Přednáška 4

Limita a spojitost funkce a zobrazení jedné reálné proměnné

Osnova přednášky

1. Zobrazení do $\mathbb{R}^k$ a k funkcí.

2. Definice vlastní limity funkce ve vlastním bodě.

3. Vlastní a nevlastní limity funkce.

4. Definice limity funkce pomocí okolí.

5. Definice limity zobrazení.

6. Věta o jednoznačnosti limity.

7. Limita zobrazení do $\mathbb{R}^k$ a limity funkcí.

8. Některé známé limity.

9. Algebraické operace s limitami.

10. Limita funkce vzhledem k množině $M \subset X$.

11. Vztah mezi limitou funkce a limitou funkce vzhledem k množině.

12. Limita zleva, limita zprava, oboustranná limita.

13. Příklad: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3}$ neexistuje.

14. Věta $f(x) \le g(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

15. Věta $f(x) \le g(x) \le h(x) \Longrightarrow \Big(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = A\Big)$.

16. Příklad: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

17. Věta $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \big|f(x)\big| = 0$.

18. Věta $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a $g(x)$ omezená $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$.

19. Příklad $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

20. Limita složené funkce.

21. Příklad: $f(x) = 0$, $g(y) = 0$, $y \ne 0$, $g(0) = 1$, $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0} g\big(f(x)\big) = 1$.

22. Funkce spojitá v bodě.

23. Zobrazení spojité v bodě.

24. Limita funkce a její spojitost v bodě.

25. Příklad: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ v bodě 0.

26. Limita složené funkce $h = g \circ f$, kde g je funkce spojitá v bodě.

27. Zobrazení spojité na množiné $M \subset D_{\mathbf{f}}$.

28. Příklad: limity typu $\lim\limits_{x\to a}\bigl(1+f(x)\bigr)^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

29. Spojitost složené funkce.

30. Svislé asymptoty.

31. Příklad: svislé asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+2x^2-x-2}}$.

32. Šikmé a vodorovné asymptoty.

33. Příklad: šikmé asymptoty funkce $f(x) = \sqrt{x^2+x} + x$.

34. Funkce spojité na kompaktní množině.

V několika následujících přednáškách budeme studovat zobrazení jedné reálné proměnné $\mathbf{f} : X \to Y$, kde $X \subset \mathbb{R}$ a $Y \subset \mathbb{R}^k$. Protože pro každé $x \in X$ je $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^k$, neboli $(y_1, y_2, \dots, y_k) = \bigl(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\bigr)$, kde f_i jsou pro $i = 1, 2, \dots, k$ funkce na množině X, tj. nabývají reálné hodnoty, budeme se nejprve zabývat funkcemi $f : X \to Y$, kde X a Y jsou podmnožiny reálných čísel.

Diferenciální počet se v podstatě zabývá "lokálním" chováním funkce v daném bodě, tj. chováním funkce v nějakém "nekonečně" malém okolí tohoto bodu. Pomocí lokálního chování funkce v každém bodě množiny M pak usuzujeme na chování funkce na celé množině M, tzv. "globální" chování, které nás většinou zajímá.

Je-li dána funkce $y = f(x)$ a bod a, který je vnitřní bod definičního oboru, snažíme se tuto funkci v bezprostředním okolí bodu a přibližně nahradit nějakou jednodušší funkcí, u které jsme schopni zkoumat její vlastnosti. V diferenciálním počtu budeme nahrazovat dané funkce polynomy, tj. budeme se snažit napsat

$$f(x) \approx c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots\,, \tag{1}$$

kde $c_0, c_1, \dots$ jsou nějaké konstanty. Ty se snažíme vybrat tak, aby chyba, kterou uděláme, když nahradíme funkci polynomem daného stupně byla v okolí bodu a, tj. pro malá $|x-a|$, co nejmenší. Například, pokud se snažíme nahradit funkci $y = f(x)$ a okolí budu $x = a$ lineární funkcí, tj. přímkou, je z grafického názoru přirozené vybrat tuto přímku tak, aby byla tečnou ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\bigl[a; f(a)\bigr]$.

Jestliže do vztahu (1) dosadíme $x = a$, dostaneme $c_0 = f(a)$. Vztah (1) pak můžeme pro $x \neq a$ napsat jako

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \approx c_1 + c_2(x-a) + \dots\,.$$

Konstantu c_1 dostaneme tak, že do pravé strany tohoto vztahu "dosadíme" $x = a$. Bohužel na levé straně je neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Přitom je pro každé x z okolí bodu a na levé straně definovaný výraz, který je pro malá $|x-a|$ může "skoro" rovnat nějakému číslu c_1.

