

Přednáška 8

Limita a spojitost zobrazení, derivace podle vektoru a parciální derivace

Osnova přednášky

1. Definice limity zobrazení pomocí okolí bodu.
2. Definice limity zobrazení pomocí vzdálenosti.
3. Limita zobrazení a limity jeho složek.
4. Věty o limitách funkce více proměnných.
5. Příklad $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$.
6. Výpočet limit neurčitých výrazů a l'Hospitalovo pravidlo pro funkci více proměnných.
7. Limita zobrazení vzhledem k množině $M \subset D_f$.
8. Vztah limity zobrazení a limity zobrazení vzhledem k množině.
9. Příklad $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.
10. Příklad $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$.
11. Limita funkce více proměnných jako stejnoměrná limita.
12. Limita složeného zobrazení.
13. Zobrazení spojitě v bodě.
14. Zobrazení spojitě na množině $M \subset \mathbb{R}^n$.
15. Funkce spojitá na kompaktní množině.
16. Derivace funkce podle vektoru a ve směru.
17. Parciální derivace.
18. Derivace podle vektoru a tečný vektor ke grafu funkce.
19. Derivace funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ podle vektoru $\mathbf{v} = (2, 1)$ v bodě $\mathbf{a} = [1; -1]$.
20. Výpočet parciálních derivací.
21. Věty o derivacích podle vektoru.
22. Parciální derivace a tečná rovina ke grafu funkce.
23. Příklad $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ v bodě $\mathbf{a} = [0; 0]$.
24. Příklad: $f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$ a $f(0, 0) = 0$.

V této přednášce se zabýváme zobrazením $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$ a $Y \subset \mathbb{R}^k$, které budeme často psát jako $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Pomocí souřadnic budeme toto zobrazení zapisovat jako

$$y_r = f_r(\mathbf{x}) = f_r(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad r = 1, 2, \dots, k,$$

kde $f_r(\mathbf{x}) = f_r(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou funkce na množině X , tj. $f_r : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definice limity tohoto zobrazení je stejná jako obecná definice limity pomocí okolí bodu, tj.

Definice. Nechť je $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$, \mathbf{a} hromadný bod množiny X a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$. Když

$$\forall U(\mathbf{A}) \exists P(\mathbf{a}) ; \forall \mathbf{x} \in P(\mathbf{a}) \cap X \text{ je } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in U(\mathbf{A}), \quad (1)$$

tj. ke každému okolí bodu \mathbf{A} v \mathbb{R}^k existuje prstencové okolí bodu \mathbf{a} v \mathbb{R}^n takové, že pro každé $\mathbf{x} \in P(\mathbf{a}) \cap X$ patří $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ do $U(\mathbf{A})$, řekneme, že zobrazení \mathbf{f} má v bodě \mathbf{a} *limitu* \mathbf{A} . Tento výrok zapisujeme jako $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.

Protože okolí definujeme pomocí vzdálenosti bodů, lze tuto definici zapsat pomocí ε a δ jako

Definice. Nechť je $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$, \mathbf{a} hromadný bod množiny X a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$. Když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 ; \forall \mathbf{x} \in X, 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \text{ je } d(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{A}) < \varepsilon, \quad (2)$$

tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in X$, pro které je $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$, platí $d(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{A}) < \varepsilon$, říkáme, že zobrazení \mathbf{f} má v bodě \mathbf{a} *limitu* \mathbf{A} . Tento výrok zapisujeme jako $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.

Pokud píšeme $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$ a $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$, platí následující věta.

Věta. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ právě tehdy, když $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_r(\mathbf{x}) = A_r \in \mathbb{R}$ pro každé $r = 1, 2, \dots, k$.

Z předchozí věty plyne, že abychom našli limitu zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{a} , stačí najít k limit funkcí $f_r(\mathbf{x})$ v tomto bodě. Proto se v přednášce budeme zabývat hlavně limitami funkcí $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Pro funkce $f(\mathbf{x})$ jsme definovali také nevlastní limity $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \pm\infty$. Pokud počítáme limitu zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ do \mathbb{R}^k , kde $k \geq 1$, a aspoň jedna limita funkce $f_r(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{a} je nevlastní, limita zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ neexistuje.

Uvedeme některé základní věty, které se používají při výpočtu limit funkce více proměnných. Abychom neměli zbytečně složité předpoklady, budeme předpokládat, že všechny funkce jsou definovány na společné množině $X \subset \mathbb{R}^n$.

