

KAPITOLA 1

MNOŽINY ČÍSEL

1.1 Základní poznatky o množinách

Množinou budeme rozumět souhrn libovolných objektů. Množinu považujeme za **určenou**, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoli. Každý z objektů, který patří do dané množiny, se nazývá jejím **prvkem (elementem)**. Množiny budeme značit velkými písmeny latinské abecedy, např. **A**, **B**, **M**, apod., prvky množin budeme značit malými písmeny, např. a , b , x , apod. Skutečnost, že a **je prvkem (elementem) množiny A**, vyjadřujeme zápisem $a \in \mathbf{A}$. Není-li určitý objekt b prvkem množiny **A**, píšeme $b \notin \mathbf{A}$.

Obsahuje-li daná množina alespoň jeden prvek, nazývá se **neprázdná množina**; neobsahuje-li žádný prvek, nazývá se **prázdná množina** a značí se symbolem \emptyset . Množina, která má konečný počet prvků (tj. množina, která je prázdná, nebo je počet jejích prvků dán přirozeným číslem - viz část 1.1.2), se nazývá **konečná množina**; každá množina, která není konečná, se nazývá **nekonečná**.

Je-li množina **A** konečná, můžeme ji určit **výčtem** jejích prvků, které bez ohledu na pořadí vypíšeme a uzavřeme do složených závorek { }, například $\mathbf{A} = \{1, 3, 5, 7\}$.

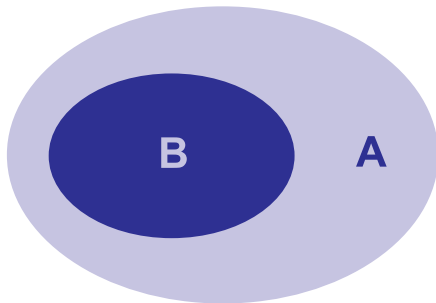
Konečnou i nekonečnou množinu můžeme dále určit **charakteristickou vlastností**, tj. takovou vlastností, kterou mají právě jen prvky zadávané množiny. Zjišťování uvažované vlastnosti se přitom provádí v tzv. **základní (univerzální) množině U**, která obsahuje všechny objekty, které nás v dané situaci zajímají. Budeme například psát:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U}; V(x)\}$$

a říkat: „**A** je množina všech x z množiny **U**, pro která platí (která mají vlastnost) $V(x)$.“

Množinové vztahy a operace

Množina **B** se nazývá **podmnožinou** množiny **A**, je-li každý prvek množiny **B** prvkem množiny **A**; píšeme $B \subset A$.



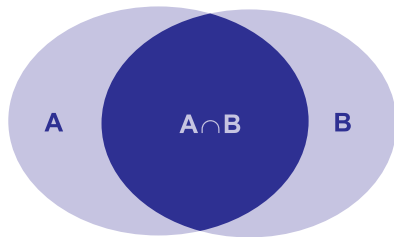
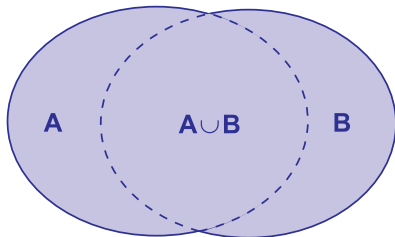
Například množina $B = \{3, 5, 7, 9\}$ je podmnožinou množiny $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$; množina *všech pravouhlých* trojúhelníků je podmnožinou množiny *všech* trojúhelníků, apod.

Uvědomme si, že **každá množina je podmnožinou sebe sama**, tj. pro každou množinu **A** platí $A \subset A$. Rovněž platí, že **prázdná množina je podmnožinou každé množiny**, tj. pro každou množinu **A** platí: $\emptyset \subset A$.

Množiny **A**, **B** považujeme za **sobě rovné** (píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), právě když $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ a zároveň $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, tj. skládají-li se z týchž prvků.