Nejprve budeme přesně definovat, co máme na mysli tvrzením "funkce $y = f(x)$ se v bezprostředním okolí bodu a skoro rovna A", tj. limitu funkce.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$, bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadný bod definičního oboru D_f, a $A \in \mathbb{R}$. Jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \, ; \; \forall x \in D_f \, ; \; 0 < |x - a| < \delta \; \text{ je } \; \bigl|A - f(x)\bigr| < \varepsilon \tag{2}$$

(ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé x z definičního oboru funkce $f(x)$, které se nerovná a a jehož vzdálenost od bodu a je menší než δ, je vzdálenost bodu $f(x)$ od bodu A menší než ε), řekneme, že *funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A*. Tento výrok budeme zapisovat jako

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \,.$$

Limitě z této definice, tj. když bod a i limita A jsou konečná reálná čísla, se říká vlastní limita ve vlastním bodě. Budeme ještě definovat limity pro $a = \pm\infty$, tj. limity v nevlastním bodě, a limity, které jsou rovny $\pm\infty$, tzv. nevlastní limity.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem D_f. Jestliže

$$\forall K \; \exists \delta > 0 \, ; \; \forall x \in D_f \, ; \; 0 < |x - a| < \delta \; \text{ je } \; f(x) > K \,, \tag{3}$$

říkáme, že má funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $+\infty$. Tento výrok zapisujeme jako

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \,.$$

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a $A \in \mathbb{R}$. Jestliže je $+\infty$ hromadným bodem D_f a

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{R} \, ; \; \forall x \in D_f \, ; \; x > K \; \text{ je } \; \bigl|A - f(x)\bigr| < \varepsilon \,, \tag{4}$$

říkáme, že má funkce v bodě $+\infty$ vlastní limitu A. Tento výrok zapisujeme jako

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \,.$$

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a $+\infty$ je hromadným bodem D_f. Jestliže

$$\forall K \; \exists L \, ; \; \forall x \in D_f \, ; \; x > L \; \text{ je } \; f(x) > K \,, \tag{5}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $+\infty$ limitu $+\infty$ a píšeme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \,.$$

`Poznámka:` Podobně se definují limity v bodě $-\infty$ a limity rovné $-\infty$.

Všechny definice limity lze jediným způsobem zapsat pomocí okolí bodů.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$, bod $a \in \mathbb{R}^*$, který je hromadný bod D_f a $A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže ke každému okolí $U(A)$ bodu A existuje okolí $V(a)$ bodu a takové, že pro každé x z definičního oboru funkce $f(x)$, které je prvkem okolí $V(a)$ a $x \neq a$ patří hodnota funkce $f(x)$ do okolí $U(A)$ bodu A, tj.

$$\forall U(A) \; \exists V(a) \, ; \; \forall x \in D_f \cap V(a) \, ; \; x \neq a \; \text{ je } \; f(x) \in U(A) \,, \tag{6}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A.

Limitu zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y$, kde $X \subset \mathbb{R}$ a $Y \subset \mathbb{R}^k$ budeme definovat pomocí okolí bodu.

Definice. Nechť je $\mathbf{f} : X \to Y$ zobrazení množiny $X \subset \mathbb{R}$ do množiny $Y \subset \mathbb{R}^k$ a a je hromadný bod množiny X a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$. Jestliže

$$\forall U(\mathbf{A})\, \exists V(a)\, ;\; \forall x \in D_{\mathbf{f}} \cap V(a)\, ,\; x \neq a \text{ je } \mathbf{f}(x) \in U(\mathbf{A}) \tag{7}$$

řekneme, že zobrazení $\mathbf{f}$ má v bodě a limitu $\mathbf{A}$.

`Poznámka:` V definici limity uvažujeme pouze body $x \in D_f$, které jsou z prstencového okolí bodu a, tj. body $x \neq a$. Proto nezávisí limita funkce $f(x)$ (nebo zobrazení) na hodnotě funkce $f(x)$ v bodě a. Dokonce funkce $f(x)$ nemusí být v bodě a ani definována.

Pokud existuje limita funkce nebo zobrazení, je jediná. To je tvrzení následující věty.

