Přednáška 3

Základní vlastnosti zobrazení a funkcí
Elementární funkce

Osnova přednášky

1. Definice zobrazení $f : X \to Y$.

2. Vztah mezi zobrazením $f : X \to \mathbb{R}^k$ a k funkcemi $f_i : X \to \mathbb{R}$.

3. Definiční obor zobrazení.

4. Graf zobrazení.

5. Složené zobrazení.

6. Obraz množiny $A \subset X$. Obor hodnot zobrazení.

7. Vzor množiny $B \subset Y$.

8. Řešení rovnice $y = f(x)$ s neznámou $x \in D_f$, zobrazení na množinu Y.

9. Prosté zobrazení.

10. Vzájemně jednoznačné zobrazení.

11. Inverzní zobrazení.

12. Inverzní zobrazení k inverznímu zobrazení.

13. Graf inverzního zobrazení.

14. Příklad: inverzní funkce k $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

15. Inverzní zobrazení složeného zobrazení.

16. Zúžení zobrazení na množinu $M \subset X$.

17. Příklad: funkce $f(x) = \sqrt{x}$ jako inverzní funkce.

18. Omezená funkce a funkce omezená na množině.

19. Monotonní funkce a funkce monotonní na množině.

20. Ryze monotonní funkce je prostá.

21. Monotonie inverzní funkce a nerovnosti.

22. Maxima a minima funkce.

23. Funkce konvexní a konkávní na intervalu. Inflexní body funkce.

24. Funkce sudá a lichá.

25. Periodická funkce.

26. Polynomy. Kořeny polynomu, rozklad polynomu na součin kořenových činitelů.

27. Exponenciální funkce.

28. Logarimická funkce.

29. Obecná mocnina.

30. Goniometrické funkce.

31. Eulerův vztah $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$.

32. Cyklometrické funkce.

33. Hyperbolické funkce.

34. Hyperbolometrické funkce.

V první části této přednášce uvedeme některé obecné vlastnosti zobrazení. Druhá část je pak věnována definici některých pojmů pro funkci jedné reálné proměnné, které budeme studovat v přednášce.

Základní vlastnosti zobrazení

Definice. Nechť jsou X a Y jsou libovolné množiny. Zobrazení f množiny X do množiny Y přiřazuje každému prvku $x \in X$ právě jeden prvek $y \in Y$.
Zobrazení f množiny X do množiny Y budeme psát jako $f : X \to Y$. Pro prvek $y \in Y$, který je přiřazen prvku $x \in X$ při zobrazení f, budeme často používat označení $y = f(x)$.

`Poznámky:` Jestliže je Y podmnožina množiny reálných čísel, nazývá se zobrazeni $f : X \to Y$ *funkce* na množině X.
Jestliže je $Y \subset \mathbb{R}^k$, přiřazuje zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y$ každému $x \in X$ uspořádanou k–tici reálných čísel $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x)$, neboli

$$\big(y_1, y_2, \dots, \dots, y_k\big) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\big)\,, \quad \text{neboli} \quad y_i = f_i(x)\,,$$

kde $i = 1, 2, \dots, k$. Takové zobrazení je tedy popsáno k funkcemi $f_i : X \to Y_i$.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$ zobrazení. Množina X se nazývá *definiční obor* zobrazení f a budeme ji značit D_f.

`Poznámky:` Podle definice bychom měli pro zobrazení zadat také množiny X a Y. Například by se měly rozlišovat funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty)$, které jsou definované předpisem $x \mapsto y = x^2$.
V mnohých příkladech je zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$ a $Y \subset \mathbb{R}^k$ zadáno pouze pomocí předpisů $f_i(\mathbf{x})$. Jestliže v těchto případech není explicitně zadána množina X, budeme za definiční obor zobrazení $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ považovat největší podmnožinu $\mathbb{R}^n$, na které jsou definovány všechny funkce $y_i = f_i(\mathbf{x})$ a mají na ní reálné hodnoty.
Pokud nezadáme explicitně množinu Y, bude $Y = \mathbb{R}^k$.

Definice. Nechť je dáno zobrazení $f : X \to Y$. Pak množinu

$$\mathcal{G}_f = \big\{(x, y) \in X \times Y\,;\ x \in X\,,\ y = f(x)\big\}$$

nazýváme *graf* zobrazení $y = f(x)$.