Sjednocení $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ množin **A**, **B** je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin **A**, **B**. Z definice ihned plyne, že sjednocení libovolné množiny **A** s prázdnou množinou je množina **A**, tj. $\mathbf{A} \cup \emptyset = \mathbf{A}$.

Průnik $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ množin **A**, **B** je množina všech prvků, které patří zároveň do obou množin. Průnik každé množiny **A** s prázdnou množinou je zřejmě prázdná množina, $\mathbf{A} \cap \emptyset = \emptyset$. Množiny **A**, **B**, pro které platí $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$, se nazývají **disjunktní**.



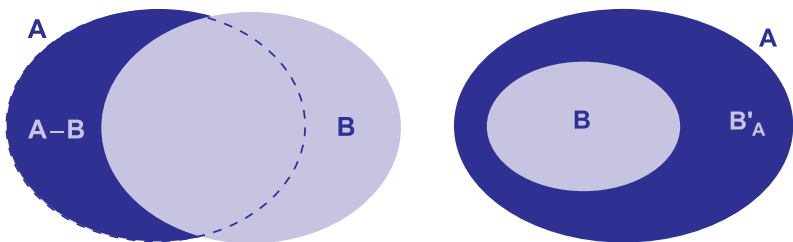
☛ **Příklad 1.**

- *Sjednocení množin:*

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}$$

- *Průnik množin:* $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} = \{3, 5, 7\}$

Rozdíl $A \setminus B$ množin A , B je množina všech prvků množiny A , které nejsou prvky množiny B . Je-li speciálně $B \subset A$, hovoříme o **doplňku množiny B v množině A** a píšeme B'_A (nebo také B_A^c).



☛ Příklad 2.

- *Rozdíl množin:*

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \setminus \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

