

Přednáška 5

Diferencovatelné funkce

Osnova přednášky

1. Lineární aproximace funkce.
2. Funkce diferencovatelná v bodě, diferenciál funkce v bodě.
3. Derivace funkce v bodě.
4. Vztah mezi diferenciálem a derivací.
5. Tečna a normála ke grafu funkce.
6. Funkce diferencovatelné na množině.
7. Derivace a diferenciál zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$.
8. Diferenciál a spojitost.
9. Derivace algebraických operací.
10. Derivace složené funkce.
11. Příklad: derivace funkce $f(x) = \sin \sqrt{1 + e^{2x}}$.
12. Příklad: derivace funkce $f(x) = (\sin x)^x$.
13. Derivace inverzní funkce.
14. Příklad: derivace funkce $f(x) = \arcsin x$.
15. Jednostranné derivace funkce.
16. Příklad: derivace funkce $f(x) = e^{|x+1|}$.
17. Příklad: derivace funkce $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$ v bodě $x = 0$.
18. Rolleova věta o střední hodnotě.
19. Lagrangeova věta o střední hodnotě.
20. Věta: Když je na intervalu $f'(x) = 0$, je $f(x)$ na intervalu konstantní.
21. Příklad funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$.
22. Derivace a monotonie.
23. Stacionární body a lokální extrémů funkce.
24. Globální extrémů spojitě funkce na kompaktní množině.
25. Příklad: $f(x) = |x| - 2 \sin x$ na intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.
26. Cauchyova věta o střední hodnotě.
27. l'Hospitalovo pravidlo.
28. Příklady na použití l'Hospitalova pravidla.

Jak jsme se zmínili v minulé přednášce, je hlavní myšlenkou diferenciálního počtu nahradit danou funkci $y = f(x)$ v okolí bodu a polynomem. V této přednášce se budeme podrobně zabývat tím, jak nejlépe nahradit funkci polynomem prvního stupně, tj. lineární funkcí nebo geometricky, jak nahradit graf funkce v okolí bodu přímkou.

Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a bod a , který je vnitřním bodem definičního oboru. Uvažujme přímkou $y = kx + q$. Jestliže chceme, aby přímka procházela bodem $[a; f(a)]$, musí mít rovnice této přímky tvar $y = k(x - a) + f(a)$. Rozdíl mezi hodnotou funkce $y = f(x)$ a přímkou $y = k(x - a) + f(a)$ v bodě x je roven

$$f(x) - f(a) - k(x - a) = Z(x). \quad (1)$$

Když zavedeme odchylku bodu x od daného bodu a , $\Delta x = x - a = h$, dostaneme z (1)

$$f(a + h) - f(a) - kh = Z(h). \quad (2)$$

Funkce $Z(h)$ je pro dané a funkce proměnné h a závisí samozřejmě na tom, jak zvolíme směrnici přímky, tj. k . Snaha je, aby byla hodnota absolutní zbytku $Z(h)$ pro malá h co nejmenší. To se vyjadřuje tím, že požadujeme, aby

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Z(h)}{h} = 0.$$

Z těchto úvah dostaneme následující definici.

Definice. Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a bod a , který je vnitřním bodem D_f . Jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Z(h)}{h} = 0, \quad \text{kde} \quad Z(h) = f(a + h) - f(a) - kh, \quad (3)$$

nazývá se funkce $y = f(x)$ *diferencovatelná v bodě a* a lineární funkce

$$df(a; h) = kh$$

proměnné h se nazývá *diferenciál funkce $f(x)$ v bodě a* .

Je-li funkce $y = f(x)$ diferencovatelná v bodě a plyne z (3)

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Z(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - kh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - k,$$

tj.

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definice. Jestliže existuje konečná limita

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad (4)$$

nazývá se *derivace funkce $f(x)$ v bodě a* .

Je zřejmé, že platí

Věta. Funkce $f(x)$ je diferencovatelná v bodě a právě tehdy, když má v bodě a derivaci a její diferenciál v bodě a je

$$df(a; h) = f'(a)h. \quad (5)$$

Je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná v bodě a , nazývá se přímka

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (6)$$

tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[a; f(a)]$. Tedy derivace $f'(a)$ funkce $f(x)$ v bodě a je geometricky směrnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[a; f(a)]$.