Věta. Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$ je tato limita jediná.

DŮKAZ: Nechť existují $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$ a $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{B}$ a platí $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$. Protože $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, existují okolí $U(\mathbf{A})$ a $U(\mathbf{B})$ takové, že $U(\mathbf{A}) \cap U(\mathbf{B}) = \emptyset$. Podle definice limity (7) existují okolí $V_{\mathbf{A}}(a)$ a $V_{\mathbf{B}}(a)$ bodu a takové, že pro každé $x \in D_{\mathbf{f}} \cap V_{\mathbf{A}}(a)$, $x \neq a$, je $\mathbf{f}(x) \in U(\mathbf{A})$ a pro každé $x \in D_{\mathbf{f}} \cap V_{\mathbf{B}}(a)$, $x \neq a$, je $\mathbf{f}(x) \in U(\mathbf{B})$. Protože je bod a hromadný bod $D_{\mathbf{f}}$, obsahuje množina $D_{\mathbf{f}} \cap V_{\mathbf{A}}(a) \cap V_{\mathbf{B}}(a)$ alespoň jeden bod $x \neq a$. Pak ale je $\mathbf{f}(x) \in U(\mathbf{A}) \cap U(\mathbf{B}) = \emptyset$. To je nemůže být pravda (= spor).

Proto není pravda tvrzení: Existují $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$ a $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{B}$ a platí $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, a tedy platí jeho negace. To je právě tvrzení uvedené věty.

`Poznámka:` Důkaz tohoto typu se v matematice nazývá *důkaz sporem*. Jeho logická podstata spočívá $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní výroku $\overline{A} \vee B$. Jeho negace je $A \wedge \overline{B}$. Při důkazu sporem dokážeme, že tento výrok, tj. $A \wedge \overline{B}$, neplatí. Proto musí platit jeho negace, tj. výrok $\overline{A} \vee B$, což je ekvivalentní výroku $A \Rightarrow B$.

Zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y \subset \mathbb{R}^k$ lze popsat pomocí k funkcí $\mathbf{f}(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\big)$. Vyvstává otázka, jak souvisí limita zobrazení $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A} = \big(A_1, A_2, \dots, A_k\big)$ s limitami funkcí $\lim\limits_{x\to a} f_i(x)$. Odpověď dává následující věta.

Věta. Limita zobrazení $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A} = \big(A_1, A_2, \dots, A_k\big)$ existuje právě tehdy, když pro každé $i = 1,\ 2,\ \dots,\ k$ existují konečné limity $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = A_i$.

`Poznámka:` Z přechozí věty je zřejmé, že při výpočtu limity zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y \subset \mathbb{R}^k$ vystačíme s výpočtem limity funkcí $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$. Proto se v dalším omezíme na výpočet limit reálné funkce jedné reálné proměnné. Je ale třeba poznamenat, že pokud aspoň jedna limita $\lim\limits_{x\to a} f_i(x)$ neexistuje nebo není konečná, limita zobrazení $\mathbf{f}(x)$ v bodě a neexistuje.

Limity funkcí počítáme většinou tak, že známe některé základní limity a ostatní limity počítáme pomocí Těchto limit a určitých vět. Je věcí každého, jaké limity bude považovat za základní. Uvedeme některé limity, které byste měli umět zpaměti

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}\,,\\
&\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{\mathrm{e}^{qx}} = 0\,, \qquad p\in\mathbb{R}\,,\quad q>0\,,\\
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^p x}{x^q} = 0\,, \qquad p\in\mathbb{R}\,,\quad q>0\,,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1\,,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1
\end{aligned}$$

a vlastně všechny limity typu

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)\,,$$

které se nazývají derivace funkce $f(x)$.

Pro algebraické operace s limitami platí

Věta. Jestliže existují limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$ a α, $\beta \in \mathbb{R}$, a je-li a hromadný bod $D_f \cap D_g$ (pro podíl $D_{f/g}$) pak platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big) = \alpha A+\beta B\,,\\
&\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = AB\,,\\
&\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\,,
\end{aligned}$$

za předpokladu, že jsou výrazy vpravo definovány v $\mathbb{R}^*$.

Připomeňme, že nejsou definovány výrazy typu $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$.