Definice. Nechť jsou dána zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$. Zobrazení $h : X \to Z$ definované předpisem $h(x) = g\big(f(x)\big)$ nazýváme *složené zobrazení* a budeme je značit $h = g \circ f$.

Definice. Nechť je dáno zobrazení $f : X \to Y$ a $A \subset X$. Pak množinu

$$f(A) = \big\{y \in Y\,;\ \exists x \in A\,,\ y = f(x)\big\}$$

nazýváme *obraz množiny* A při zobrazení f.

Definice. Množina $f(X)$ se nazývá *obor hodnot* zobrazení f a budeme ji značit H_f.

Definice. Nechť je dáno zobrazení $f : X \to Y$ a $B \subset Y$. Pak množinu

$$f^{(-1)}(B) = \big\{x \in X\,;\ f(x) \in B\big\}$$

nazýváme *vzor množiny* B při zobrazení f.

Inverzní zobrazení

Nyní se budeme zabývat řešením rovnice $y = f(x)$ pro neznámou x, kde $f : X \to Y$ je dané zobrazení.

Podle definice má tato rovnice řešení právě tehdy, když $y \in H_f$ a pro dané $y \in H_f$ je množina všech řešení této rovnice množina $f^{(-1)}(y) \subset X$.

Definice. Nechť je dáno zobrazení $f : X \to Y$. Je-li $H_f = Y$ říkáme, že zobrazení f je *zobrazení na množinu* Y, neboli *surjektivní*.

Je zřejmé, že zobrazení f je na množinu Y právě tehdy, když pro každé $y \in Y$ existuje aspoň jedno řešení rovnice $y = f(x)$. Například funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $x \mapsto y = x^2$ není na množinu, ale funkce $g : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty)$ definovaná stejným předpisem je na množinu.

Nyní nás budou zajímat zobrazení, pro které je řešení rovnice $y = f(x)$, pokud existuje, jediné. To znamená, že pro takové zobrazení je množina $f^{(-1)}(y)$ prázdná nebo obsahuje pouze jeden bod. Taková zobrazení se nazývají prostá.

Definice. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *prosté*, neboli *injektivní*, když ze vztahu $f(x_1) = f(x_2)$ plyne $x_1 = x_2$.

`Poznámka:` Ze známe, aspoň doufám, logické identity

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$$

plyne, že zobrazení $f : X \to Y$ je prosté právě tehdy, když ze vztahu $x_1 \neq x_2$ plyne $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Zvlášť důležitá jsou zobrazení, pro která má rovnice $y = f(x)$ právě jedno řešení pro každé $y \in Y$. V tomto případě mezi sebou jednoznačně souvisí prvek $x \in X$ s prvkem $y = f(x) \in Y$.

Definice. Zobrazení $f : X \to Y$, které je prosté a na množinu Y se nazývá zobrazení *vzájemně jednoznačné*, neboli *bijektivní*.

Je-li zobrazení $f : X \to Y$ bijektivní, je každému $x \in X$ přiřazeno právě jedno $y = f(x) \in Y$ podle definice zobrazení, ale navíc každému $y \in Y$ odpovídá právě jedno $x \in X$, pro které je $y = f(x)$. Proto můžeme definovat zobrazení $g : Y \to X$ předpisem $x = g(y)$ právě tehdy, když je $y = f(x)$.

Věta. Nechť je zobrazení $f : X \to Y$ bijektivní. Pak existuje právě jedno zobrazení $g : Y \to X$ takové, že

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{a} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y \,, \tag{1}$$

kde $\mathrm{id}_X : X \to X$ je identická funkce, tj. $\mathrm{id}_X(x) = x$ pro každé $x \in X$ a podobně id_Y.

Definice. Je-li $f : X \to Y$ bijektivní zobrazení, nazývá se zobrazení $g : Y \to X$ z předchozí věty *inverzní zobrazení* k zobrazení f a značí se $f^{(-1)}$.

Z definice plyne, že inverzní zobrazení $f^{(-1)}$ existuje pouze k vzájemně jednoznačnému zobrazení f a je také vzájemně jednoznačné. Proto k němu můžeme sestrojit inverzní zobrazení. Je zřejmé, že inverzní zobrazení k inverznímu zobrazení je původní zobrazení f, tj. že platí $\big(f^{(-1)}\big)^{(-1)} = f$. Tedy vzájemně jednoznačné zobrazení tvoří jakési dvojice: $\big(f, f^{(-1)}\big)$.