Protože směrnice přímky kolmé k tečně je $k_{\perp} = -\frac{1}{f'(a)}$, je přímka

$$y - f(a) = -\frac{x - a}{f'(a)}, \quad \text{tj.} \quad x - a + f'(a)(y - f(a)) = 0 \quad (7)$$

normála ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[a; f(a)]$.

Poznámka: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[a, f(a)]$ je v rovině xy dána vztahem (6). Jestliže přesuneme počátek souřadnic do bodu $[a, f(a)]$ a nové osy označíme h a df , přejde rovnice tečny na rovnici (5). Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě a je tedy vlastně rovnice tečny v takto posunutých souřadnicích.

Při výpočtech se ukazuje výhodné používat místo proměnné h značku dx a psát diferenciál funkce $y = f(x)$ ve tvaru

$$df(a) = f'(a)dx \quad (8)$$

a derivaci jako

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

Zatím jsme zavedli pouze derivace funkce $y = f(x)$ v bodě a , který je vnitřní bod definičního oboru D_f . Na množině všech bodů, ve kterých existuje derivace lze definovat funkci f' , která přiřazuje každému bodu této množiny derivaci funkce f v tomto bodě, tj. $x \mapsto f'(x)$. Taková funkce se nazývá derivace funkce $f(x)$.

Definice. Funkce $y = f(x)$ se nazývá diferencovatelná na množině M , je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M .

Je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná na množině M , nazývá se funkce $f' : M \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $x \mapsto f'(x)$ *derivace funkce na množině M* .

Poznámka: Pro zobrazení $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$ množiny $X \subset \mathbb{R}$ do množiny $Y \subset \mathbb{R}^k$, tj. $x \mapsto \mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$, je derivace

$$\mathbf{f}'(x) = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_k(x)),$$

tj. derivuje se každá složka zobrazení $\mathbf{f}(x)$ zvlášť, a diferenciál

$$d\mathbf{f}(x, h) = \mathbf{f}'(x)h = (f'_1(x)h, f'_2(x)h, \dots, f'_k(x)h) = (df_1(x, h), df_2(x, h), \dots, df_k(x, h))$$

se počítá jako diferenciály jednotlivých složek. Definici a geometrický význam diferenciálu a derivace zobrazení $\mathbf{f}(x)$ uvedeme později, až uvedeme geometrickou, resp. fyzikální, interpretaci zobrazení \mathbb{R} do \mathbb{R}^k .

Věta. Je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná na množině M , je na množině M spojitá.

DŮKAZ: Je-li $a \in M$ je funkce $f(x)$ diferencovatelná v bodě a . Proto je $a \in D_f$ hromadný bod D_f . Musíme tedy dokázat, že $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$. To dostaneme limitou $h \rightarrow 0$ ve vztahu (3).

Derivace počítáme tak, že známe derivace některých základních funkcí nazpaměť a pro derivace složitějších funkcí používáme vztahy, které jsou obsahem jistých vět. Je věcí každého, jaké derivace považuje za základní a jaké za složitější. Ale měli byste znát všechny derivace funkcí uvedené v tabulce a používat vztahy uvedené v následujících dvou větách.

TABULKA DERIVACÍ

$f(x)$	$f'(x)$	poznámka
x^a	ax^{a-1}	a je konstantní, speciálně pro $a = 0$ je $x^0 = 1$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$ je konstanta, $a^x = e^{x \ln a}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	
$\log_a x $	$\frac{1}{x \ln a}$	pro $a > 0, a \neq 1, \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
$\operatorname{cotgh} x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
$\operatorname{argsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$\operatorname{argcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\operatorname{argtgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argtgh} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
$\operatorname{argcotgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argcotgh} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Věta. Necht' jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné na množině M a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

1. je funkce $\alpha f(x) + \beta g(x)$ diferencovatelná na množině M a

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x); \quad (9)$$

2. je funkce $f(x) \cdot g(x)$ diferencovatelná na množině M a

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x); \quad (10)$$

3. je-li $g(x) \neq 0$, je funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ diferencovatelná na množině M a

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \quad (11)$$

Věta. Necht' je funkce $f : X \rightarrow Y$ diferencovatelná na množině X a funkce $g : Y \rightarrow Z$ diferencovatelná na množině Y . Pak je na množině X diferencovatelná složená funkce $h = g \circ f$, tj. $h(x) = g(f(x))$, a platí

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \quad (12)$$

Vztah (12) se často píše ve tvaru, který se lépe pamatuje. Označme $z = z(y)$ a $y = y(x)$. Pak lze formálně napsat

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad (13)$$

kde ale musíme dosadit za $y = y(x)$.