Definici limity funkce můžeme ještě rozšířit tak, že nebudeme při limitě uvažovat všechna $x \in D_f$, ale pouze $x \in M \subset D_f$. V podstatě se jedná o limitu zúžené funkce $f_{|M}$.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$, množina $M \subset D_f$, bod a, který je hromadný bod množiny M a $A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže

$$\forall U(A)\ \exists V(a)\,;\ \forall x\in M\cap V(a)\,;\ x\neq a \ \text{ je }\ f(x)\in U(A)\,, \tag{8}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a vzhledem k množině M limitu A. Toto tvrzení zapisujeme jako

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = A\,.$$

Pro limity vzhledem k množině $M \subset D_f$ platí věta:

Věta. Nechť existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Nechť je $M \subset D_f$ a bod a je hromadný bod množiny M. Pak platí

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = A\,.$$

Limity funkcí vzhledem k množinám budeme pro funkci jedné reálné proměnné používat pro $M = (a, +\infty)$ nebo $M = (-\infty, a)$. Jestliže je $a \in \mathbb{R}$ a $M = (a, +\infty)$, resp. $M = (-\infty, a)$, mluvíme o limitě funkce v bodě a zprava, resp. zleva.

Definice. Nechť je $a \in \mathbb{R}$ hromadný bod množiny $D_f \cap (a, +\infty)$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže

$$\forall U(A)\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in D_f\,;\ 0 < x - a < \delta \ \text{ je } \ f(x) \in U(A)\,, \tag{9}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu zprava rovnou A a píšeme $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = A$.

Podobně, nechť je $a \in \mathbb{R}$ hromadný bod množiny $D_f \cap (-\infty, a)$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže

$$\forall U(A)\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in D_f\,;\ 0 < a - x < \delta \ \text{ je } \ f(x) \in U(A)\,, \tag{10}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu zleva rovnou A a píšeme $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = A$.

Limity zprava a zleva se nazývají jednostranné limity a limitu $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ budeme nazývat oboustranná limita funkce $f(x)$ v bodě a.

Věta. Pokud je bod a hromadným bodem množin $D_f \cap (a, +\infty)$ a $D_f \cap (-\infty, a)$ existuje oboustranná limita funkce $f(x)$ v bodě a právě tehdy, když existují obě jednostranné limity funkce $f(x)$ v bodě a a jsou si rovny.

Tato věta se často používá k tomu, abychom ukázali, že limita funkce neexistuje.

Příklad. Ukažte, že neexistuje limita $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3}$.

Řešení: Jestliže dosadíme $x = 1$, vidíme, že se jedná o limitu typu $\dfrac{4}{0}$, tj. tato limita rovna $\pm\infty$. Protože pro $x > 1$ je $x - 1 > 0$, platí $\lim\limits_{x\to 1_+} \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3} = +\infty$, a protože pro $x < 1$ je $x - 1 < 0$, je $\lim\limits_{x\to 1_-} \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3} = -\infty$. A protože jsou tyto limity různé, oboustranná limita neexistuje.

Jestliže předpokládáme, že bod a je hromadným bodem definičních oborů průniku všech funkcí, jsou následující věty bezprostředním důsledkem definice limity.

Věta. Jestliže na nějakém prstencovém okolí bodu a platí $f(x) \le g(x)$, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Věta. Jestliže na nějakém prstencovém okolí bodu a platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$, a existují $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, pak je $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Příklad: Dokažte, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Řešení: Protože funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ je sudá, stačí ukázat, že $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Úhel x v obloukové míře budeme měřit délkou oblouku na jednotkové kružnici se středem v počátku $O = [0;0]$ od kladné vodorovné polopřímky, na které leží bod $P = [1;0]$. Bod M, který odpovídá velikosti úhlu $x \geq 0$ má souřadnice $M = [\cos x; \sin x]$. Obsah pravoúhlého trojúhelníka s přeponou OM a odvěsnou na polopřímce OP je roven $P_1 = \frac{1}{2}\cos x \sin x$ a je menší než obsah kruhové výseče OPM, která je $P_2 = \frac{1}{2}x$. Tedy pro $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ platí nerovnost

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \implies \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Na druhé straně je obsah výseče OPM menší než obsah pravoúhlého trojúhelníka a odvěsnou OP, jehož přepona leží na polopřímce OM, který je $P_3 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Z toho dostaneme pro $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ nerovnost

$$\frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x} \implies \cos x \leq \frac{\sin x}{x}.$$

Celkově tedy pro $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ platí

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

A protože $\lim\limits_{x\to 0_+} \cos x = 1$, je podle předchozí věty $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Věta. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to a} \bigl|f(x)\bigr| = 0$.