Věta. Pokud existují limity $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = B$ a α, β jsou reálné konstanty, platí

1. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha A + \beta B;$

2. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = A \cdot B;$
3. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{A}{B},$

pokud jsou výrazy na pravé straně definovány v \mathbb{R}^* .

Věta. Pokud v nějakém prstencovém okolí bodu \mathbf{a} platí nerovnosti $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ a existují limity $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = A$, existuje také limita $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = A$.

Věta. Limita $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ právě tehdy, když $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} |f(\mathbf{x})| = 0$.

Limity, podobně jako v případě funkcí jedné reálné proměnné počítáme tak, že některé základní limity známe (najdeme je z definice) a složitější limity pak počítáme z uvedených vět.

Příklad. Najděte limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} (x+y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}.$$

ŘEŠENÍ: Funkce, jejíž limitu počítáme je definována v celém \mathbb{R}^2 s výjimkou přímkou $x = 0$ a $y = 0$. Bod $\mathbf{a} = [0, 0]$ je tedy hromadný bod D_f . Protože platí nerovnost

$$0 \leq \left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x+y| \leq |x| + |y|,$$

je uvedená limita rovna nule, protože $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} |x| = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} |y| = 0$.

Při výpočtu neurčitých výrazů vznikají větší problémy než v případě limit funkcí jedné reálné proměnné. Tam totiž platila Cauchyova věta o střední hodnotě a z ní plynulo l'Hospitalovo pravidlo. Ale pro funkce více reálných proměnných analogická věta neplatí.

Další věta je užitečná v tom, že nám umožňuje použít při výpočtu limity l'Hospitalovo pravidlo, když víme, že limita existuje, nebo dokázat, že limita neexistuje. Nejprve budeme definovat limitu zobrazení vzhledem k množině $M \subset X = D_f$.

Definice. Nechť je $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$, $M \subset X$, \mathbf{a} hromadný bod množiny M a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$. Jestliže

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 ; \forall \mathbf{x} \in M, 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \text{ je } d(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{A}) < \epsilon, \quad (3)$$

tj. ke každému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in M$, pro které je $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$, platí $d(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{A}) < \epsilon$, říkáme, že zobrazení \mathbf{f} má v bodě \mathbf{a} vzhledem k množině M limitu \mathbf{A} . Tento výrok zapisujeme jako $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in M}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.

Poznámka. Tato limita se liší od dříve uvedené limity tím, že při jejím výpočtu uvažujeme pouze $\mathbf{x} \in M$. Pokud je $M = X = D_f$, se sousloví "vzhledem k množině M " vynechává.

Věta. Jestliže existuje $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$, $M \subset X$ a \mathbf{a} je hromadný bod množiny M , pak existuje $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in M}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.

Tato věta se často používá k důkazu toho, že limita neexistuje. K tomu stačí najít dvě podmnožiny množiny X , vzhledem ke kterým má zobrazení různé limity. Za množiny M se velmi často vybírají přímky nebo polopřímky, které procházejí bodem \mathbf{a} .

Příklad. Ukažte, že limita $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ neexistuje.

ŘEŠENÍ: Když budeme počítat uvedenou limitu vzhledem k přímkám $x = 0$ a $y = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ x=0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0 + y^2} = 0, \\ \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ y=0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 0} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Může se ovšem stát, že limity funkce jsou si rovny vzhledem ke všem přímkám, které procházejí bodem \mathbf{a} , ale limita přesto neexistuje.

Příklad. Uvažujme limitu $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$. Vzhledem k přímkám $x = 0$ a $y = 0$ je

$$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ x=0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ y=0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = 0.$$

Tedy pokud limita existuje, je rovna nule.

Každou další přímku, která prochází bodem $[0, 0]$ lze zapsat jako $y = kx$, kde $k \neq 0$. Pro limitu vzhledem k přímce $y = kx$ dostaneme

$$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ y=kx}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^3}{x^2 + k^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x}{1 + k^4 x^2} = 0.$$

Ale když budeme uvažovat parabolu $x = y^2$, dostaneme

$$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Uvedená limita tedy neexistuje.

Poznámka. Dokázat, že existuje limita neurčitého výrazu funkce více proměnných, je poměrně pracná úloha. Ukážeme důvody, proč tomu tak je, a aspoň principiálně metodu, jak existenci limity dokázat.