`Poznámka:` Jestliže je $f : X \to Y$, kde $X, Y \subset \mathbb{R}$, slouží inverzní funkce především k tomu, abychom zavedli značku pro řešení rovnice $y = f(x)$. Jestliže toto řešení existuje pro každé $y \in Y$ a je jediné, označíme ho prostě $x = f^{(-1)}(y)$. Podobně jako pro funkce, které se často používají, se pro inverzní funkce zavádějí speciální značky.

Nechť je $f : X \to Y$, kde $X, Y \subset \mathbb{R}$ vzájemně jednoznačná funkce. Její graf je množina

$$\mathcal{G}_f = \big\{(x, y) \in X \times Y \,;\ x \in X \,,\ y = f(x)\big\} \,.$$

Graf její inverzní funkce $f^{(-1)} : Y \to X$ je podle definice množina

$$\mathcal{G}_{f^{(-1)}} = \big\{(y, x) \in Y \times X \,;\ y \in Y \,,\quad x = f^{(-1)}(y) \Leftrightarrow y = f(x)\big\} \,.$$

Tedy graf inverzní funkce $f^{(-1)}$ je v rovině (xy) stejná množina pouze nezávisle proměnná je na svislé ose. Abychom přešli k obvyklému znázornění, kde je nezávisle proměnná na vodorovné ose, můžeme například udělat zrcadlení podle osy prvního a třetího kvadrantu, tj. přímky $y = x$.

Podle definice je

$$y = f(x) \iff x = f^{(-1)}(y) \,.$$

Abychom dostali obvyklý zápis, kde se značí nezávisle proměnná x a závisle proměnná y, musíme v předchozím vztahu pro inverzní funkci zaměnit x za y.

Příklad: Najděte inverzní funkce k funkci $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je $X = D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Protože není dána množina Y, budeme pro začátek předpokládat, že $Y = \mathbb{R}$. Navíc nevíme, zda je tato funkce vzájemně jednoznačná. Proto budeme hledat řešení rovnice $y = f(x)$ pro dané $y \in \mathbb{R}$. To je

$$y = \frac{x+1}{x-2} \implies xy - 2y = x + 1 \implies x(y-1) = 2y + 1\,.$$

Tato rovnice nemá řešení pro $y = 1$. To znamená, že $\{1\} \notin H_f$. Pro ostatní $y \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení

$$x = \frac{2y+1}{y-1}\,.$$

Tedy funkce $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ má obor hodnot $H_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a je prostá na množině $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Funkce $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ je vzájemně jednoznačná funkce

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Její inverzní funkce

$$f^{(-1)} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

je definovaná vztahem

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{(-1)}(y)\,, \quad \text{tj.} \quad y = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}\,.$$

Přejdeme-li k obvyklému značení, tj. zaměníme $x \leftrightarrow y$, dostaneme

$$y = f^{(-1)}(x) = \frac{2x+1}{x-1}\,.$$

Věta. Nechť jsou $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ vzájemně jednoznačná zobrazení. Pak je zobrazení $h = g \circ f : X \to Z$ vzájemně jednoznačné a platí

$$h^{(-1)} = \big(g \circ f\big)^{(-1)} = f^{(-1)} \circ g^{(-1)}\,.$$

Důkaz: Protože jsou zobrazení f a g surjektivní, existuje pro každé $z \in Z$ prvek $y \in Y$, pro který je $g(y) = z$, a prvek $x \in X$ takový, že $f(x) = y$. Pro takové x je

$$h(x) = \big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z\,.$$

To podle definice znamená, že zobrazení $h : X \to Z$ je na množinu Z.

Protože jsou zobrazení f a g prostá plyne z rovnosti $g(y_1) = g(y_2)$ vztah $y_1 = y_2$ a z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ vztah $x_1 = x_2$. Jestliže tedy platí $h(x_1) = h(x_2)$ je

$$g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \implies f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\,.$$

To znamená, že zobrazení h je prosté, a tedy $h : X \to Z$ je vzájemně jednoznačné.