Věta. Jestliže je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a existuje prstencové okolí bodu a, ve kterém je funkce $g(x)$ omezená, je $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

Příklad: Protože $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ a platí nerovnost $\left|\sin \dfrac{1}{x}\right| \leq 1$, je $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Nyní uvedeme větu, které se týká limity složené funkce $h = g \circ f$. Jde o to, kdy můžeme počítat limitu složené funkce počítat jako dvě limity, nejprve limitu funkce f a následně limitu funkce g.

Přesněji, jsou dány funkce $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$. Nechť a je hromadný bod množiny X a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Nechť je A hromadný bod množiny Y a existuje $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$. Otázka je, kdy je $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = B$?

Příklad: Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována předpisem $f(x) = 0$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována jako $g(y) = 0$ pro $y \neq 0$ a $g(0) = 1$. Pak je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Ale pro složenou funkci $h(x) = g\bigl(f(x)\bigr) = g(0) = 1 \neq 0$.

Uvedený příklad ukazuje, že obecně nelze limitu složené funkce počítat jako dvě limity. Problém spočívá v tom, že při definici limity $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$ nebereme v úvahu samotný bod $y = A$. Proto musíme vyloučit případ, kdy v každém okolí bodu a existuje bod $x \neq a$ takový, že $f(x) = A$, nebo do definice "limity" funkce $g(y)$ zahrnout i bod A.

Věta: Nechť jsou dány funkce $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $h = g \circ f : X \to Z$. Nechť a je hromadný bod množiny X a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Nechť je A hromadný bod množiny Y a existuje $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$.

Nechť existuje prstencové okolí $P(a)$ bodu a takové, že pro každé $x \in P(a)$ je $f(x) \neq A$. Pak je $\lim\limits_{x\to a} h(x) = B$.

Jestliže do definice "limity" funkce $f(x)$ v bodě a zahrneme i samotný bod a dostaneme tzv. funkci spojitou v bodě a.

Definice. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě* $a \in D_f$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \, ; \; \forall x \in D_f \, ; \; |x - a| < \delta \;\text{ je }\; \bigl|f(a) - f(x)\bigr| < \varepsilon \, . \tag{11}$$

Podobně definujeme zobrazení spojité v bodě a. Pouze musíme použít vzdálenost $d(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ v $\mathbb{R}^k$.

Definice. Řekneme, že zobrazení $\mathbf{f}(x)$ je *spojité v bodě* $a \in D_f$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \, ; \; \forall x \in D_f \, ; \; |x - a| < \delta \;\text{ je }\; d\bigl(\mathbf{f}(x), \mathbf{f}(a)\bigr) < \varepsilon \, . \tag{12}$$

Podobně jako pro limity platí následující věta:

Věta. Zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y \subset \mathbb{R}^k$ je spojité v bodě a právě tehdy, když jsou v bodě a spojité všechny funkce $y_i = f_i(x)$.

`Poznámka:` Body $a \in D_f$, ve kterých je funkce $f(x)$ spojitá, jsou dvojího druhu:

1. a je izolovaný bod D_f;
2. a je hromadný bod D_f a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Příklad: Dodefinujte funkci $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ v bodě $x = 0$ tak, aby byla v tomto bodě spojitá.

Řešení: Aby byla funkce $f(x)$ v bodě $x = a$ spojitá, musí platit $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Proto musíme položit

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \, .$$

Věta. Nechť jsou dány funkce $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $h = g \circ f : X \to Z$. Nechť a je hromadný bod množiny X, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a nechť je funkce $g(y)$ spojitá v bodě A. Pak je

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g\Bigl(\lim_{x\to a} f(x)\Bigr) = g(A) \, .$$

Definice. Nechť je dáno zobrazení $\mathbf{f}(x)$ a $M \subset D_{\mathbf{f}}$. Říkáme, že zobrazení $\mathbf{f}(x)$ je *spojité na množině* M, je-li spojité v každém bodě množiny M.
Zobrazení $\mathbf{f}(x)$ spojité na $D_{\mathbf{f}}$ nazýváme *spojité*.