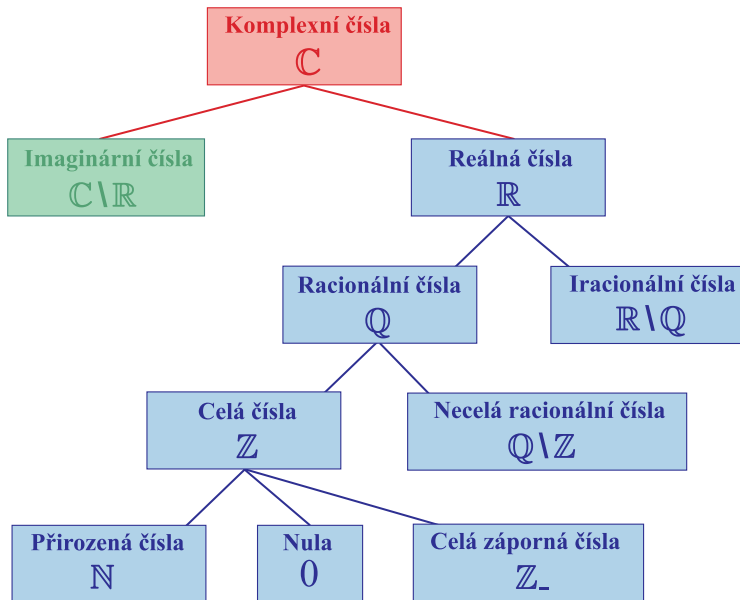
- *Doplněk množiny*

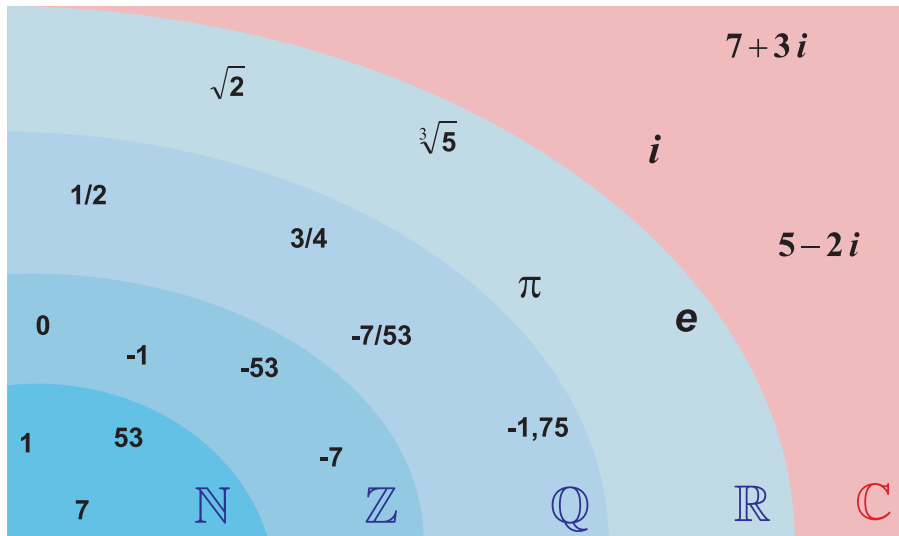
B = {3, 5, 7, 9} v množině **A** = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13}:

$$\mathbf{B}'_{\mathbf{A}} = \{1, 11, 13\}.$$

1.2 Druhy čísel

Zopakujme si, že jsme se již setkali s následujícími druhy čísel:



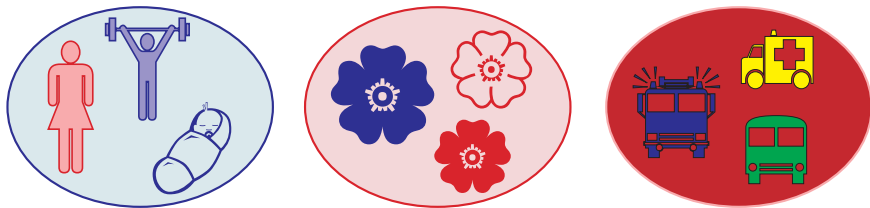


$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1.2.1 Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Přirozená čísla slouží k vyjádření počtu osob, zvířat, předmětů aj., obecněji počtu prvků konečných neprázdných množin. Přirozené číslo - uvažujme například číslo 3 - můžeme chápat jako společnou vlastnost následujících množin:



Obor přirozených čísel je **uzavřený na sčítání a násobení**, není však **uzavřený na odčítání** (ne vždy je rozdíl dvou přirozených čísel přirozené číslo, např. $2 - 5 = -3$) ani na dělení (např. $2 : 5 = 0,40$ není přirozené číslo). V oboru přirozených čísel **k žádnému číslu neexistuje číslo opačné ani převrácené**.

Přirozená čísla jsme zvyklí zapisovat v **poziční číselné soustavě o základu deset**, neboli v **desítkové soustavě**. K tomu používáme deset číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jejichž význam závisí na jejich umístění či pozici. Číslice zapisujeme za sebe v pořadí zprava doleva a postupně tak udáváme, kolik dané číslo obsahuje jednotek, desítek, stovek, tisíců, desetitisíců, státisíců, milionů, ..., tedy nultých, prvních, druhých, ..., šestých, ... mocnin čísla 10. Jistě víte, že například skupina číslic

87 956

vyjadřuje číslo obsahující 6 jednotek, 5 desítek, 9 stovek, 7 tisíc a 8 desetitisíc:

$$\begin{aligned} & 8 \cdot 10\,000 + 7 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ = & 8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 . \end{aligned}$$

Právě uvedený výraz se nazývá **rozvinutý zápis daného čísla v desítkové soustavě**, zápis 387 956 se nazývá **zkrácený**.

Obecně lze každé přirozené číslo a vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

neboli ve zkráceném zápisu

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0,$$

kde n je přirozené číslo nebo nula, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ jsou některá z čísel $0, 1, \dots, 9$, přičemž $a_n \neq 0$. Číslo a_i se nazývá **číslice (cifra) řádu i čísla a** , číslo 10^i se nazývá **jednotka řádu i** .