Vrátíme se k definici limity funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$. Vzdálenost bodu \mathbf{x} od bodu \mathbf{a} v prostoru \mathbb{R}^n je definována jako

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}.$$

Mnohdy je výhodné popsat bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ pomocí čísel $r > 0$ a směrem z bodu \mathbf{a} do bodu \mathbf{x} , tj. jednotkovým vektorem \mathbf{s} , pomocí vztahu

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\mathbf{s}, \quad \text{kde } r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} > 0, \quad \|\mathbf{s}\| = 1. \quad (4)$$

Například v rovině je $x_1 = a_1 + r \cos \varphi$, $x_2 = a_2 + r \sin \varphi$, kde $r > 0$ a $0 \leq \varphi < 2\pi$ jsou tzv. *polární souřadnice* s počátkem v bodě $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.

Pak je

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} = r \sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2} = r$$

a jestliže dosadíme za \mathbf{x} do funkce $f(\mathbf{x})$ z rovnice (4), dostaneme funkci

$$F(r, \mathbf{s}) = f(\mathbf{a} + r\mathbf{s}).$$

Podle definice limity musí platit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall r, 0 < r < \delta \text{ a } \forall \mathbf{s}, \|\mathbf{s}\| = 1 \text{ je } |F(r, \mathbf{s}) - A| < \varepsilon. \quad (5)$$

Každé polopřímce P , která vychází z bodu \mathbf{a} , odpovídá právě jeden směr \mathbf{s} . Taková polopřímka P má parametrickou rovnici $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\mathbf{s}$, $r > 0$, kde \mathbf{s} je pevně zvolený jednotkový vektor. Tvrzení, že limita funkce $f(\mathbf{x})$ je vzhledem ke každé polopřímce s počátkem v bodě \mathbf{a} rovna \mathbf{A} znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ a } \forall \mathbf{s}, \|\mathbf{s}\| = 1 \exists \delta > 0; \forall r, 0 < r < \delta \text{ je } |F(r, \mathbf{s}) - A| < \varepsilon. \quad (6)$$

Tvrzení (5) a (6) se liší v tom, že v (6) hledáme $\delta > 0$ k danému $\varepsilon > 0$ a danému směru \mathbf{s} , a tedy $\delta = \delta(\varepsilon, \mathbf{s})$ a v tvrzení (5), hledáme $\delta > 0$ k danému $\varepsilon > 0$, tj. $\delta = \delta(\varepsilon)$, tj. δ je stejné pro všechny směry \mathbf{s} .

Limita podle definice (6) se nazývá *bodová limita* funkce $F(r, \mathbf{s})$ a limita podle definice (5) se nazývá *stejněměrná limita* funkce $F(r, \mathbf{s})$ na množině $\|\mathbf{s}\| = 1$. Limita funkce více proměnných je právě tato stejněměrná limita.

Když pro každé $r > 0$ definujeme funkci

$$G(r) = \sup_{\|\mathbf{s}\|=1} |F(r, \mathbf{s}) - A|,$$

platí tvrzení, že $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$ právě tehdy, když je $\lim_{r \rightarrow 0^+} G(r) = 0$.

Spojité zobrazení

Nyní se budeme věnovat limitě složeného zobrazení. Je-li $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$ a $\mathbf{g} : Y \rightarrow Z$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^k$ a $Z \subset \mathbb{R}^\ell$, lze definovat zobrazení $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : X \rightarrow Z$ předpisem

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Nechť je \mathbf{a} hromadný bod množiny X a limita $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$. Nechť je \mathbf{A} hromadný bod množiny Y a platí $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{A}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}$. Bude nás zajímat, kdy můžeme tvrdit, že platí

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{B}. \quad (7)$$

Protože v definici limity zobrazení $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ se vůbec nezajímáme o jeho hodnotu v bodě \mathbf{A} , je jedna z možností zaručit, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{A}$. To vede k následující větě.

Věta. Nechť je $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ a $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{A}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}$. Jestliže existuje prstencové okolí $P(\mathbf{a})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in P(\mathbf{a}) \cap X$ je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{A}$, pak platí vztah (7).

Jiná možnost je předpokládat, že $\mathbf{g}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$. To nás vede k definici spojitého zobrazení.

Definice. Zobrazení $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$ se nazývá *spojité* v bodě $\mathbf{a} \in X$ právě tehdy, když

$$\forall U(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \exists V(\mathbf{a}); \forall \mathbf{x} \in V(\mathbf{a}) \cap X \text{ je } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in U(\mathbf{f}(\mathbf{a})),$$

neboli ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé \mathbf{x} , pro které je $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$, platí $d(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{a})) < \varepsilon$.