`Poznámka.` Všechny elementární funkce, které jsme definovali v minulé přednášce jsou na svých definičních oborech spojité. Například funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je spojitá, protože $x = 0$ není prvkem definičního oboru. Proto se předchozí věta při výpočtech používá velmi často.

Jako příklad ukážeme použití předcházející věty při výpočtu limit typu 1^∞.

Příklad: Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, pak platí

$$\lim_{x\to a}\bigl(1+f(x)\bigr)^{g(x)} = \exp\Bigl(\lim_{x\to a}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)\Bigr). \tag{13}$$

Řešení: Protože podle předpokladu je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, existuje okolí $U(a)$ bodu a takové, že pro každé $x \in U(a) \setminus \{a\}$ je $1 + f(x) > 0$. Tedy podle definice platí v tomto okolí

$$\bigl(1+f(x)\bigr)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln\bigl(1+f(x)\bigr)}\,.$$

Protože je funkce e^x spojitá v $\mathbb{R}$, platí

$$\lim_{x\to a}\bigl(1+f(x)\bigr)^{g(x)} = \exp\Bigl(\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln\bigl(1+f(x)\bigr)\Bigr)\,.$$

Protože je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, je funkce $F(x)$ definovaná pro $x \in (-1,+\infty)$ předpisem

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0\,, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0 \end{cases}$$

spojitá. Podle věty o limitě součinu a uvedené věty o limitě složené funkce je tedy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} g(x)\ln\bigl(1+f(x)\bigr) &= \lim_{x\to a}\Bigl(g(x)f(x)\cdot F\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) = \\ &= \lim_{x\to a}\Bigl(\lim_{x\to a}\bigl(g(x)\cdot f(x)\bigr)\cdot\lim_{x\to a}F\bigl(f(x)\bigr) = \lim_{x\to a}\bigl(g(x)\cdot f(x)\bigr)\,,\end{aligned}$$

protože $\lim\limits_{x\to a} F\bigl(f(x)\bigr) = F(0) = 1$.

Pro spojité funkce platí následující věta.

Věta. Nechť jsou funkce $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ spojité. Pak je složená funkce $h = g \circ f : X \to Z$ spojitá.

Pomocí limit se počítají tzv. asymptoty ke grafu funkce $y = f(x)$. Asymptoty jsou v podstatě přímky, ke kterým se blíží graf funkce v krajním bodě definičního oboru nebo v bodě nespojitosti funkce $f(x)$.

Definice. Přímka $x = a$ se nazývá *svislou asymptotou* ke grafu funkce $y = f(x)$, jestliže v bodě a existuje aspoň jedna nevlastní jednostranná limita funkce $f(x)$, tj. když

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to a_-} f(x) = \pm\infty\,.$$

Příklad: Funkce

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x^3+2x^2-x-2}} = \frac{x+1}{\sqrt{(x+2)(x+1)(x-1)}}$$

má definiční obor $(-2,-1)\cup(1,+\infty)$. Protože

$$\lim_{x\to -2_+} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 1_+} f(x) = +\infty\,,$$

jsou přímky $x=-2$ a $x=1$ svislé asymptoty ke grafu funkce $y=f(x)$. Ale přímka $x=-1$ není svislá asymptota, protože

$$\lim_{x\to -1_-} f(x) = 0\,.$$

Definice. Přímka $y=kx+q$ se nazývá *asymptota* ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. v bodě $-\infty$, jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx-q\big)=0\,, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-kx-q\big)=0\,. \tag{14}$$

Je-li $k=0$ nazývá se asymptota *vodorovná* a je-li $k\neq 0$ mluvíme o *šikmé asymptotě.*

Je zřejmé, že pokud existuje limita $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=q$, resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=q$, je přímka $y=q$ vodorovná asymptota ke grafu funkce v bodě $+\infty$, resp. v bodě $-\infty$.

Je-li přímka $y=kx+q$ asymptota ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě $\pm\infty$, je

$$0=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)-kx-q}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}-k\,, \quad \text{tj.} \quad k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\,.$$

Jestliže známe k, lze najít hodnotu q jako limitu

$$q=\lim_{x\to\pm}\big(f(x)-kx\big)\,.$$

Příklad: V bodech $\pm\infty$ najděte asymptoty funkce $y=\sqrt{x^2+2x}+x$.