Protože je $h : X \to Z$ vzájemně jednoznačné, existuje k němu inverzní zobrazení $h^{(-1)} : Z \to X$. Platí

$$\big(g \circ f\big)\circ\big(f^{(-1)} \circ g^{(-1)}\big) = g \circ \big(f \circ f^{(-1)}\big) \circ g^{(-1)} = g \circ \mathrm{id}_Y \circ g^{(-1)} = g \circ g^{(-1)} = \mathrm{id}_Z\,,$$
$$\big(f^{(-1)} \circ g^{(-1)}\big) \circ \big(g \circ f\big) = f^{(-1)} \circ \big(g^{(-1)} \circ g\big) \circ f = f^{(-1)} \circ \mathrm{id}_Y \circ f = f^{(-1)} \circ f = \mathrm{id}_X\ .$$

Tyto rovnosti znamenají, že $h^{(-1)} = \big(g \circ f\big)^{(-1)} = f^{(-1)} \circ g^{(-1)}$ je inverzní funkce k funkci $h = g \circ f$.

`Poznámka:` Srovnejte tento vztah se vztahem pro inverzní matici součinu dvou regulárních matic.

Nechť je dáno zobrazení $f : X \to Y$. Mnohdy nás nezajímají hodnoty zobrazení f pro všechna $x \in X$, ale pouze pro body z nějaké podmnožiny $M \subset X$. Tím definujeme nové zobrazení, které má menší definiční obor, ale je na něm definováno stejným předpisem jako zobrazení f. Pro taková zobrazení se zavádí speciální pojmenování.

Definice. Nechť je dáno zobrazení $f : X \to Y$ a množina $M \subset X$. Pak zobrazení $f_{|M} : M \to Y$ definované předpisem $f_{|M}(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$ nazýváme *zúžení* zobrazení f na množinu M.

Příklad: Funkce $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty)$ definovaná předpisem $x \mapsto y = x^2$ je funkce na množinu $\langle 0, +\infty)$, ale není prostá (protože $x^2 = (-x)^2$). Z této funkce vytvoříme prostou funkci tak, že zúžíme definiční obor funkce například na interval $\langle 0, +\infty)$. Pak dostaneme funkci

$$f_{|\langle 0,+\infty)} : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)\,,$$

která je vzájemně jednoznačná, a proto k ní existuje inverzní funkce. Je zvykem tuto inverzní funkci nazývat druhá odmocnina x a zapisovat ji ve tvaru $y = \sqrt{x}$.

Poznamenejme, že rovnosti (1), které v tomto případě jsou

$$\big(\sqrt{x}\big)^2 = x\,, \qquad \sqrt{x^2} = x\,,$$

platí pouze tehdy, když použijeme funkci $f_{|\langle 0,+\infty)}$, tj. pro $x \geq 0$. Pro reálné x platí pouze $\sqrt{x^2} = |x|$.

Některé důležité vlastnosti funkcí

Nyní budeme definovat další důležité vlastnosti funkcí. Budeme je definovat na množině $M \subset D_f$. Pokud se vynechá sousloví "na množině M", znamená to, že $M = X = D_f$. V některých případech budeme používat nerovnosti na množině X. Proto se takové pojmy definují pouze v případech, kdy je $X \subset \mathbb{R}$.

Definice. (*omezené funkce.*) Nechť je $f : X \to Y$ funkce a $M \subset X$.
Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $f(x) \leq K$, nazývá se funkce f *shora omezená na množině* M.
Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $f(x) \geq K$, nazývá se funkce f *zdola omezená na množině* M.

Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $\left|f(x)\right| \leq K$, nazývá se funkce f *omezená na množině* M.

Definice. (*monotonní funkce.*) Nechť je $f : X \to Y$ funkce a $M \subset X \subset \mathbb{R}$.
Funkce f se nazývá *rostoucí na množině* M, jestliže pro každé x_1, $x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.
Funkce f se nazývá *klesající na množině* M, jestliže pro každé x_1, $x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.
Funkce f se nazývá *nerostoucí na množině* M, jestliže pro každé x_1, $x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Funkce f se nazývá *neklesající na množině* M, jestliže pro každé x_1, $x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Funkce nerostoucí a neklesající na množině M se nazývají *monotonní na množině* M.
Funkce rostoucí a klesající na množině M se nazývají *ryze monotonní na množině* M.

Je snadno vidět, že platí

Věta. Je-li funkce f ryze monotonní na množině M, je na množině M prostá.

Věta. Nechť je funkce $f : X \to Y$ rostoucí (klesající) vzájemně jednoznačná funkce. Pak je její inverzní funkce $f^{(-1)} : Y \to X$ také rostoucí (klesající).

