| \frac{n^3 + 2n^2 + 3n + 2}{n^3 + n + 3} - 1 \right| < \varepsilon\,.$$

Pro limitu posloupnosti platí následující věta o jednoznačnosti limity.

Věta. Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, je tato limita jediná.

Proto lze všechny posloupnosti rozdělit na posloupnosti, které mají konečnou limitu a které konečnou limitu nemají.

Definice. Posloupnosti, které mají konečnou limitu se nazývají *konvergentní* a ostatní posloupnosti, tj. posloupnosti, které mají limitu $\pm\infty$ nebo nemají žádnou limitu, se nazývají *divergentní*.

Pro posloupnost $\mathbf{a}_n$ v $\mathbb{R}^k$ budeme limitu definovat pomocí okolí.

Definice. Nechť je $(\mathbf{a}_n)$ posloupnost v $\mathbb{R}^k$. Jestliže

$$\forall U(\mathbf{A})\, \exists n_0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ n > n_0 \text{ je } \mathbf{a}_n \in U(\mathbf{A})\,, \tag{7}$$

tj. pro každé okolí $U(\mathbf{A})$ bodu $\mathbf{A}$ existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ je $\mathbf{a}_n$ v okolí $U(\mathbf{A})$, řekneme, že posloupnost $\mathbf{a}_n$ má limitu $\mathbf{A}$. Tento výrok zapisujeme jako $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{A}$.

Definice. Jestliže má posloupnost $(\mathbf{a}_n)$ limitu, nazývá se *konvergentní*. Posloupnost, která limitu nemá, se nazývá *divergentní*.

Posloupnost $(\mathbf{a}_n)$ v $\mathbb{R}^k$ je v podstatě definována pomocí k posloupností v $\mathbb{R}$. Konkrétně je $\mathbf{a}_n = \left(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)}\right)$, kde $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, …, $a_n^{(k)}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Její limita je prvek $\mathbb{R}^k$, tj. $\mathbf{A} = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}\right)$. Následující věta říká, jak souvisí limita posloupnosti $\mathbf{a}_n$ s limitami reálných posloupností $a_n^{(i)}$, kde $i = 1, 2, \ldots, k$.

Věta. Posloupnost $\left(\mathbf{a}_n\right) = \left(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)}\right)$ v $\mathbb{R}^k$ konverguje právě tehdy, když konvergují všechny posloupnosti $\left(a_n^{(i)}\right)$, kde $i = 1, 2, \ldots, k$. Přitom platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}\right) \quad \text{právě tehdy, když} \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{(i)} = A^{(i)}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

`Poznámka:` Tedy abychom našli limitu konvergentní posloupnosti $\mathbf{a}_n$ v $\mathbb{R}^k$, musíme najít k limit posloupností $a_n^{(i)}$, kde $i = 1, \ldots, k$. Pokud aspoň jedna z těchto posloupností diverguje, tj. nemá limitu nebo má limitu $\pm\infty$, posloupnost $\mathbf{a}_n$ diverguje.

Limity posloupností většinou počítáme tak, že nějaké základní limity známe (mělo by se dokázat, že to jsou skutečně limity uvedených posloupností) a další limity se snažíme převést na základní limity pomocí jistých vět.

Není jasné, které limity máme považovat za základní. Uvedeme zde jen několik známých limit, ale záleží na každém, jaké limity se naučí nazpaměť.

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} +\infty & \text{pro } p > 0\,; \\ 0 & \text{pro } p < 0\,. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro } a > 1\,; \\ 1 & \text{pro } a = 1\,; \\ 0 & \text{pro } |a| < 1\,; \\ \text{neexistuje} & \text{pro } a \le -1\,. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Mnohé další limity lze najít podle následující věty.

Věta: Nechť existují limity $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, kde A, $B \in \mathbb{R}^*$ a α, $\beta \in \mathbb{R}$. Pokud mají výrazy na pravé straně smysl v $\mathbb{R}^*$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \big(\alpha a_n + \beta b_n\big) = \alpha A + \beta B\,;$$
$$\lim_{n\to\infty} \big(a_n b_n\big) = AB\,;$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}\,.$$

Příklad. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-2n+2}\,\sqrt{2n+3}}{\sqrt{8n^3-2n^2+2}}$.