Řešení: Pro $x\to-\infty$ jde o výraz typu $+\infty-\infty$. Protože je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\big(\sqrt{x^2+2x}+x\big) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\big(\sqrt{x^2+2x}+x\big)\big(\sqrt{x^2+2x}-x\big)}{\sqrt{x^2+2x}-x}= \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}=-1\,,\end{aligned}$$

je přímka $y=-1$ vodorovná asymptota ke grafu funkce v bodě $-\infty$.

Pro $x\to+\infty$ se jedná o výraz $+\infty+\infty$ a vodorovná asymptota v bodě $x=+\infty$ neexistuje. Abychom našli šikmou asymptotu, najdeme nejprve

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{x}=2\,.$$

Hodnotu q pak dostaneme ze vztahu

$$\begin{aligned}q &= \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-2x\big)=\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+2x}-x\big)= \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\big(\sqrt{x^2+2x}-x\big)\big(\sqrt{x^2+2x}+x\big)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=1\,.\end{aligned}$$

Tedy v bodě $+\infty$ je šikmá asymptota přímka $y = 2x + 1$.

Pro spojité funkce platí mnoho důležitých vět, z nichž některé lze najít ve skriptech. Zde uvedeme pouze jednu větu, kterou budeme potřebovat při výpočtu globálních extrémů spojité funkce na kompaktní, tj. omezené a uzavřené, množině $M \subset \mathbb{R}$.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na kompaktní množině M, existují body $x_{\min}$, $x_{\max} \in M$ takové, že pro každé $x \in M$ je $f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max})$.

Tvrzení této věty lze vyjádřit tak, že každá funkce spojitá na kompaktní množině M má v množině M minimum a maximum.

DŮKAZ: Aby bylo vidět, jak se v matematice dokazují věty a proč se většinou důkazům v přednášce vyhýbám, uvedeme pro zajímavost důkaz této věty. Zároveň na důkazu budeme demonstrovat důležitou vlastnost kompaktních množin, že pro každou posloupnost x_n prvků kompaktní množiny M existuje z ní vybraná podposloupnost, která má limitu v M.

Nejprve ukážeme, že každá funkce $f(x)$, která je spojitá na kompaktní množině M je na M omezená. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ na množině M omezená není. Pak je každému $n \in \mathbb{N}$ je množina $M_n = \big\{x \in M\,;\ f(x) > n\big\}$ neprázdná. Z každé množiny M_n vybereme prvek x_n. Takto dostaneme posloupnost $x_n \in M$. Protože je množina M kompaktní, existuje posloupnost y_n vybraná z posloupnosti x_n, která konverguje k prvku $y \in M$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in M$. Podle definice vybrané posloupnosti je $y_n \in M_n$, a tedy $f(y_n) > n$. Protože je funkce $f(x)$ spojitá na množině M, je

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = +\infty\,,$$

což je spor se spojitostí funkce $f(x)$ v bodě $y \in M$.

Podobně se ukáže, že funkce $f(x)$ je na množině M omezená zdola.

Označme $A = \big\{f(x) \in \mathbb{R}\,;\ x \in M\big\}$. Protože je funkce $f(x)$ na množině M omezená, je omezená i množina A, a proto existují $S = \sup A \in \mathbb{R}$ a $s = \inf A \in \mathbb{R}$. Podle definice suprema a infima platí pro každé $x \in M$ nerovnosti $s \le f(x) \le S$.

Nyní ukážeme, že existuje $x_{\max} \in M$ takové, že $f(x_{\max}) = S$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $A_n = \big\{x \in M\,;\ f(x) > S - \frac{1}{n}\big\}$. Podle definice suprema, je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina A_n neprázdná. Z každé množiny A_n vybereme prvek $x_n \in A_n$. Tím dostaneme posloupnost $x_n \in M$. Protože M je kompaktní, lze z ní vybrat posloupnost y_n, která konverguje k prvku $y \in M$. Protože je $y_n \in A_n$, platí nerovnost

$$S - \tfrac{1}{n} \le f(y_n) \le S\,.$$

Jestliže označíme $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in M$, dostaneme ze spojitosti funkce $f(x)$ v bodě y

$$\lim_{n\to\infty}\big(S - \tfrac{1}{n}\big) = S \le \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y) \le S\,,$$

tj. $f(y) = S$. Tedy existuje $y = x_{\max} \in M$, pro které platí

$$S = f(x_{\max}) \ge f(x) \qquad \forall x \in M\,.$$

Důkaz existence prvku $x_{\min} \in M$ je obdobný.