Důkaz: Předpokládejme, že funkce f je rostoucí. Nechť existují y_1, $y_2 \in Y$ takové, že $y_1 < y_2$ a $x_1 = f^{(-1)}(y_1) \geq f^{(-1)}(y_2) = x_2$. Protože je funkce f rostoucí, muselo pro $f(x_2) = y_2 \leq y_1 = f(x_1)$. To je ale spor s předpokladem $y_1 < y_2$.

Důsledek. Nechť je $f : X \to Y$ vzájemně jednoznačná rostoucí, resp. klesající, funkce. Pak je nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$ ekvivalentní nerovnosti $x_1 < x_2$, resp. $x_1 > x_2$.

Definice. (*lokální extrémy funkce.*)
Říkáme, že funkce $f : X \to Y$ má v bodě $x_0 \in X$ *ostré lokální maximum*, když existuje jeho prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x) < f(x_0)$.
Říkáme, že funkce $f : X \to Y$ má v bodě $x_0 \in X$ *ostré lokální minimum*, když existuje jeho prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$.
Říkáme, že funkce $f : X \to Y$ má v bodě $x_0 \in X$ *neostré lokální maximum*, když existuje jeho okolí $U(x_0)$ takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$.
Říkáme, že funkce $f : X \to Y$ má v bodě $x_0 \in X$ *neostré lokální minimum*, když existuje jeho okolí $U(x_0)$ takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$.
Lokální maxima a minima funkce se souhrnně nazývají *lokální extrémy*.

Definice. (*globální extrémy funkce.*)
Řekneme, že funkce $f : X \to Y$ má v bodě $x_0 \in M \subset X$ *ostré globální maximum na množině* M, jestliže pro každé $x \in M$, $x \neq x_0$, je $f(x) < f(x_0)$.
Řekneme, že funkce $f : X \to Y$ má v bodě $x_0 \in M \subset X$ *ostré globální minimum na množině* M, jestliže pro každé $x \in M$, $x \neq x_0$, je $f(x) > f(x_0)$.
Řekneme, že funkce $f : X \to Y$ má v bodě $x_0 \in M \subset X$ *neostré globální maximum na množině* M, jestliže pro každé $x \in M$ je $f(x) \leq f(x_0)$.
Řekneme, že funkce $f : X \to Y$ má v bodě $x_0 \in M \subset X$ *neostré globální minimum na množině* M, jestliže pro každé $x \in M$ je $f(x) \geq f(x_0)$.
Globální maxima a minima funkce se souhrnně nazývají *globální extrémy*.

`Poznámka`: Mnohé příklady vedou k nalezení globálních extrémů funkce na určité množině $M \subset \mathbb{R}$ (všinou kompaktní, tj. omezené a uzavřené). Je zřejmé, že pokud je x_0 vnitřní bod množiny M a existuje jeho okolí $U(x_0)$ takové, že funkce je v tomto okolí ryze monotonní, pak nemá v bodě x_0 na množině M globální extrém. Později ukážeme, jak se dají u jistých funkcí tyto body poměrně snadno najít. Jestliže tyto body vyloučíme a zůstane nám konečný počet bodů, převedeme úlohu najít globální extrémy funkce na množině M na hledání maxima nebo minima z konečné množiny hodnot.

Definice. (*funkce konvexní a konkávní na intervalu.*) Nechť je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ interval a $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$. Funkce f se nazývá *konvexní na intervalu* $\mathcal{I}$, jestliže pro libovolné tři body x_1, x_2, $x_3 \in \mathcal{I}$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_2$, je splněna nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \,.$$

Funkce f se nazývá *konkávní na intervalu* $\mathcal{I}$, jestliže pro libovolné tři body x_1, x_2, $x_3 \in \mathcal{I}$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_2$, je splněna nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \,.$$

Geometricky znamená podmínka pro konvexnost funkce, že pro každé tři body $x_1 < x_2 < x_3$ leží bod $[x_2; f(x_2)]$ na grafu funkce $y = f(x)$ pod přímkou, která spojuje body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_3; f(x_3)]$. U konkávní funkce je tomu naopak.

Z této geometrické interpretace lze snadno nahlédnout, že konvexní (konkávní) funkce může mít na uzavřeném intervalu $\mathcal{I}$ globální maximum (minimum) pouze v krajním bodě intervalu $\mathcal{I}$.