Řešení: Předchozí větu nemůžeme použít přímo, protože se jedná o výraz $\dfrac{\infty}{\infty}$, který není v $\mathbb{R}^*$ definován. Proto nejprve upravíme výraz v limitě na tvar

$$\frac{\sqrt{n^2-2n+2}\,\sqrt{2n+3}}{\sqrt{8n^3-2n^2+2}} = \frac{n^{3/2}\sqrt{1-2n^{-1}+2n^{-2}}\,\sqrt{2+3n^{-1}}}{n^{3/2}\sqrt{8-2n^{-1}+2n^{-3}}} = \frac{\sqrt{1-2n^{-1}+2n^{-2}}\,\sqrt{2+3n^{-1}}}{\sqrt{8-2n^{-1}+2n^{-3}}}\,.$$

Podle známých limit a předchozí věty je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-2n+2}\,\sqrt{2n+3}}{\sqrt{8n^3-2n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-2n^{-1}+2n^{-2}}\,\sqrt{2+3n^{-1}}}{\sqrt{8-2n^{-1}+2n^{-3}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad: Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt{n^2+3n+4} - n\big)$.

ŘEŠENÍ: Protože se jedná o neurčitý výraz typu $\infty-\infty$, nemůžeme přímo použít uvedenou větu. Ale když upravíme výraz v limitě na tvar

$$\sqrt{n^2+3n+4}-n=\left(\sqrt{n^2+3n+4}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+3n+4}+n}{\sqrt{n^2+3n+4}+n}=\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}+n}=$$
$$=\frac{3+4n^{-1}}{\sqrt{1+3n^{-1}+4n^{-2}}+1},$$

dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+4}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+4n^{-1}}{\sqrt{1+3n^{-1}+4n^{-2}}+1}=\frac{3}{2}.$$

Nyní uvedeme několik takřka samozřejmých vět o limitách posloupností, které použijeme později.

Věta. Nechť existuje $N\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n>N$ je $a_n\le b_n$. Pokud existují $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ a $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, platí $A\le B$.

Věta. Nechť existuje $N\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n>N$ je $a_n\le b_n\le c_n$. Pokud existují $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$, pak existuje $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

Věta. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$.

Existuje ještě jeden typ limity, který lze najít. K tomu budeme potřebovat definici omezené posloupnosti.

Definice. Posloupnost (a_n) se nazývá *omezená*, jestliže existuje $k\in\mathbb{R}$ takové, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ je $|a_n|\le k$.

Věta. Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ a (b_n) je omezená posloupnost. Pak existuje $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

Příklad: Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{n}\sin n^2$.

ŘEŠENÍ: Pro posloupnost $a_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{n}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Posloupnost $b_n=\sin n^2$ je omezená, protože $\left|\sin n^2\right|\le 1$. Tedy podle předchozí věty je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{n}\sin n^2=0$.

Uvědomte si, že $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2$ neexistuje, a proto jsme nemohli použít větu o limitě součinu.

Někdy je při výpočtu limit užitečné vědět, že posloupnost konverguje, i když neznáme hodnotu její limity. Například, jestliže budeme vědět, že existuje konečná nezáporná limita posloupnosti (a_n), která je definována předpisem $a_1=1$ a

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{a_n}+a_n\right),\tag{8}$$

lze této znalosti využít k jejímu výpočtu. Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \geq 0$. Jestliže přejdeme ve vztahu (8) k limitě, dostaneme pro A rovnici

$$A = \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{A} + A\Big),$$

ze které plyne $A^2 = 3$. A protože $A \geq 0$, je $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$.

Uvedeme dvě důležité věty, které zaručují existenci limity. K první větě budeme potřebovat pojem monotonní posloupnosti.

Definice.
Řekneme, že posloupnost (a_n) je *rostoucí*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} > a_n$.
Řekneme, že posloupnost (a_n) je *klesající*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} < a_n$.
Řekneme, že posloupnost (a_n) je *nerostoucí*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \leq a_n$.
Řekneme, že posloupnost (a_n) je *neklesající*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \geq a_n$.
Takové posloupnosti se nazývají souhrnně *monotonní* a posloupností rostoucí nebo klesající se nazývají *ryze monotonní* posloupnosti.

Věta. Každá monotonní posloupnost má limitu v $\mathbb{R}^*$.

Náznak důkazu. Jestliže označíme $M = \big\{a_n\,;\ n \in \mathbb{N}\big\}$, je limita neklesající posloupnosti rovna $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup M$ a pro nerostoucí posloupnost je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf M$ a tvrzení věty plyne z toho, že každá množina $M \subset \mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}^*$ supremum a infimum.

Věta. Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní. Každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Tvrzení věty plyne z předchozí věty a toho, že pro každou neprázdnou shora omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ je $\sup M \in \mathbb{R}$ a pro každou neprázdnou zdola omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ je $\inf M \in \mathbb{R}$.

Příklad: Posloupnost $a_n = \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{n+1}$ je zdola omezená klesající posloupnost. Proto existuje její limita. Pro tuto limitu budeme psát

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n} = \mathrm{e}\,,$$

kde $\mathrm{e} \doteq 2{,}718282\ldots$ je tzv. *Eulerovo číslo*.

Řešení: Členy posloupnosti (a_n) jsou nezáporné, a proto je posloupnost zdola omezená nulou.