Příklad. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sin \sqrt{1 + e^{2x}}$.

ŘEŠENÍ: Nejprve jde o to, jak budeme chápat funkce $f(x)$. Například když chápeme funkci $f(x)$ jako složenou z funkcí $z = \sin y$ a $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$, dostaneme z (13)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos \sqrt{1 + e^{2x}} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Funkci y můžeme chápat jako složenou funkci z funkcí $y = \sqrt{u}$ a $u = 1 + e^{2x}$. Pak je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot \frac{du}{dx}.$$

I funkci u lze chápat jako složenou z funkcí $u = 1 + e^v$ a $v = 2x$. Proto je

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = e^v \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

Když to všechno složíme, dostaneme

$$f'(x) = \cos \sqrt{1 + e^{2x}} \cdot \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}.$$

Příklad: Najděte definiční obor a derivaci funkce $f(x) = (\sin x)^x$.

Řešení: Funkce $f(x)$ je definována vztahem

$$f(x) = (\sin x)^x = e^{x \ln(\sin x)}.$$

Proto je její definiční obor množina

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}; \sin x > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$$

a její derivace

$$f'(x) = e^{x \ln(\sin x)} \left(\ln(\sin x) + x \frac{\cos x}{\sin x} \right) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + x \cotg x).$$

Jiná možnost je uvažovat funkci

$$\ln(f(x)) = x \ln(\sin x)$$

Derivováním této rovnosti pak dostaneme

$$\left(\ln(f(x)) \right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\sin x) + \frac{x \cos x}{\sin x}$$

což je po vynásobení funkcí $f(x)$ stejný výsledek, jaký jsme získali dříve.

Poznámka: Derivace logaritmu funkce $f(x) > 0$, tj. funkce $g(x) = \ln(f(x))$, se často nazývá logaritmická derivace funkce $f(x)$ a je rovna

$$\left(\ln(f(x)) \right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Nechť je funkce $f(x)$ vzájemně jednoznačná a $g(x)$ je její inverzní funkce. Pak pro každé $x \in D_f$ podle definice platí

$$g(f(x)) = x.$$

Označme $y = f(x)$. Podle věty o derivaci složené funkce plyne z tohoto vztahu

$$\frac{dg}{dy} \cdot \frac{df}{dx} = 1.$$

Z definice inverzní funkce plyne, že $x = g(y)$. Tedy je-li $f'(x) \neq 0$, je

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}. \quad (14)$$

Obecně platí následující věta o derivaci inverzní funkce:

Věta: Nechť je $f : X \rightarrow Y$ vzájemně jednoznačná funkce. Nechť je $f'(x) \neq 0$ pro každé $x \in X$ a inverzní funkce $g : Y \rightarrow X$ je spojitá na množině Y . Pak je funkce g diferencovatelná na množině Y a platí (14).

Příklad: Najděte derivaci funkce $y = \arcsin x$.

Řešení: Funkce $g(y) = \arcsin y$ je inverzní k funkci $f(x) = \sin x$ zúžené na interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Protože $f'(x) = \cos x$ je na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ nenulová a funkce $\arcsin y$ je spojitá na intervalu $(-1, 1)$, je funkce $\arcsin y$ diferencovatelná na intervalu $(-1, 1)$. Její derivaci lze získat derivací vztahu $\arcsin(\sin x) = x$, který platí pro $x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Jestliže označíme $y = \sin x$, dostaneme

$$\frac{d(\arcsin y)}{dy} \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} = \frac{d(\arcsin y)}{dy} \cdot \cos x = 1.$$

Pro $\cos x \neq 0$, tj. $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ je

$$\frac{d(\arcsin y)}{dy} = \frac{1}{\cos x}.$$

Do tohoto vztahu musíme ještě dosadit za proměnnou x . Ale protože pro $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ je $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$, dostaneme pro $y \in (-1, 1)$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Derivaci jsme definovali pro vnitřní body definičního oboru funkce $f(x)$ oboustrannou limitou (4). Jestliže v definici budeme uvažovat pouze jednostranné limity, dostaneme jednostranné derivace funkce. Takovým způsobem se definují derivace v krajních bodech D_f (patří-li krajní bod do D_f).

Definice. Jestliže existuje limita

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \text{resp.} \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

nazýváme ji *derivací zprava*, resp. *derivací zleva* funkce $f(x)$ v bodě a .