Definice. (*inflexní body funkce.*) Řekneme, že x_0 je *inflexní bod* funkce $f(x)$, když existují x_1, x_2, $x_1 < x_0 < x_2$ takové, že je funkce na intervalu (x_1, x_0) konvexní a na intervalu (x_0, x_2) konkávní nebo je na intervalu (x_1, x_0) konkávní a na intervalu (x_0, x_2) konvexní.

Definice. Funkce $f : X \to Y$ se nazývá *sudá*, když pro každé $x \in X$ platí $f(-x) = f(x)$. Funkce $f : X \to Y$ se nazývá *lichá*, když pro každé $x \in X$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Příklad: Ukažte, že funkce $f(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)$ je lichá.

Řešení: Pro danou funkci platí

$$f(-x) = \ln\bigl(-x + \sqrt{x^2+1}\bigr) = \ln\left(\frac{\bigl(-x + \sqrt{x^2+1}\bigr)\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \ln\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -\ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr) = -f(x)\,.$$

Definice. Nechť je $f : X \to Y$, kde $X \subset \mathbb{R}$ a $L > 0$. Nechť je pro každé $x \in X$ také $x \pm L \in X$. Jestliže pro každé $x \in X$ platí $f(x+L) = f(x)$, nazývá se funkce f *periodická* s periodou L.

Některé elementární funkce jedné reálné proměnné

V této části uvedeme některé funkce jedné reálné proměnné a jejich vlastnosti, které byste měli většinou znát ze střední školy.

Polynomy (mnohočleny)

Polynomem stupně n nazýváme funkci $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \,,$$

kde a_k, $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, jsou reálná čísla a $a_n \neq 0$.
Měli byste umět dělit polynom polynomem.
Reálné číslo x_0, pro které je $P(x_0) = 0$ se nazývá *kořen* (nebo nulový bod) polynomu $P(x)$.
Je-li x_1 kořen polynomu $P(x)$ pak existuje polynom $P_1(x)$ stupně $(n-1)$ takový, že $P(x) = (x - x_1)P_1(x)$. Každý polynom stupně n lze zapsat ve tvaru

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s} \,,$$

kde x_1, x_2, $\ldots$, x_r jsou navzájem různé reálné kořeny polynomu $P(x)$, přirozená čísla k_i se nazývají *násobností* kořene x_i a navzájem různé polynomy $x^2 + p_i x + q_i$ nemají reálný kořen. Navíc platí $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_s) = n$.

Exponenciální funkce

Nechť je $a > 0$, $a \neq 1$. Pak se funkce $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazývá *exponenciální funkce* (jak se přesně definuje iracionální mocnina je trochu složitější a nebudeme se tím zabývat). Pro $a > 1$ je funkce $y = a^x$ rostoucí v celém $\mathbb{R}$ a pro $0 < a < 1$ je tato funkce v celém $\mathbb{R}$ klesající. V obou případech je tedy prostá. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$a^x a^y = a^{x+y} \,, \qquad \big(a^x\big)^y = a^{xy} \,.$$

Logaritmická funkce

Pro každé $a > 0$, $a \neq 1$, je funkce $y = f(x) = a^x$ prostá a její obor hodnot je interval $(0, +\infty)$. Proto existuje k funkci $y = f(x) = a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ inverzní funkce. Tato inverzní funkce se nazývá *logaritmus při základu* a a značí se $y = \log_a x$. Podle definice inverzní funkce je

$$\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

a platí vztahy

$$\log_a\big(a^x\big) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \,, \qquad a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0 \,.$$

Ze vztahu

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

plyne, že pro x, $y > 0$ platí

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \,,$$

a ze vztahu

$$a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = a^{\log_a b \cdot \log_b x}$$

dostaneme

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \,. \tag{2}$$

Logaritmus při základu $a = 10$ se nazývá *dekadický logaritmus* a značí se $\log_{10} x = \log x$.

Logaritmus při základu $a = \mathrm{e}$ se nazývá *přirozený logaritmus* a značí se $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$. V analýze budeme používat hlavně přirozený logaritmus. Pomocí vztahu (2) lze logaritmus při libovolném základu na tento logaritmus převést.

