

# Přednáška 6

## Derivace a diferenciály vyšších řádů

### Osnova přednášky

1. Derivace  $n$ -tého řádu funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ .
2. Diferenciál  $n$ -tého řádu funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ .
3. Derivace a diferenciál funkce na množině  $M$ .
4. Derivace a spojitost.
5. Funkce třídy  $C_n(M)$ .
6. Leibnizovo pravidlo pro  $n$ -tou derivaci součinu.
7. Příklad  $f^{(77)}(x)$  pro funkci  $f(x) = x \sin x$ .
8. Druhé derivace funkce na intervalu a konvexita.
9. Taylorův polynom.
10. Zbytek v Taylorově polynomu.
11. Taylorova věta.
12. Derivace vyšších řádů ve stacionárních bodech a lokální extrémy.
13. Příklad: Taylorův polynom pro funkci  $f(x) = e^x$  se středem v bodě  $a = 0$ .
14. Taylorovy a Maclaurinovy řady.
15. Taylorovy ředy pro funkce  $e^x$ ,  $\cos x$  a  $\sin x$  se středem v bodě  $a = 0$ .
16. Eulerův vztah  $e^x = \cos x + i \sin x$  pro  $x \in \mathbb{R}$ .
17. Příklad: Taylorova řada pro funkci  $f(x) = \ln(1+x)$  se středem v bodě  $a = 0$ .

Budeme pokračovat v nahrazování funkce  $f(x)$  v okolí bodu  $a$  polynomy, tj. hledat vhodné konstanty  $c_n$  tak, aby bylo pro malá  $|x - a|$

$$f(x) \approx c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots$$

V minulé přednášce jsme zjistili, že  $c_0 = f(a)$  a

$$c_1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

tj. že hledaná aproximace je

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots$$

Abychom našli koeficient  $c_2$ , zderivujeme tento vztah a získáme

$$f'(x) = f'(a) + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \dots + nc_n(x - a)^{n-1} + \dots$$

Koeficient  $c_2$  lze pak najít ze vztahu

$$2c_2 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \frac{df'}{dx}(a),$$

tj. pomocí derivaci derivace funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ . Je přirozené nazvat tento výraz druhá derivace funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ .

Obecně definujeme  $n$ -tou derivaci jako derivaci  $(n - 1)$ -ní derivace.

**Definice.** Nechť existuje  $(n - 1)$ -ní derivace  $f^{(n-1)}(x)$  v okolí bodu  $a$  (definujeme  $f^{(0)}(x) = f(x)$ ). Pokud existuje konečná limita

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}, \quad (1)$$

nazýváme ji  $n$ -tou derivací funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ .

S  $n$ -tou derivací funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  souvisí  $n$ -tý diferenciál funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ . Je to vlastně funkce proměnné  $h = dx$  stupně  $n$ .

**Definice.** Nechť má funkce  $f(x)$  v bodě  $a$   $n$ -tou derivaci  $f^{(n)}(a)$ . Pak funkci proměnné  $h$  (nebo  $dx$ )

$$d^n f(a; h) = f^{(n)}(a) h^n \quad (\text{nebo } d^n f = f^{(n)}(a) dx^n), \quad (2)$$

nazýváme  $n$ -tý diferenciál funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ .

Ze vztahem (2) souvisí značení pro  $n$ -tou derivaci

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a).$$

**Poznámka:** Pro funkci jedné reálné proměnné jsou pojmy  $n$ -tý diferenciál a  $n$ -tá derivace v podstatě totožné. A protože diferenciály počítáme pomocí derivací, mohlo by se zdát, že derivace je důležitější pojem než diferenciál. Ale pro funkce více proměnných už tak jednoduchá souvislost mezi diferenciály a derivacemi není. Základem je nahrazení funkce polynomy a to se dělá pomocí diferenciálů. Proto je pojem diferenciálu funkce v matematice důležitější než pojem derivace, které slouží pouze k výpočtu diferenciálů (pokud existují).

**Definice.** Jestliže existuje  $n$ -tá derivace funkce  $f(x)$  v každém bodě  $x \in M$ , nazýváme funkci  $f^{(n)}(x)$   $n$ -tou derivací funkce  $f(x)$  na množině  $M$ .