Kromě desítkové soustavy se často setkáváme i se soustavou šedesátkovou, dvojkovou a příležitostně i s některými dalšími.

K důkazu toho, že nějaká vlastnost platí pro všechna přirozená čísla, se často používá tzv. axiom matematická indukce:

Axiom matematické indukce.

Nechť je množina $U \subset \mathbb{N}$ taková, že platí:

1) $1 \in U$,

2) jestliže $n \in U$, pak $(n + 1) \in U$.

Potom $U = \mathbb{N}$.



Máme-li dokázat, že všechna přirozená čísla mají vlastnost $V(n)$, pak stačí, abychom dokázali, že ji má číslo 1 a potom že má-li ji číslo n , má ji i číslo $n + 1$. Máme-li například dokázat, že pro všechna přirozená čísla platí rovnost (1.1) (viz str. 14), stačí,

abychom dokázali, že platí pro $n = 1$ a dále že platí-li pro n , pak platí i pro $n + 1$.

☛ **Příklad 3.**

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (1.1)$$

Řešení. Označme $U = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{pro } n \text{ platí (1.1)}\}$.

1. krok: $1 \in U$: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

2. krok: $n \in U \Rightarrow (n+1) \in U$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

To je právě vztah (1.1) pro $n+1$. \square

1.2.2 Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Množina celých čísel je rozšířením množiny \mathbb{N}_0 o množinu všech řešení rovnic tvaru

$$n_1 + x = n_2, \quad \text{kde } n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

1.2.3 Množina racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n}, \text{ kde } z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Množina racionálních čísel je rozšířením množiny \mathbb{Z} o množinu všech řešení rovnic tvaru

$$z_1 x = z_2, \quad \text{kde } z_1, z_2 \in \mathbb{Z}.$$

1.2.4 Množina reálných čísel

$$\mathbb{R} = \{a_0.a_1a_2 \dots a_n \dots, a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, \dots, 9\} \text{ pro } k \geq 1\},$$

kde ke každému $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ takové, že $a_n \neq 9$.

Množina reálných čísel je tedy zavedena jako množina všech desetinných rozvojų, které nejsou zakončeny samými devítkami – jinak by např. číslo 1 mělo dva různé rozvoje,

$$1.000 \dots \quad \text{a} \quad 0.999 \dots,$$

a jeho vyjádření by nebylo jednoznačné:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = 1.$$

Racionální čísla představují pouze **periodické desetinné rozvoje**, kde existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ je $a_{n+k} = a_n$ (jistá skupina čísel se neustále opakuje). Čísla, která neodpovídají periodickým desetinným rozvojem, se nazývají **iracionální čísla**.

Uspořádání na množině \mathbb{R} .

Řekneme, že reálné číslo

$$x = x_0.x_1x_2 \dots x_{n-1}x_nx_{n+1} \dots$$

je menší než reálné číslo

$$y = y_0.y_1y_2 \dots y_{n-1}y_ny_{n+1} \dots,$$

píšeme $x < y$, právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $x_k = y_k$ pro $k < n$ a $x_n < y_n$.

Chceme-li vyjádřit, že $a < b$ nebo $a = b$, píšeme $a \leq b$; je-li $a > b$ nebo $a = b$, píšeme $a \geq b$.

Reálná čísla $a > 0$ se nazývají **kladná čísla**, $a < 0$ **záporná čísla**, $a \geq 0$ **nezáporná čísla** a $a \leq 0$ **nekladná čísla**.

Vlastnosti uspořádání

➡ Pro každá dvě reálná čísla a, b platí právě jeden ze vztahů:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

➡ Pro každá tři reálná čísla a, b, c platí:

- Je-li $a < b$ a zároveň $b < c$, pak $a < c$.
- Je-li $a < b$, pak $a + c < b + c$.
- Je-li $a < b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac < bc$.