Příklad: Například, když ve vztahu (2) položíme $a = x = \mathrm{e}$ a $b = x \neq 1$, dostaneme například

$$\log_{\mathrm{e}} \mathrm{e} = 1 = \log_{\mathrm{e}} x \cdot \log_x \mathrm{e} \,, \quad \text{tj.} \quad \log_x \mathrm{e} = \frac{1}{\ln x} \,.$$

Obecná mocnina

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme funkce $f(x) = x^a$ vztahem $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$. Definiční obor této funkce je proto $x > 0$. Přímo z definice plyne

$$\mathrm{e}^{\ln x^y} = x^y = \mathrm{e}^{y \ln x} \,, \quad \text{tj.} \quad \ln x^y = y \ln x \,.$$

Když ještě použijeme vztah (2) dostaneme $\log_a x^y = y \log_a x$ pro každé $a > 0$, $a \neq 1$, a $x > 0$.

Goniometrické funkce

Takto se souhrnně nazývají funkce $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$. V matematické analýze budeme velikost úhlu x zásadně vyjadřovat v obloukové míře (v radiánech). Pro goniometrické funkce byste měli znát zejména nějakou jejich definici, vztahy mezi nimi, jejich hodnoty v určitých speciálních bodech a součtové vzorce

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \,, \qquad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \,.$$

Uvedeme zde ještě jeden zajímavý vztah pro goniometrické funkce. Uvažujme komplexní čísla

$$z_1 = \cos x_1 + \mathrm{i} \sin x_1 \,, \qquad z_2 = \cos x_2 + \mathrm{i} \sin x_2 \,.$$

Pak je

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left(\cos x_1 + \mathrm{i} \sin x_1\right)\left(\cos x_2 + \mathrm{i} \sin x_2\right) = \\ &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 + \mathrm{i}\left(\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2\right) . \end{aligned}$$

Jestliže použijeme součtové vzorce, dostaneme vztah

$$\left(\cos x_1 + \mathrm{i} \sin x_1\right)\left(\cos x_2 + \mathrm{i} \sin x_2\right) = \cos(x_1 + x_2) + \mathrm{i} \sin(x_1 + x_2) \,,$$

ze kterého lze nahlédnout, že se komplexní funkce $z(x) = \cos x + \mathrm{i} \sin x$ chová jako exponenciální funkce. Navíc platí $z(0) = 1$. Pro tuto komplexní funkci se používá značka

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x \,, \tag{3}$$

který se nazývá *Eulerův vztah*. Z rovností

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x \quad \text{a} \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x$$

dostaneme vztahy

$$\cos x = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin x = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

Tedy funkce $\cos x$ a $\sin x$ jsou vlastně kombinace exponenciálních funkcí s ryze imaginárním argumentem. Toho lze často využít při výpočtech.

Cyklometrické funkce

To je souhrnný název pro inverzní funkce k patřičně zúženým goniometrickým funkcím.

Funkce $\arcsin x$
Funkci $\sin x$ zúžíme na interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, tj. definujeme funkci

$$f : \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle \to \langle -1, 1\rangle$$

předpisem $f(x) = \sin x$. To je vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ na interval $\langle -1, 1\rangle$. Inverzní funkci k této funkci nazveme *arkus sinus* a budeme ji značit $\arcsin x$. Tedy arkus sinus je funkce

$$y = \arcsin x : \langle -1, 1\rangle \to \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle$$

definovaná vztahem $y = \arcsin x$ právě tehdy, když $x = \sin y$, kde $y \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$.

Platí vztahy

$$\sin(\arcsin x) = x \in \langle -1, 1\rangle, \qquad \arcsin(\sin x) = x \in \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle.$$

Funkce $\arccos x$
Funkci $\cos x$ zúžíme na interval $\langle 0, \pi\rangle$, tj. definujeme funkci

$$f : \langle 0, \pi\rangle \to \langle -1, 1\rangle$$

předpisem $f(x) = \cos x$. Tato funkce je vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ na interval $\langle -1, 1\rangle$. Inverzní funkci k této funkci nazveme *arkus kosinus* a budeme ji značit $\arccos x$. Tedy arkus kosinus je funkce

$$y = \arccos x : \langle -1, 1\rangle \to \langle 0, \pi\rangle$$

definovaná vztahem $y = \arccos x$ právě tehdy, když $x = \cos y$, kde $y \in \langle 0, \pi\rangle$.