Z předchozí přednášky víme, že pokud má funkce  $f(x)$  na množině  $M$  derivaci, je na množině  $M$  spojitá. Z toho plyne následující věta:

**Věta.** Má-li funkce  $f(x)$  na množině  $M$   $n$ -tou derivaci, jsou na  $M$  spojitě všechny derivace  $f^{(k)}(x)$ , kde  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

**Definice.** Řekneme, že funkce  $f(x)$  je třídy  $C_n(M)$ , jestliže má na  $M$  spojitou  $n$ -tou derivaci.

Má-li derivace  $f(x)$  na množině  $M$  spojitě všechny derivace  $f^{(n)}(x)$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , říkáme, že funkce  $f(x)$  je třídy  $C_\infty(M)$  (čte se třídy  $C$  nekonečno na množině  $M$ ).

Z předchozí věty plyne následující řetězec inkluzí

$$C_0(M) \supset C_1(M) \supset C_2(M) \supset \dots \supset C_n(M) \supset \dots \supset C_\infty(M).$$

Při některých výpočtech je užitečný vztah pro  $n$ -tou derivaci součinu dvou funkcí.

**Věta** (*Leibnizovo pravidlo*). Jestliže mají funkce  $f(x)$  a  $g(x)$   $n$ -tou derivaci, platí

$$\left(f(x)g(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x). \quad (3)$$

Poznamenejme, že vztah (3) je podobný tzv. binomické větě

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

kde  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  je tzv. binomický koeficient.

**DŮKAZ:** Tvzení dokážeme indukcí. Pro  $n=1$  je (3) vztah pro derivaci součinu  $(fg)' = f'g + fg'$ .

Nechť (3) platí pro  $n$ . Derivací tohoto vztahu dostaneme

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \\ &= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \binom{n}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\ &= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \\ &= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n-k+1)}. \end{aligned}$$

A protože

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}, \end{aligned}$$

je

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)}g + fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

**Příklad:** Nechť je  $f(x) = x \sin x$ . Najděte  $f^{(77)}(x)$ .

**ŘEŠENÍ:** Protože  $x' = 1$  a  $x^{(k)} = 0$  pro  $k \geq 2$ , je podle Leibnizova vzorce (3)

$$(x \sin x)^{(77)} = \sum_{k=0}^{77} \binom{77}{k} x^{(k)} (\sin x)^{(77-k)} = x(\sin x)^{(77)} + 77(\sin x)^{(76)}.$$

A protože  $(\sin x)^{(76)} = \sin x$  a  $(\sin x)^{(77)} = (\sin x)' = \cos x$  je

$$(x \sin x)^{(77)} = x \cos x + 77 \sin x.$$

Podobně jako první derivace rozhodovaly o tom, zda funkce na intervalu roste nebo klesá, rozhodují druhé derivace o tom, zda na intervalu roste nebo klesá první derivace, tj. směrnice tečny. To byla právě vlastnost konvexních a konkávních funkcí. Proto by nemělo být příliš překvapující, že platí následující věta.

**Věta.** Nechť má funkce na intervalu  $\mathcal{I}$  druhou derivaci.

1. Je-li  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in \mathcal{I}$ , je funkce  $f(x)$  na intervalu  $\mathcal{I}$  konvexní.
2. Je-li  $f''(x) < 0$  pro každé  $x \in \mathcal{I}$ , je funkce  $f(x)$  na intervalu  $\mathcal{I}$  konkávní.

DŮKAZ: Nechť jsou  $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{I}$  a platí  $x_1 < x_2 < x_3$ . Z Lagrangeovy věty plyne, že existují  $c_1 \in (x_1, x_2)$  a  $c_2 \in (x_2, x_3)$  taková, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) \quad \text{a} \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2).$$

Předpokládejme, že je na intervalu  $\mathcal{I}$  druhá derivace  $f''(x) > 0$ . Pak je první derivace  $f'(x)$  na intervalu  $\mathcal{I}$  rostoucí funkce a protože  $c_1 < c_2$  je  $f'(c_1) < f'(c_2)$ , tj.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

To ale znamená, že je funkce  $f(x)$  na intervalu  $\mathcal{I}$  konvexní.