Podobně jako pro limity platí následující věta.

Věta. Derivace funkce $f(x)$ v bodě a existuje právě tehdy, když existují obě jednostranné derivace a jsou si rovny.

Příklad: Najděte derivaci funkce $f(x) = e^{|x+1|}$.

Řešení: Funkce $f(x)$ je definována jako

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & \text{pro } x \geq -1, \\ e^{-x-1} & \text{pro } x \leq -1. \end{cases}$$

Tedy pro $x > -1$ je $f'(x) = e^{x+1}$ a pro $x < -1$ je $f'(x) = -e^{-x-1}$. Protože podle definice je

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{|h|} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1, \\ f'_-(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{|h|} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{-h} - 1}{h} = -1, \end{aligned}$$

derivace funkce $f(x)$ v bodě $x = -1$ neexistuje.

Poznámka. Obecně nelze najít derivaci funkce $f(x)$ v bodě a tak, že spočítáte derivaci funkce $f(x)$ a pak dosadíte $x = a$. Například pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je pro $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

do které bod $x = 0$ dosadit nelze. Mohlo by se zdát, že derivaci $f'(0)$ neexistuje. Ale podle definice je

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

a tedy $f'(0) = 0$. Problém je v tom, že derivace funkce nemusí být spojitá, což většinou předpokládáte.

Věty o střední hodnotě diferenciálního počtu

Následující tři věty, zejména Lagrangeova věta, hrají v diferenciálním počtu velmi důležitou roli, protože z nich plyne velmi mnoho vlastností diferencovatelných funkcí. Proto je uvedeme i s jejich důkazem. Souhrnně se tyto věty nazývají *věty o střední hodnotě diferenciálního počtu*.

Věta (Rolleova věta o střední hodnotě). Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) a platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f'(c) = 0$.

DŮKAZ: Protože je funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$, existují body $x_m, x_M \in \langle a, b \rangle$ takové, že pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.

Jsou-li oba tyto body krajní body intervalu, plyne z podmínky $f(a) = f(b)$, že je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ konstantní, a proto je její derivace rovna nule v každém bodě $c \in (a, b)$.

Nechť je alespoň jeden z bodů x_m nebo x_M vnitřní bod intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť je to například bod x_M . Protože je $x_M \in (a, b)$, existuje v něm podle předpokladů derivace $f'(x_M)$. Nechť je $f'(x_M) > 0$. Podle definice limity existuje k $\varepsilon = \frac{1}{2} f'(x_M) > 0$ číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a, b)$, pro které je $0 < |x - x_M| < \delta$, platí nerovnost

$$0 < \frac{1}{2} f'(x_M) < \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M}.$$

Ale pro $x > x_M$ plyne z této nerovnosti, že $f(x) - f(x_M) > 0$, tj. $f(x) > f(x_M)$, což je ve sporu s výběrem bodu x_M .

Podobně se ukáže, že předpoklad $f'(x_M) < 0$ vede k tomu, že pro $x < x_M$ je $f(x) > f(x_M)$, což není možné.

Protože $f'(x_M)$ existuje a není ani kladné ani záporná, musí být $f'(x_M) = 0$.

Další dvě věty o střední hodnotě jsou v podstatě důsledky Rolleovy věty.

Věta (*Lagrangeova věta o střední hodnotě*). Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v otevřeném intervalu (a, b) . Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a). \quad (15)$$

DŮKAZ: Sestrojíme funkci $F(x) = (b - a)(f(x) - f(a)) - (x - a)(f(b) - f(a))$. Z předpokladů o funkci $f(x)$ plyne, že je funkce $F(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) a platí $F(a) = F(b) = 0$. Proto splňuje funkce $F(x)$ předpoklady Rolleovy věty, a tedy existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$F'(c) = (b - a)f'(c) - (f(b) - f(a)) = 0,$$

což je rovnost (15).

Uvedeme některé důsledky Lagrangeovy věty.

Víme, že derivace funkce $f(x) = c = \text{konst.}$ je rovna nule. Z Lagrangeovy věty plyne, že konstantní funkce jsou na intervalu jediné funkce, jejíž derivace je rovna nule.