Poznámka. Poznamenejme, že zobrazení je spojité v bodě $\mathbf{a} \in X$ právě tehdy, když je $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ nebo když je \mathbf{a} izolovaný bod množiny X .

Věta. Nechť je $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ a zobrazení $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ je spojité v bodě \mathbf{A} . Pak platí

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}\left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\right) = \mathbf{g}(\mathbf{A}).$$

Definice. Zobrazení \mathbf{f} se nazývá *spojité na množině* $M \subset X$ právě tehdy, když je spojité v každém bodě množiny M . Je-li $M = X$, říkáme, že zobrazení \mathbf{f} je spojité.

Uvedeme ještě několik vět, které platí pro spojitá zobrazení.

Věta. Nechť jsou zobrazení $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$ a $\mathbf{g} : Y \rightarrow Z$ spojitá. Pak je složené zobrazení $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : X \rightarrow Z$ spojité.

Věta. Zobrazení $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ je spojité právě tehdy, když jsou všechny jeho složky $f_r : X \rightarrow \mathbb{R}$, $r = 1, 2, \dots, k$, spojitě funkce.

Další věta má zásadní význam při výpočtu maxima a minima spojité funkce.

Věta. Jestliže je funkce $f(\mathbf{x})$ spojitá na kompaktní, tj. uzavřené a omezeně, množině $X \subset \mathbb{R}^n$, existují body $\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max} \in X$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in X$ je

$$f(\mathbf{x}_{\min}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_{\max}).$$

Poznámka. Jinými slovy předcházející věta říká, že každá funkce $f(\mathbf{x})$ spojitá na kompaktní množině X má na množině X minimum a maximum.

Derivace funkce podle vektoru, parciální derivace a tečná rovina

Derivace funkce podle vektoru a parciální derivace

Nechť je $y = f(\mathbf{x})$ funkce definovaná na množině $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in X$ a \mathbf{v} je vektor v \mathbb{R}^n . Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $|t| < \delta$ je bod $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t \in X$. Pak je pro $|t| < \delta$ definována funkce

$$F(t) = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t) = f(a_1 + v_1t, a_2 + v_2t, \dots, a_n + v_nt). \quad (8)$$

Definice. Derivaci funkce $F(t)$, která je definovaná vztahem (8), v bodě $t = 0$, tj. $F'(0)$, nazýváme *derivace funkce $f(\mathbf{x})$ podle vektoru \mathbf{v}* v bodě \mathbf{a} a budeme ji značit

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}).$$

Je-li $\|\mathbf{v}\|^2 = 1$, nazýváme $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ *derivace funkce $f(\mathbf{x})$ ve směru \mathbf{v}* v bodě \mathbf{a} .

Je-li $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, kde \mathbf{e}_i je jednotkový vektor ve směru osy x_i , nazývá se $f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a})$ *parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ podle proměnné x_i* v bodě \mathbf{a} a budeme ji značit jako

$$f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a}) = f'_{,i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Poznámka. Jestliže interpretujeme funkci n proměnných $f(\mathbf{x})$ jako n -rozměrnou nadplochu \mathcal{S} prostoru \mathbb{R}^{n+1} se souřadnicemi $[\mathbf{x}, y]$, jsou parametrické rovnice této nadplochy

$$x_k = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Pro dané $\mathbf{a} \in D_f$ leží bod $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ v této nadploše. Pro daný nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sestrojíme dvourozměrnou nadplochu \mathcal{P}_2 , tj. rovinu, která prochází bodem \mathbf{A} a je rovnoběžná s vektory $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, 0)$ a \mathbf{e}_{n+1} . Průnik roviny \mathcal{P}_2 s nadplochou \mathcal{S} je křivka \mathcal{C} , která prochází bodem \mathbf{A} a jejíž parametrické rovnice jsou

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t, \quad y = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t) = F(t), \quad |t| < \delta.$$

Bodu $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ odpovídá hodnota parametru $t = 0$ a tečný vektor ke křivce \mathcal{C} v bodě \mathbf{A} je

$$\mathbf{t} = (\mathbf{v}, f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})).$$

Protože křivka \mathcal{C} leží v nadploše \mathcal{S} , musí být vektor \mathbf{t} rovnoběžný s tečnou nadrovinou k nadploše \mathcal{S} v bodě \mathbf{A} . Pokud ovšem tečná nadrovina existuje.

Příklad. Najděte derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ podle vektoru $\mathbf{v} = (2, 1)$ v bodě $\mathbf{a} = [1, -1]$.