Důkaz pro  $f''(x) < 0$  je obdobný.

Má-li funkce  $f(x)$  na intervalu  $\mathcal{I}$  druhou derivaci, mohou být *inflexní body* pouze body, ve kterých je  $f''(x) = 0$ . O tom, zda je bod  $a$ , ve kterém je  $f''(a) = 0$ , inflexní bod, rozhodneme buď pomocí chování funkce  $f(x)$  v okolí bodu  $a$  nebo pomocí vyšších derivací jako v případě stacionárních bodů (viz dále). Například, je-li v bodě  $f''(a) = 0$  a  $f'''(a) \neq 0$ , má funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  inflexní bod.

### Taylorův polynom a Taylorova řada

Budeme řešit následující úlohu: Je dána funkce  $f(x)$ , která má  $n$ -tou derivaci a bod  $a$ . Najděte polynom stupně  $n$

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n = \sum_{k=0}^n c_k(x - a)^k, \quad (4)$$

který má v bodě  $a$  stejných prvních  $n$  derivací jako funkce  $f(x)$ , tj. pro každé  $k = 0, 1, \dots, n$  platí  $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ .

Když do (4) dosadíme  $x = a$ , dostaneme z podmínky  $P(a) = f(a)$  vztah  $c_0 = f(a)$ .

Když derivujeme  $P(x)$  dostaneme

$$P'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \dots + nc_n(x - a)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kc_k(x - a)^{k-1}$$

a podmínka  $P'(a) = f'(a)$  dává  $c_1 = f'(a)$ .

Druhá derivace polynomu  $P(x)$  je

$$P''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + \dots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1)(x-a)^{k-2}$$

a z podmínky  $P''(a) = f''(a)$  plyne  $2c_2 = f''(a)$ , tj.  $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ .

Pro  $r$ -tou derivaci polynomu  $P(x)$  získáme

$$P^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^n k(k-1)\dots(k-r+1)c_k(x-a)^{k-r} = \sum_{k=r}^n \frac{k!}{(k-r)!} c_k(x-a)^{k-r}.$$

Jestliže do tohoto vztahu dosadíme  $x = a$ , jsou nulové všechny členy součtu s výjimkou členu, kde  $k = r$ . Z podmínky  $P^{(r)}(a) = f^{(r)}(a)$  dostaneme

$$r!c_r = f^{(r)}(a) \implies c_r = \frac{f^{(r)}(a)}{r!}.$$

**Definice.** Nechť má funkce  $f(x)$  v bodě  $a$   $n$ -tou derivaci. Pak polynom  $n$ -tého stupně

$$T_n(x; a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (5)$$

nazýváme *Taylorův polynom* stupně  $n$  funkce  $f(x)$  se středem v bodě  $a$ .

**Poznámka:** Pomocí diferenciálů (2) lze zapsat Taylorův polynom ve tvaru

$$T_n(a+h; a) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} d^k f(a; h) \quad \text{nebo} \quad T_n(x; a) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} d^k f(a; x-a),$$

který platí i pro funkce více proměnných.

Taylorovým polynomem aproximujeme funkci  $f(x)$  v okolí bodu  $x = a$ . Pokud nahradíme funkci  $f(x)$  Taylorovým polynomem (5) uděláme chybu

$$R_n(x; a) = f(x) - T_n(x; a). \quad (6)$$

Výraz (6) se nazývá *zbytek v Taylorově polynomu* stupně  $n$  funkce  $f(x)$  se středem v bodě  $a$ . Je důležité aspoň odhadnout velikost tohoto zbytku, tj. chybu, které se dopustíme, když nahradíme funkci  $f(x)$  Taylorovým polynomem.

**Věta.** Nechť má funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitě derivace až do řádu  $n$  včetně. Nechť je  $x \in (a, b)$  a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x; a).$$

Pak pro zbytek  $R_n(x; a)$  platí

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{R_n(x; a)}{(x-a)^n} = 0.$$

Podobně lze tvrzení modifikovat pro interval  $\langle b, a \rangle$ .