Platí vztahy

$$\cos(\arccos x) = x \in \langle -1, 1\rangle, \qquad \arccos(\cos x) = x \in \langle 0, \pi\rangle.$$

<u>Funkce</u> $\operatorname{arctg} x$
Funkci $\operatorname{tg} x$ zúžíme na interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, tj. definujeme funkci

$$f : (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R}$$

předpisem $f(x) = \operatorname{tg} x$. To je vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ na $\mathbb{R}$. Inverzní funkci k této funkci nazveme *arkus tangens* a budeme ji značit $\operatorname{arctg} x$. Tedy arkus tangens je funkce

$$y = \operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \to (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$$

definovaná vztahem $y = \operatorname{arctg} x$ právě tehdy, když $x = \operatorname{tg} y$, kde $y \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Platí vztahy

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \in \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \in (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)\,.$$

<u>Funkce</u> $\operatorname{arccotg} x$
Funkci $\operatorname{cotg} x$ zúžíme na interval $(0, \pi)$, tj. definujeme funkci

$$f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$$

předpisem $f(x) = \operatorname{cotg} x$. Tato funkce je vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $(0, \pi)$ na $\mathbb{R}$. Inverzní funkci k této funkci nazveme *arkus kotangens* a budeme ji značit $\operatorname{arccotg} x$. Tedy arkus kotangens je funkce

$$y = \operatorname{arccotg} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

definovaná vztahem $y = \operatorname{arccotg} x$ právě tehdy, když $x = \operatorname{cotg} y$, kde $y \in (0, \pi)$.

Platí vztahy

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x \in \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x \in (0, \pi)\,.$$

Hyperbolické funkce

Tak se souhrnně nazývají funkce

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,,$$
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}\,, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}\,.$$

Tyto funkce se nazývají *hyperbolický sinus*, *hyperbolický kosinus*, *hyperbolický tangens* a *hyperbolický kotangens*.

Více podrobnosti a grafy těchto funkcí najdete ve skriptech.

Funkce hyperbolometrické

Tak se souhrnně nazývají funkce inverzní k hyperbolickým funkcím (v případě $\cosh x$ zúženým). Tyto funkce lze vyjádřit pomocí logaritmů.

Funkce $\operatorname{argsinh} x$
Funkce $f(x) = \sinh x$ je vzájemně jednoznačná funkce $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Její inverzní funkce se nazývá *argument hyperbolického sinu* a značí se $y = \operatorname{argsinh} x$.

Podle definice inverzní funkce je tato funkce definována vztahem

$$y = \operatorname{argsinh} x \Longleftrightarrow x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

ze kterého plyne

$$y = \operatorname{argsinh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce $\operatorname{argcosh} x$
Funkce $f(x) = \cosh x$ není prostá, ale její zúžení na interval $\langle 0, +\infty)$ je vzájemně jednoznačná funkce intervalu $\langle 0, +\infty)$ na $\langle 1, +\infty)$. Její inverzní funkce se nazývá *argument hyperbolického kosinu* a značí se $y = \operatorname{argcosh} x$.

Podle definice inverzní funkce je tato funkce definována vztahem

$$y = \operatorname{argcosh} x \Longleftrightarrow x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

kde $x \geq 1$ a $y \geq 0$. Z této rovnice plyne

$$y = \operatorname{argcosh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr), \qquad x \geq 1.$$

Funkce $\operatorname{argtgh} x$
Funkce $f(x) = \operatorname{tgh} x$ je vzájemně jednoznačná funkce $\mathbb{R}$ na $(-1, 1)$. Její inverzní funkce se nazývá *argument hyperbolické tangenty* a značí se $y = \operatorname{argtgh} x$. Podle definice inverzní funkce je tato funkce definována vztahem

$$y = \operatorname{argtgh} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{tgh} y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}},$$

ze kterého plyne

$$y = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Funkce $\operatorname{argcotgh} x$
Funkce $f(x) = \operatorname{cotgh} x$ je vzájemně jednoznačná funkce $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ na $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Její inverzní funkce se nazývá *argument hyperbolické kotangenty* a značí se $y = \operatorname{argcotgh} x$. Podle definice inverzní funkce je tato funkce definována vztahem

$$y = \operatorname{argcotgh} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{cotgh} y = \frac{\cosh y}{\sinh y} = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}},$$

ze kterého plyne

$$y = \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Další podrobnosti a grafy cyklometrických funkcí lze najít ve skriptech.