➡ Pro každá čtyři reálná čísla a, b, c, d platí:

- Je-li $a < b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac > bc$.
- Je-li $a < b$ a zároveň $c < d$, pak $a + c > b + d$.
- Je-li $0 < a < b$ a zároveň $0 < c < d$, pak $ac < bd$.
- Je-li $0 < a < b$, pak $1/a < 1/b$.

Geometrická reprezentace množiny reálných čísel

Reálná čísla jsme zvyklí znázorňovat pomocí **číselné osy**. To nám umožňuje následující tvrzení:

Tvrzení 1. *Existuje zobrazení množiny \mathbf{R} na přímku, které má tyto vlastnosti:*

- *Je vzájemně jednoznačné, tj. obrazem každého reálného čísla je právě jeden bod přímky a naopak, každý bod přímky je obrazem právě jednoho reálného čísla.*
- *Jsou-li a, b, c libovolná reálná čísla, pro která platí $a < b < c$, pak obraz čísla b leží na přímce mezi obrazy čísel a, c .*

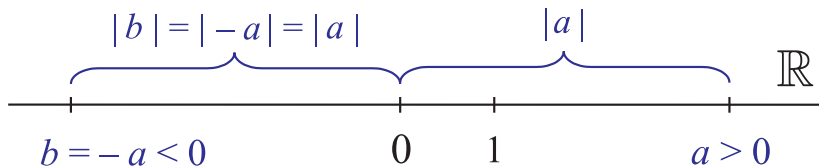
Grafické znázornění reálných čísel na číselné ose

Zvolme přímku x a na ní dva různé body, z nichž jeden prohlásíme za obraz čísla 0, označíme jej stejným symbolem a nazveme jej **počátkem**, druhý zvolíme za obraz čísla 1, označíme jej rovněž symbolem 1 a nazveme jej **jednotkovým bodem**. Přímce x se pak říká **číselná osa**; její poloha se obvykle volí vodorovná a bod 1 se na ní volí vpravo od počátku 0.

Každému reálnému číslu a se na číselné ose přiřazuje bod zvaný **obraz čísla a** , který budeme značit stejně. **Kladné číslo a** se přitom zobrazuje na polopřímce '01' tak, že vzdálenost obrazu od počátku je rovna číslu a (tj. a krát velikost jednotkové úsečky '01'), obraz **záporného čísla b** leží na polopřímce opačné k polopřímce '01' a jeho vzdálenost od počátku 0 je rovna číslu $-b$. Polopřímka '01' se proto nazývá **kladná poloosa** (obvykle je opatřena šipkou), polopřímka opačná k polopřímce '01' se nazývá **záporná poloosa**. Pro jednoduchost se o reálných číslech často hovoří přímo jako o **bodech číselné osy**.

Absolutní hodnota reálného čísla a je definována takto:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{je-li } a \geq 0, \\ -a, & \text{je-li } a < 0. \end{cases}$$



Absolutní hodnota nezáporného čísla je tedy dané číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné.

Vzdálenost reálných čísel

Uvědomme si, že pro libovolná $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

1. $|x - y| \geq 0$,
2. $|x - y| = 0 \iff x = y$,
3. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ (trojúhelníková nerovnost).

V grafickém znázornění reálných čísel na číselné ose představuje absolutní hodnota $|a|$ **vzdálenost obrazu čísla a od počátku**; $|a - b|$ pak představuje **vzdálenost obrazů čísel a, b** .

Obecně bychom mohli **vzdálenost** dvou reálných čísel zavést jako libovolnou funkci $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující podmínky 1.–3. Nebude-li však řečeno jinak, budeme vzdáleností rozumět absolutní hodnotu.