DŮKAZ: Máme najít limitu

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - T_n(x, a)}{(x - a)^n}.$$

To je limita typu  $\frac{0}{0}$ . Předpoklady věty zaručují, že na tento výraz lze  $n$ -krát použít l'Hospitalovo pravidlo. Tak dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - T_n(x, a)}{(x - a)^n} &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x) - T'_n(x, a)}{n(x - a)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x, a)}{n!} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0, \end{aligned}$$

protože jsme předpokládali, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $a$  spojitou  $n$ -tu derivaci, tj. že platí  $\lim_{x \rightarrow a} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$ .

Jak jsme se již zmínili, nahrazujeme Taylorovým polynomem funkci  $f(x)$  v jistém okolí bodu  $a$ . Zajímavý je případ, kdy je  $f^{(k)}(a) = 0$  pro  $k = 1, 2, \dots, n-1$  a  $f^{(n)}(a) \neq 0$ . Pak je Taylorův polynom stupně  $n$  roven

$$T_n(x; a) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

a pro funkci  $f(x)$  platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + R_n(x; a). \quad (7)$$

Speciálně, je-li  $a$  stacionární bod funkce  $f(x)$ , tj.  $f'(a) = 0$ , je

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2} (x - a)^2 + R_2(x; a).$$

Má-li funkce  $f(x)$  v jistém okolí bodu  $a$  spojitě druhé derivace, je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_2(x, a)}{(x - a)^2} = 0.$$

Proto například k  $\varepsilon = \frac{1}{4}|f''(a)| > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $x$ ,  $0 < |x - a| < \delta$ , má výraz  $\frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + R_2(x; a)$  stejné znaménko jako  $f''(a)$ . Je-li  $f''(a) > 0$  je pro taková  $x$

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(a)}{2} (x - a)^2 + R_2(x; a) > 0$$

a funkce  $f(x)$  má v bodě  $a$  lokální minimum. Naopak je-li  $f''(a) < 0$ , je  $f(x) - f(a) < 0$ , tedy funkce  $f(x)$  má v bodě  $a$  lokální maximum.

Dokázali jsme tedy následující větu:

**Věta.** Nechť má funkce  $f(x)$  v jistém okolí bodu  $a$  druhou derivaci, která je spojitá v bodě  $a$  a  $f'(a) = 0$ . Pak platí:

1. Je-li  $f''(a) > 0$  má funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  lokální minimum.
2. Je-li  $f''(a) < 0$  má funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  lokální maximum.

Jestliže je ve stacionárním bodě  $f''(a) = 0$ , můžeme o tom, zda má funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  lokální extrém rozhodnout pomocí první nenulové derivace funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ .

Je-li tato derivace lichého řádu, tj. je-li  $f^{(k)}(a) = 0$  pro  $k = 1, \dots, 2n$  a  $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$ , nemá funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  lokální extrém, protože první nenulový člen má vlevo a vpravo od bodu  $a$  různá znaménka.

Je-li tato derivace sudého řádu, tj. je-li  $f^{(k)}(a) = 0$  pro  $k = 1, \dots, 2n - 1$  a  $f^{(2n)}(a) \neq 0$ , má funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  lokální extrém; je-li  $f^{(2n)}(a) > 0$  je v bodě  $a$  lokální minimum a je-li  $f^{(2n)}(a) < 0$  je v bodě  $a$  lokální maximum.

Když budeme předpokládat, že funkce  $f(x)$  má navíc na intervalu  $\langle a, b \rangle$  derivaci řádu  $(n + 1)$ , existuje pro zbytek  $R_n(x; a)$  několik vyjádření. Uvedeme pouze tzv. *Lagrangeův tvar* zbytku, který má skoro stejný tvar jako  $(n + 1)$ -ní člen Taylorova polynomu.

**Věta.** Jestliže na intervalu  $\langle a, b \rangle$  existuje  $f^{(n+1)}(x)$ , pak pro každé  $x \in (a, b)$  existuje  $c \in (a, x)$  takové, že

$$R_n(x; a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \quad (8)$$

**Příklad:** Najděte Taylorův polynom stupně  $n$  pro funkci  $f(x) = e^x$  se středem v bodě  $a = 0$  a odhadněte zbytek.