Nechť je $\mathcal{I} = (a, b)$ interval, $f'(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$ a $x_0 \in \mathcal{I}$. Pro každé $x \in \mathcal{I}$ je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle x_0, x \rangle$ spojitá a má derivaci v každém bodě intervalu (x_0, x) . Podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (x_0, x)$ takové, že

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0,$$

protože $f'(c) = 0$. Tedy pro každé $x \in \mathcal{I}$ je $f(x) = f(x_0)$, tj. $f(x)$ je konstantní.

Příklad: Najděte intervaly, na kterých je funkce

$$f(x) = \arctg x + \arctg \frac{x+1}{x-1} \quad (16)$$

konstantní a určete její hodnotu na těchto intervalech.

ŘEŠENÍ: Definiční obor funkce $f(x)$ je $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Protože funkce $f(x)$ je na intervalu \mathcal{I} konstantní právě tehdy, když je její derivace $f'(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$, budeme hledat intervaly, na kterých je $f'(x) = 0$. Derivací vztahu (16) dostaneme

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-2(x-1)^2}{((x-1)^2 + (x+1)^2)(x-1)^2} = 0.$$

Protože $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (-\infty, 1) = \mathcal{I}_-$ a $x \in (1, +\infty) = \mathcal{I}_+$, je funkce na těchto intervalech konstantní. Její hodnotu dostaneme tak, že dosadíme jednu, libovolnou, hodnotu $x_- \in \mathcal{I}_-$ a $x_+ \in \mathcal{I}_+$.

Protože $x_- = 0 \in \mathcal{I}_-$ a $f(0) = \arctg 0 + \arctg(-1) = -\frac{1}{4}\pi$, je $f(x) = -\frac{1}{4}\pi$ pro $x < 1$.

Hodnotu funkce na intervalu \mathcal{I}_+ lze najít například tak, že “dosadíme” $x_+ = +\infty$. Pak dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2}\pi + \arctg 1 = \frac{3}{4}\pi.$$

Další použití Lagrangeovy věty je při důkazu některých nerovností.

Příklad: Ukažte, že když je $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$, kde \mathcal{I} je interval, je funkce $f(x)$ na intervalu \mathcal{I} rostoucí.

Řešení: Necht' jsou $x_1 < x_2$ dva libovolné body z intervalu \mathcal{I} . Protože je funkce $f(x)$ splňuje na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ předpoklady Lagrangeovy věty, existuje $c \in (x_1, x_2)$ takové, že

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0,$$

protože $f'(c) > 0$ a $x_1 < x_2$.

Podobně se ukáže, že když má funkce $f(x)$ na intervalu \mathcal{I} derivaci $f'(x) < 0$, je na intervalu \mathcal{I} klesající.

Poznámka: Diferenciál funkce $f(x)$ v bodě a , který je vnitřní bod definičního oboru funkce $f(x)$, je v podstatě rovnice tečny ke grafu funkce a derivace směrnice tečny. Směrnice přímky rozhoduje o tom, zda je lineární funkce rostoucí nebo klesající. Proto rozhoduje znaménko derivace o monotonii funkce $f(x)$.

V předchozím případě jsme vlastně dokázali následující větu.

Věta. Jestliže má funkce $f(x)$ na intervalu \mathcal{I} kladnou (zápornou) derivaci, je na intervalu \mathcal{I} rostoucí (klesající).

Definice. Vnitřní body definičního oboru funkce $f(x)$, ve kterých je $f'(x) = 0$, se nazývají *stacionární body* funkce $f(x)$.

Je zřejmé, že ve stacionárních bodech je tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ rovnoběžná s osou x .

Tvrzení následující věty, která se používá při hledání lokálních extrémů funkce $f(x)$, je snad zřejmé.

Věta. Necht' je x_0 stacionární bod funkce $f(x)$. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

1. pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) > 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) > 0$, nemá funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrémů a funkce $f(x)$ je na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ rostoucí;
2. pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) > 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) < 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum;
3. pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) < 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) > 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum;
4. pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) < 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) < 0$, nemá funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrémů a funkce $f(x)$ je na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ klesající.

Trochu jinak postupujeme při hledání globálních extrémů, tj. největší a nejmenší hodnoty, spojité funkce na kompaktní množině M , například na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Základem je následující jednoduchá věta.

Věta. Je-li x_0 vnitřní bod množiny M a $f'(x_0) \neq 0$, nemá funkce $f(x)$ v bodě x_0 na množině M globální extrém.