Rozšíření množiny reálných čísel o $+\infty$ a $-\infty$

Mnohdy je výhodné rozšířit množinu reálných čísel o dva symboly, $+\infty$ a $-\infty$, pro které platí: $-\infty < x < +\infty$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Takto rozšířenou množinu budeme značit jako \mathbb{R}^* a přirozeně na ni rozšíříme některé algebraické operace:

$$|\pm\infty| = +\infty, \quad \pm\infty + x = \pm\infty \text{ pro každé } x \in \mathbb{R},$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad -\infty - (-\infty) = -\infty,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ pro každé } x > 0,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ pro každé } x < 0,$$

$$\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty \text{ pro } x > 0, \quad \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty \text{ pro } x < 0,$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

Nelze definovat: $+\infty + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $0/0$, $\pm\infty/\pm\infty$.

Interval je podmnožina množiny všech reálných čísel, která se na číselné ose zobrazí jako úsečka, polopřímka nebo přímka, přičemž krajní body úsečky a počáteční bod polopřímky k ní mohou, ale nemusí patřit.

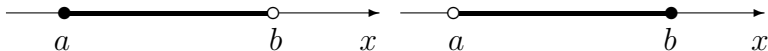
➔ **Interval omezený** (na číselné ose znázorněn **úsečkou**)

➔ **Uzavřený:** $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$



➔ **Polouzavřený:**

$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$



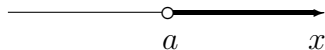
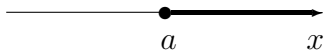
➔ **Otevřený:** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$



➔ **Neomezený** (znázorněn přímkou nebo polopřímkou)

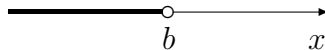
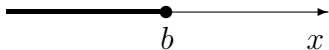
➔ **Neomezený zprava:**

$$\langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$$

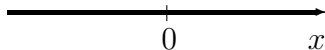


➔ **Neomezený zleva:**

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$$



➔ **Oboustranně neomezený:** $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



1.2.5 Množiny reálných čísel a jejich vlastnosti

Definice 1. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá

- **shora omezená**, jestliže existuje $H \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí nerovnost $x \leq H$;
- **zdola omezená**, jestliže existuje $D \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí nerovnost $x \geq D$;
- **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Číslo H se nazývá **horní odhad množiny** M , číslo D se nazývá **dolní odhad množiny** M .

Definice 2. Necht' $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $S \in \mathbb{R}$, pro které platí:

1. pro každé $x \in M$ je $x \leq S$,

2. pro každé $S' < S$ existuje $x \in M$ takové, že $x > S'$,

se nazývá **supremum množiny** M .

Supremum množiny je tedy její **nejmenší horní odhad**.



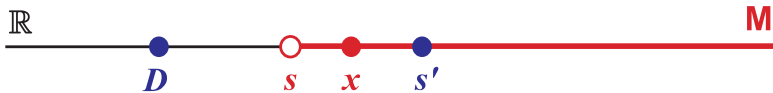
Poznámka. První podmínka říká, že S je horní odhad, druhá podmínka říká, že je ze všech horních odhadů nejmenší, tj. žádné číslo S' menší než supremum není horním odhadem. Supremum S nemusí být prvkem množiny M .

Definice 3. Necht' $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$, pro které platí

1. pro každé $x \in M$ je $x \geq s$,
2. pro každé $s' > s$ existuje $x \in M$ takové, že $x < s'$,

se nazývá **infimum množiny** M .

Infimum množiny je tedy její **nejmenší horní odhad**.



Poznámka. První podmínka říká, že s je dolní odhad, druhá podmínka říká, že je ze všech dolních odhadů největší, tj. žádné číslo s' větší než infimum není dolním odhadem. Infimum s nemusí být prvkem množiny M .