Nerovnost $a_{n+1} < a_n$ plyne z následující série nerovností:

$$n(n+2) < (n+1)^2 \iff 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} < \Big(1 + \frac{1}{n(n+2)}\Big)^{n+1} \iff$$
$$\iff \frac{n+2}{n+1} < \Big(\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}\Big)^{n+1} \iff \frac{n+2}{n+1} < \Big(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\Big)^{n+1} \iff$$
$$\iff \Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^{n+2} < \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n+1} \iff \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+2} < \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1}.$$

Jak jsme se už zmínili v první přednášce je výraz typu 1^∞ neurčitý výraz. Limity takového typu lze často najít pomocí následujícího tvrzení:

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \bigl(1 + a_n\bigr)^{b_n} = \exp\Bigl(\lim_{n\to\infty} a_n b_n\Bigr), \quad \text{kde} \quad \exp(x) = \mathrm{e}^x\,. \tag{9}$$

Příklad: Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{1-3n}$.

Řešení: Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n-3} = 1$, jedná se o limitu typu 1^∞. Jestliže napíšeme $\dfrac{2n+1}{2n-3} = 1 + \dfrac{4}{2n-3}$, zjistíme, že $a_n = \dfrac{4}{2n-3}$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $b_n = 1 - 3n$, je

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4(1-3n)}{2n-3} = -6 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{1-3n} = \mathrm{e}^{-6}\,.$$

Následující věta udává podmínku, která je ekvivalentní konvergenci posloupnosti (a_n) a má velký význam v celé matematické analýze.

Věta (*Cauchy–Bolzanova podmínka konvergence*). Posloupnost (a_n) je konvergentní právě tehdy, když splňuje Cauchy–Bolzanovu podmínku:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall\, n,\ k \in \mathbb{N}\,,\ n > n_0 \ \text{ platí } \ |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon\,.$$

Hromadné body posloupnosti

Podle definice je bod $\mathbf{A}$ limita posloupnosti $(\mathbf{a}_n)$ právě tehdy, když pro každé okolí $U(\mathbf{A})$ bodu $\mathbf{A}$ je množina

$$N = \bigl\{n \in \mathbb{N}\,;\ \mathbf{a}_n \notin U(\mathbf{A})\bigr\}$$

konečná. Takový bod $\mathbf{A}$ může být pro danou posloupnost pouze jeden, a proto je limita, pokud existuje, jediná.

Protože je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ nekonečná, musí být pro každé okolí $U(\mathbf{A})$ limity posloupnosti $(\mathbf{a}_n)$ množina

$$M = \bigl\{n \in \mathbb{N}\,;\ \mathbf{a}_n \in U(\mathbf{A})\bigr\} \tag{10}$$

nekonečná. Ale z tvrzení, že pro každé okolí $U(\mathbf{A})$ je množina (10) nekonečná neplyne, že bod $\mathbf{A}$ je limita posloupnosti $(\mathbf{a}_n)$. Problém je v tom, že nekonečnou množinu můžeme rozdělit na více nekonečných množin, které jsou disjunktní, tj. neprotínají se. Proto může být bodů s uvedenou vlastností pro danou posloupnost víc. Takové body se nazývají *hromadné body posloupnosti.*

Definice. Bod $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$ se nazývá *hromadný bod posloupnosti* $\bigl(\mathbf{a}_n\bigr)$ v $\mathbb{R}^k$, jestliže

$$\forall U(\mathbf{A}) \text{ a } \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\,,\ n > n_0 \text{ je } \mathbf{a}_n \in U(\mathbf{A})\,. \tag{11}$$

`Poznámka:` Když srovnáme definici hromadného bodu (11) s definicí limity posloupnosti (7), vidíme, že se tyto limity liší pouze pořadím kvantifikátorů $\forall$ a $\exists$.

Existuje ještě jiná charakteristika hromadného bodu. Ta využívá pojem vybrané posloupnosti $\big(\mathbf{b}_n\big)$ z posloupnosti $\big(\mathbf{a}_n\big)$.

Definice. Nechť je dána posloupnost $\big(\mathbf{a}_n\big)$. Řekneme, že posloupnost $\big(\mathbf{b}_n\big)$ je *vybraná* z posloupnosti $\big(\mathbf{a}_n\big)$, jestliže existuje rostoucí posloupnost $\varphi(n)$ s hodnotami v $\mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbf{b}_n = \mathbf{a}_{\varphi(n)}$.

`Poznámka:` Zdůrazněme, že posloupnost $\varphi(n)$ má hodnoty v $\mathbb{N}$ a je rostoucí, tj. platí pro ni $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

Věta. Jestliže existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{A}$ a posloupnost $\big(\mathbf{b}_n\big)$ je vybraná z posloupnosti $\big(\mathbf{a}_n\big)$, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{b}_n = \mathbf{A}$.