DŮKAZ: Je-li $f'(x_0) > 0$, existuje k $\varepsilon = \frac{1}{2}f'(x_0) > 0$ podle definice derivace $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in M$, pro které je $0 < |x - x_0|$, platí

$$0 < \frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Protože je x_0 vnitřní bod množiny M existují $x_1 < x_0$ a $x_2 > x_0$ taková, že

$$0 < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{a} \quad 0 < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Tedy platí $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ a funkce $f(x)$ nemá v bodě x_0 globální extrém.

Je-li $f'(x_0) < 0$, vybereme $\varepsilon = -\frac{1}{2}f'(x_0) > 0$ a dostaneme nerovnost

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f'(x_0)}{2} < 0,$$

ze které plyne, že existují $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_0 < x_2$, pro které platí $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$. Proto nemá ani v tomto případě funkce $f(x)$ v bodě x_0 globální extrém.

Máme-li najít extrémy spojitě funkce $f(x)$ na kompaktní množině, víme, že existují body $x_m, x_M \in M$, ve kterých funkce dosahuje maxima a minima, a z předchozí věty víme, že je-li bod x_m nebo x_M vnitřním bodem M , není v něm derivace funkce $f(x)$ různá od nuly.

Proto nás při hledání největší a nejmenší hodnoty spojitě funkce na kompaktní množině (uzavřeném a omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$) budou zajímat tyto body:

1. hraniční body množiny M ; v případě intervalu $\langle a, b \rangle$ body a a b ;
2. vnitřní body x množiny M , pro které je $f'(x) = 0$;
3. vnitřní body x množiny M , pro které derivace neexistuje. Do této skupiny lze zařadit i body, v nichž derivaci z nějakého důvodu nepočítáme.

Takto dostaneme jistou podmnožinu $M_0 \subset M$, v jejichž bodech může nabývat spojitě funkce $f(x)$ na kompaktní množině M největší a nejmenší hodnotu. Je-li množina M_0 konečná, lze největší a nejmenší hodnotu funkce na množině M najít jako nejmenší a největší hodnotu z konečné množiny $f(M_0)$.

Příklad: Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = |x| - 2 \sin x$ na intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

ŘEŠENÍ: Protože je funkce $f(x)$ spojitá na kompaktním intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, existují v tomto intervalu body, ve kterých nabývá funkce $f(x)$ nejmenší a největší hodnotu.

Do první skupiny patří krajní body intervalu, tj. $x_1 = -\frac{1}{2}\pi$ a $x_2 = \frac{1}{2}\pi$.

Pro $x > 0$ je $f(x) = x - 2 \sin x$ a pro $x < 0$ dostaneme $f(x) = -x - 2 \sin x$.

Protože pro $x > 0$ je $f'(x) = 1 - 2 \cos x$, je $f'(x) = 0$ na intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ pouze v bodě $x_3 = \frac{1}{3}\pi$.

Na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ nemá rovnice $f'(x) = -1 - 2 \cos x = 0$ řešení. Proto do druhé skupiny patří pouze bod x_3 .

Protože jsme v bodě $x = 0$ nepočítali derivaci, která tam ostatně ani neexistuje, zařadíme jej do třetí skupiny, tj. $x_4 = 0$.

Funkce $f(x)$ může nabývat nejmenší a největší pouze v jednom z bodů x_1, x_2, x_3 nebo x_4 . Protože

$$f(x_1) = \frac{1}{2}\pi + 2, \quad f(x_2) = \frac{1}{2}\pi - 2, \quad f(x_3) = \frac{1}{3}\pi - \sqrt{3}, \quad f(x_4) = 0,$$

nabývá funkce $f(x) = |x| - 2 \sin x$ na intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ největší hodnotu $\frac{1}{2}\pi + 2$ v bodě $x = -\frac{1}{2}\pi$ a nejmenší hodnotu $\frac{1}{3}\pi - \sqrt{3}$ v bodě $x = \frac{1}{3}\pi$.

Často budete při výpočtech limit používat jeden důsledek tzv. Cauchyovy věty o střední hodnotě.

Věta (*Cauchyova věta o střední hodnotě*) Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a mají derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$. Jestliže $g'(x) \neq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (17)$$

DŮKAZ: Uvažujme funkci $F(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$. Z předpokladů plyne, že je funkce $F(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) . A protože $F(a) = F(b) = 0$ splňuje funkce $F(x)$ předpoklady Rolleovy věty. Tedy existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$F'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0.$$

Abychom dokázali vztah (17), musíme tuto rovnost vydělit $g'(c)(g(b) - g(a))$. Podle předpokladů je $g'(c) \neq 0$ a stačí dokázat, že $g(b) \neq g(a)$. Nechť platí $g(b) = g(a)$. Pak ale funkce $g(x)$ splňuje na intervalu $\langle a, b \rangle$ předpoklady Rolleovy věty, a tedy existuje $c \in (a, b)$, pro který je $g'(c) = 0$. To je ale spor, a tedy $g(b) \neq g(a)$.