ŘEŠENÍ: Funkce $F(t)$ definovaná vztahem (8) je v tomto případě

$$F(t) = f(1 + 2t, -1 + t) = (1 + 2t)^2 - (1 + 2t)(-1 + t) + (-1 + t)^2 = 3 + 3t + 3t^2.$$

Protože její derivace je $F'(t) = 3 + 6t$, je

$$f'_{\mathbf{v}}(1, -1) = F'(0) = 3.$$

Podle předcházející poznámky je vektor $\mathbf{t} = (2, 1, 3)$ tečný vektor k ploše $z = x^2 - xy + y^2$ v bodě $\mathbf{A} = [1; -1; 3]$.

Poznámka. Podle definice je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{h}.$$

To znamená, že při výpočtu parciální derivace podle proměnné x_i položíme nejprve $x_k = a_k$ pro $k \neq i$. Tím získáme funkci jedné proměnné $F_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$, kterou derivujeme v bodě $x_i = a_i$.

Příklad. Najděte obě parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x^2y + (y - 1) \arcsin\left(\frac{2 - x}{3 + y}\right)^2$$

v bodě $\mathbf{a} = [2, 1]$.

ŘEŠENÍ. Při výpočtu $f'_{,x}(2, 1)$ sestrojíme nejprve funkci $F_1(x) = f(x, 1) = x^2$, jejíž derivace v bodě $x = 2$ je

$$f'_{,x}(2, 1) = \left. \frac{dF_1(x)}{dx} \right|_{x=2} = 4,$$

a pro výpočet $f'_{,y}(2, 1)$ sestrojíme funkci $F_2(y) = f(2, y) = 4y$, jejíž derivace je

$$f'_{,y}(2, 1) = \left. \frac{dF_2(y)}{dy} \right|_{y=1} = 4.$$

Zatím jsme definovali derivaci podle vektoru a parciální derivaci funkce $y = f(\mathbf{x})$ v daném bodě \mathbf{a} . Následující definice definuje derivaci podle vektoru a parciální derivaci jako funkci na jisté množině $M \subset X$.

Definice. Nechť je $M \subset X$ množina všech $\mathbf{x} \in X$, pro která existuje derivace podle vektoru \mathbf{v} v bodě \mathbf{x} . Funkce $f'_{\mathbf{v}} : M \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vztahem $y = f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$, se nazývá *derivace podle vektoru \mathbf{v}* .

Je-li $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, nazýváme funkci $f'_{,i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ *parciální derivace podle proměnné x_i* .

Poznámka. Rozdíl mezi předchozími definicemi je v tom, že derivace v bodě \mathbf{a} v první definici je číslo, kdežto druhá definice definuje funkci, jejíž hodnota v bodě \mathbf{x} je rovna parciální derivaci podle x_i v bodě \mathbf{x} .

Protože derivace funkce $y = f(\mathbf{x})$ podle vektoru \mathbf{v} a parciální derivace jsou definovány pomocí derivace funkce jedné reálné proměnné, platí pro ně věty o derivaci součtu, součinu a podílu, které jsou známy z prvního semestru. Navíc platí

Věta. Nechť je $y = f(\mathbf{x})$ a $c \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ existuje také $f'_{c\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ a platí

$$f'_{c\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = cf'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}).$$

DŮKAZ: Pro výpočet derivace podle vektoru \mathbf{v} sestrojíme funkce $F(f) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ a pro výpočet derivace podle vektoru $c\mathbf{v}$ funkci

$$\widehat{F}(t) = f(\mathbf{a} + ct\mathbf{v}) = F(ct).$$

Podle věty o derivaci složené funkce je $\widehat{F}'(t) = cF'(ct)$, a tedy v bodě $t = 0$ platí

$$f'_{c\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \widehat{F}'(0) = cF'(0) = cf'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}).$$

Tečná nadrovina ke grafu funkce $y = f(\mathbf{x})$

Jak jsme se zmínili dříve, je pro každý bod $\mathbf{a} \in D_f$ a nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor

$$\mathbf{t} = (\mathbf{v}, f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})) = \mathbf{v} + f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) \mathbf{e}_{n+1}$$

tečný vektor v bodě $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ k jisté křivce, která leží v n -rozměrné nadploše \mathcal{S} dané rovnicí $y = f(\mathbf{x})$.