Tato věta se často používá k důkazu tvrzení, že posloupnost $\big(\mathbf{a}_n\big)$ nemá limitu.

Příklad 1. Dokažte, že posloupnost $a_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$ nemá limitu.

Řešení: Z posloupnosti (a_n) vybereme dvě posloupnosti

$$b_n = a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \quad \text{a} \quad c_n = a_{2n-1} = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}.$$

Pak je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \mathrm{e}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \mathrm{e}^{-1}$. Protože se tyto limity nerovnají, nemá posloupnost (a_n) limitu.

Věta. Bod $\mathbf{A}$ je hromadný bod posloupnosti $\big(\mathbf{a}_n\big)$ právě tehdy, když existuje posloupnost $\big(\mathbf{b}_n\big)$ vybraná z posloupnosti $\big(\mathbf{a}_n\big)$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{b}_n = \mathbf{A}$.

Příklad 2. Najděte všechny hromadné body posloupnosti $a_n = \big(\sqrt{n^2+n} - n\big) \sin \frac{2}{3} n\pi$.

Řešení: Limita posloupnosti $b_n = \sqrt{n^2+n} - n$

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sqrt{n^2+n} - n\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\sqrt{n^2+n} - n\big) \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2}\,.$$

Z posloupnosti (a_n) vybereme tři podposloupnosti

$$\begin{aligned}
c_{0,n} = a_{3n} &= \big(\sqrt{(3n)^2+3n} - 3n\big) \sin \tfrac{2}{3}\, 3n\pi = 0\,,\\
c_{1,n} = a_{3n+1} &= \big(\sqrt{(3n+1)^2+3n+1} - 3n+1\big) \sin \tfrac{2}{3}\,(3n+1)\pi = \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\big(\sqrt{(3n+1)^2+3n+1} - 3n+1\big)\,,\\
c_{2,n} = a_{3n+2} &= \big(\sqrt{(3n+2)^2+3n+2} - 3n+2\big) \sin \tfrac{2}{3}\,(3n+2)\pi = \\
&= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big(\sqrt{(3n+1)^2+3n+1} - 3n+1\big)\,.
\end{aligned}$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} c_{0,n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_{1,n} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} c_{2,n} = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$, je množina hromadných bodů posloupnosti (a_n) rovna $\big\{0, \frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{4}\sqrt{3}\big\}$.

Příklad 3. Najděte množinu všech hromadných bodů posloupnosti

$$\left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \dots, \tfrac{1}{k}, \tfrac{2}{k}, \dots, \tfrac{k-1}{k}, \dots\right\}.$$

Řešení: Posloupnost obsahuje všechna racionální čísla z intervalu $(0,1)$. Protože každé reálné číslo z intervalu $\langle 0,1\rangle$ je limitou posloupnosti racionálních čísel z intervalu $(0,1)$ je množina všech hromadných bodů této posloupnosti celý interval $\langle 0,1\rangle$.

Pro posloupnosti reálných čísel (a_n) nás mnohdy nezajímá množina všech hromadných bodů posloupnosti, ale pouze největší nebo nejmenší hromadný bod.

Definice. Supremum množiny všech hromadných bodů posloupnosti (a_n) se nazývá *limes superior* a značí se $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.
Infimum množiny všech hromadných bodů posloupnosti (a_n) se nazývá *limes inferior* a značí se $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Příklad: Limes superior a limes inferior pro posloupnosti z příkladů 1.–3. jsou
$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-1}$ v příkladu 1;
$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$ v příkladu 2 a
$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ v příkladu 3.

Příklad. Nechť je (a_n) posloupnost reálných čísel. Označme $M_n = \big\{a_k\,;\ k \ge n\big\}$ a definujme posloupnosti $b_n = \sup M_n$ a $c_n = \inf M_n$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $M_{n+1} \subset M_n$, je $b_{n+1} \le b_n$ a $c_{n+1} \ge c_n$. Tedy posloupnost (b_n) je nerostoucí a posloupnost (c_n) je neklesající. Proto existují jejich limity a platí

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\big(\sup M_n\big) = \limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\big(\inf M_n\big) = \liminf_{n\to\infty} a_n\,.$$

Další významná vlastnost kompaktních množin $M \subset \mathbb{R}^k$ v matematické analýze je, že jsou to jediné podmnožiny $\mathbb{R}^k$, pro které má každá posloupnost $\big(\mathbf{a}_n\big)$, jejíž členy leží v množině M alespoň jeden hromadný bod, který leží v množině M.

Věta. Množina $M \subset \mathbb{R}^k$ je kompaktní právě tehdy, když z libovolné posloupnosti $(\mathbf{a}_n)$ v M, tj. $\mathbf{a}_n \in M$, lze vybrat konvergentní posloupnost takovou, že její limita leží v množině M.