Jedním z důsledků Cauchyovy věty o střední hodnotě je tzv. l'Hospitalovo pravidlo.

Věta (*l'Hospitalovo pravidlo*). Nechť je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$. Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné v nějakém prstencovém okolí $P(a)$ bodu a a pro všechna $x \in P(a)$ je $g'(x) \neq 0$. Pokud existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existuje také limita

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (18)$$

V případě $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ se l'Hospitalovo pravidlo dokazuje použitím Cauchyovy věty o střední hodnotě na výraz

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad \text{kde } c \in (a, x),$$

a proto jsou podmínky $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ podstatné. V případě $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ není důkaz l'Hospitalova pravidla tak jednoduchý.

Příklad: Najděte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}. \quad (19)$$

ŘEŠENÍ: Jedná se o limitu typu $\frac{0}{0}$. Protože funkce $f(x) = \sin x - x$ a $g(x) = x^3$ splňují předpoklady uvedené věty, je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2},$$

pokud existuje limita vpravo. Protože se opět jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, použijeme ještě jednou l'Hospitalovo pravidlo a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

Poznámka: Mohlo by se zdát, že není třeba umět počítat limity bez použití l'Hospitalova pravidla. Ale znalost některých limit nám často velmi usnadní výpočet. Například když máme počítat limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\ln(1+x) \cdot (e^x - 1) \cdot \arcsin x},$$

je přímé použití l'Hospitalova pravidla pracné, protože jmenovatel je poměrně složitá funkce. Při výpočtu této limity je jednodušší psát

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\ln(1+x) \cdot (e^x - 1) \cdot \arcsin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{x}{\arcsin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = -\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Navíc, například limity jako $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ a podobně jsou vlastně definice derivace v bodě nula.

Jsou i případy, kdy pomocí l'Hospitalova pravidla nedostaneme limitu. Například podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x},$$

což je sice pravda, ale nevede to k nalezení limity.

Přímo škodlivé je používat l'Hospitalovo pravidlo automaticky bez ověření předpokladů. Například nelze psát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 3}{2x + 1},$$

protože se nejedná o limitu typu $\frac{0}{0}$ nebo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$$

protože limita vpravo neexistuje.

Abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo na limitu typu $0 \cdot \infty$, musíme jej nejprve převést na podíl. Obvykle se používá obratu $0 = \frac{1}{\infty}$ nebo $\infty = \frac{1}{0}$.

Postup budeme ilustrovat na jednom příkladu.

Příklad: Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\pi - 2 \arccos \frac{1}{x} \right)$.

ŘEŠENÍ: Protože $\arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$, jedná se o limitu typu $\infty \cdot 0$. Abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo, převedeme výraz na zlomek. Toho lze dosáhnout tak, že pro $x \neq 0$ napíšeme $x = \frac{1}{x^{-1}}$. Pak dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\pi - 2 \arccos \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arccos x^{-1}}{x^{-1}},$$

což je limita typu $\frac{0}{0}$, na kterou již můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

Abychom se vyhnuli složitějšímu derivování, je při výpočtu této limity výhodné položit $y = x^{-1}$. Protože $x^{-1} \neq 0$ lze použít větu o limitě složené funkce a psát

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arccos x^{-1}}{x^{-1}} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{\pi - 2 \arccos y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} = 2.$$

Také limity typu $\infty - \infty$ lze často převést na podíl a následně k jejich výpočtu použít l'Hospitalovo pravidlo.

Příklad: Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cotg x}{x} \right)$.

ŘEŠENÍ: Jedná se zřejmě o limitu typu $\infty - \infty$. Abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo budeme snažit přepsat výraz v limitě jako podíl. To lze udělat například takto:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cotg x}{x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{x \sin x} = \frac{x - \sin x \cos x}{x \sin^2 x}.$$

To je pro $x \rightarrow 0$ výraz typu $\frac{0}{0}$. Proto je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cotg x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x}.$$

Protože druhá limita je rovna 1, dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cotg x}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$