Předpokládejme, že v bodě $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ existuje k nadploše \mathcal{S} tečná nadrovina. Ta je určena bodem \mathbf{A} a n lineárně nezávislými vektory $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n$ v \mathbb{R}^{n+1} , které leží v tečné nadrovině. Předpokládejme, že jsou to například vektory

$$\mathbf{t}_i = (\mathbf{e}_i, f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a})) = (\mathbf{e}_i, f'_{,i}(\mathbf{a})) = \mathbf{e}_i + f'_{,i}(\mathbf{a}) \mathbf{e}_{n+1},$$

které jsou podle předchozího tečné k jistým křivkám, které leží v nadploše \mathcal{S} a procházejí bodem $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})] \in \mathcal{S}$. Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že vektor

$$\mathbf{n} = (f'_{,1}(\mathbf{a}), f'_{,2}(\mathbf{a}), \dots, f'_{,n}(\mathbf{a}), -1) = \sum_{i=1}^n f'_{,i}(\mathbf{a}) \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{n+1}$$

je kolmý na všechny vektory \mathbf{t}_i , a tedy je to vektor normály k tečné nadrovině. Proto je rovnice tečné nadroviny

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}, y - f(\mathbf{a})) = 0, \quad \text{tj.} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \cdot (x_i - a_i) - y + f(\mathbf{a}) = 0.$$

Tedy za předpokladu, že v bodě \mathbf{a} existují parciální derivace funkce $y = f(\mathbf{x})$, a že v bodě $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ existuje tečná nadrovina k nadploše $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definované rovnicí $y = f(\mathbf{x})$, je její rovnice

$$y - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \cdot (x_i - a_i). \quad (9)$$

Poznámka. Nutná podmínka k existenci tečné nadroviny je, aby pro každé dva vektory \mathbf{t}_1 a \mathbf{t}_2 , které leží v tečné nadrovině, v ní ležel také vektor $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ (obecněji každá lineární kombinace těchto vektorů). Protože pro každé vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 leží v tečné nadrovině vektory $\mathbf{t}_1 = (\mathbf{v}_1, f'_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{a}))$ a $\mathbf{t}_2 = (\mathbf{v}_2, f'_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{a}))$. Tedy musí v ní ležet vektor

$$\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, f'_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{a}) + f'_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{a})).$$

Na druhou stranu v tečné nadrovině leží také vektor

$$\mathbf{t} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, f'_{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}(\mathbf{a})).$$

Jestliže srovnáme tyto dva vztahy, zjistíme, že nutná podmínka pro existenci tečné nadroviny ke grafu funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ je, aby pro každé \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 platilo

$$f'_{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{a}) + f'_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{a}). \quad (10)$$

Následující příklad ukazuje, že tato rovnost obecně neplatí.

Příklad. V bodě $\mathbf{a} = [0, 0]$ najděte derivace funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ podle vektorů $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ a $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (1, 1)$.

ŘEŠENÍ: Podle definice sestrojíme pro výpočet jednotlivých derivací funkce

$$F_1(t) = f(t, 0) = t, \quad F_2(t) = f(0, t) = t, \quad F_3(t) = f(t, t) = t\sqrt[3]{2}.$$

Z toho dostaneme

$$f'_{\mathbf{e}_1}(0, 0) = f'_{\mathbf{e}_2}(0, 0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_{\mathbf{v}}(0, 0) = \sqrt[3]{2} \neq f'_{\mathbf{e}_1}(0, 0) + f'_{\mathbf{e}_2}(0, 0) = 2.$$

Dokonce ani když platí (10) pro každé \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 , nemusí existovat tečná nadrovina a dokonce funkce $y = f(\mathbf{x})$ nemusí být v bodě \mathbf{a} ani spojitá.

Příklad. Uvažujme funkci

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} \quad \text{pro} \quad [x, y] \neq [0, 0] \quad \text{a} \quad f(0, 0) = 0.$$

Nechť je $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Pak je

$$F(t) = f(v_1 t, v_2 t) = \frac{v_1^4 v_2^2 t^2}{v_2^4 + v_1^8 t^4}$$

pro $t \neq 0$ a $F(0) = 0$. Podle definice je

$$F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1^4 v_2^2 t}{v_2^4 + v_1^8 t^4} = 0$$

(Pro $v_2 = 0$ je funkce rovna nule a pro $v_2 \neq 0$ je to zřejmé).

Tedy pro každé \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 platí (10), ale protože

$$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow 0 \\ x=0}} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} = 0, \quad \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ y=x^2}} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{x^8 + x^8} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

není tato funkce v bodě $[0, 0]$ ani spojitá.