**ŘEŠENÍ:** Protože pro každé  $n$  je  $f^{(n)}(x) = e^x$ , je  $f^{(n)}(0) = 1$  a Taylorův polynom stupně  $n$  je podle (5)

$$T_n(x; 0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Pro zbytek  $R_n(x; 0)$  dostaneme z (8)

$$R_n(x; 0) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde pro  $x > 0$  je  $c \in (0, x)$  a pro  $x < 0$  je  $c \in (x, 0)$ .

Nechť je nyní  $x > 0$  pevné. Protože pro  $c \in (0, x)$  je  $e^c < e^x$ , dostaneme

$$\left| R_n(x; 0) \right| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Z toho plyne, že každé  $x > 0$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x; 0) = 0$  a

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( T_n(x; 0) + R_n(x; 0) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Podobně pro  $x < 0$  je  $c \in (x, 0)$  a dostaneme  $e^c < 1$ . Proto i pro  $x < 0$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x; 0) = 0$ .

To ukazuje, že pro každé  $x \in \mathbb{R}$  platí

$$e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (9)$$

Tento vztah lze použít pro definici  $e^x$  i pokud je  $x$  komplexní číslo. Speciálně pro  $ix$ , kde  $x \in \mathbb{R}$ , dostaneme

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Podobným způsobem lze ukázat, že pro každé  $x \in \mathbb{R}$  je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Když srovnáme poslední tři vztahy, dostaneme tzv. *Eulerův vzorec*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Z něj například plynou vztahy

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

**Příklad:** Najděte Taylorův polynom stupně  $n$  pro funkci  $f(x) = \ln(1+x)$  se středem v bodě  $a = 0$  a odhadněte zbytek.

**Řešení:** Funkce  $f(x)$  definována pro  $x > -1$ . Proto budeme předpokládat, že  $x > -1$ . Indukcí se snadno ukáže, že pro každé  $n \geq 1$  je

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Pro koeficienty v Taylorově polynomu pak dostaneme

$$c_0 = \ln 1 = 0, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

Tedy Taylorův polynom stupně  $n$  pro funkci  $f(x) = \ln(1+x)$  se středem v bodě  $a = 0$  je

$$T_n(x; 0) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Z (8) dostaneme pro zbytek

$$R_n(x; 0) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}, \quad \text{kde} \quad \begin{cases} 0 < c < x & \text{pro } 0 < x, \\ x < c < 0 & \text{pro } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Pro  $x > 0$  platí nerovnost

$$|R_n(x; 0)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1},$$



ze které pro  $x \leq 1$  plyne  $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x; 0)| = 0$ .

Pro  $-1 < x < 0$  dostaneme nerovnost

$$|R_n(x; 0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)^{n+1}}.$$

ze níž pro  $|x| \leq \frac{1}{2}$  snadno ukážeme, že opět je  $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x; 0)| = 0$ .

Protože pro  $x \in \langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x; 0) = 0$ , dostaneme pro tuto  $x$  stejně jako předchozím příkladem vztah

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \quad (10)$$

Speciálně, pro  $x = 1$  dostaneme

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

**Poznámka.** Lze ukázat, že vztah (10) platí pro všechna  $x \in (-1, 1)$ .

Existují nenulové funkce, které mají derivace všech řádů a pro které je  $f^{(n)}(a) = 0$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Příkladem takové funkce je  $f(x) = e^{-1/x^2}$  pro  $x \neq 0$  a  $f(0) = 0$ . Tato funkce má všechny derivace v bodě  $x = 0$  rovny nule, a tedy její Taylorův polynom libovolného stupně je roven nule. Pro takové funkce je  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x; a) \neq 0$  pro každé  $x \neq a$ . Zajímavější jsou funkce, pro které existuje okolí bodu  $a$  takové, že pro každé  $x$  z tohoto okolí je  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x; a) = 0$ . Tyto funkce lze v okolí bodu  $a$  vyjádřit pomocí nekonečné řady, tzv. *Taylorovy řady*, jako

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad \text{kde } c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Takové funkce se nazývají analytické v bodě  $a$ .