Věta o supremu a infimu v \mathbb{R}

1. Pro každou neprázdnou shora omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje právě jedno supremum $S \in \mathbb{R}$.
2. Pro každou neprázdnou zdola omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje právě jedno infimum $s \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Povšimněme si, že v množině racionálních čísel uvedená věta neplatí. Stačí uvažovat

$$M = \{q \in \mathbb{Q}; q^2 < 2\} .$$

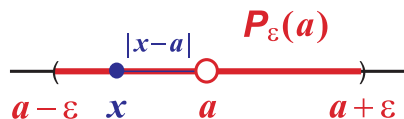
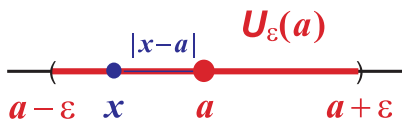
V reálném oboru by bylo supremum $\sqrt{2}$, infimum $-\sqrt{2}$, tato čísla však nejsou racionální.

Definice 4. Necht' $\varepsilon > 0$. **Okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$ se nazývá množina $U_\varepsilon(a)$ všech bodů $x \in \mathbb{R}$, jejichž vzdálenost od bodu a je menší než ε , tj.

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \varepsilon\}.$$

Definice 5. **Prstencovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$ se nazývá množina $P_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, tj.

$$P_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$



Pro $\varepsilon > 0$ definujeme **okolí bodu** $+\infty$ jako

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{+\infty\}$$

a **okolí bodu** $-\infty$ jako

$$U_\varepsilon(-\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x < -\frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{-\infty\}.$$

Prstencová okolí se definují bez bodů $\pm\infty$:

$$P_\varepsilon(+\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x > \frac{1}{\varepsilon} \right\},$$

$$P_\varepsilon(-\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x < -\frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

1.2.6 Množina \mathbb{R}^n a její podmnožiny

V druhé polovině semestru budeme pracovat s množinou uspořádaných n -tic reálných čísel, která se obvykle značí symbolem \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}, \quad (1.2)$$

tj.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ krát}}.$$

Prvky \mathbb{R}^n budeme obvykle značit tučně, tj. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

V prostoru \mathbb{R}^n se definují operace násobení reálným číslem a a sčítání vztahy

$$a\mathbf{x} = a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n),$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Jak víme z lineární algebry, množina \mathbb{R}^n s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel.

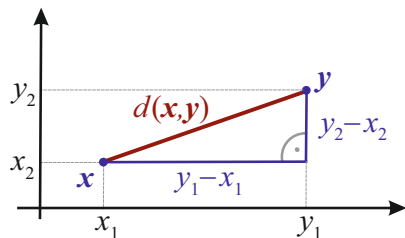
Vzdálenost dvou bodů $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujeme vztahem

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}. \quad (1.3)$$

Je to délka úsečky, jejíž koncové body jsou body x a y .

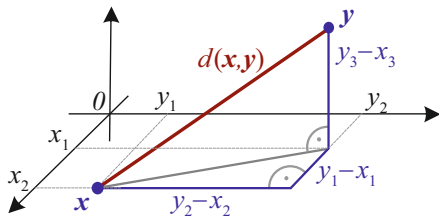
Pro \mathbb{R}^2 :

$$d^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$$



Pro \mathbb{R}^3 :

$$d^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2$$

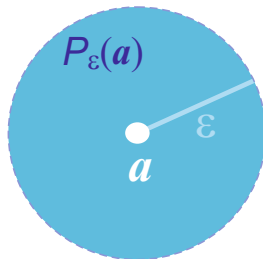
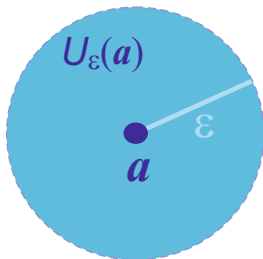


Definice 6. Necht' $\varepsilon > 0$. **Okolím bodu** $a \in \mathbb{R}^n$ se nazývá množina $U_\varepsilon(a)$ všech bodů $x \in \mathbb{R}$, jejichž vzdálenost od bodu a je menší než ε , tj.

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\}.$$

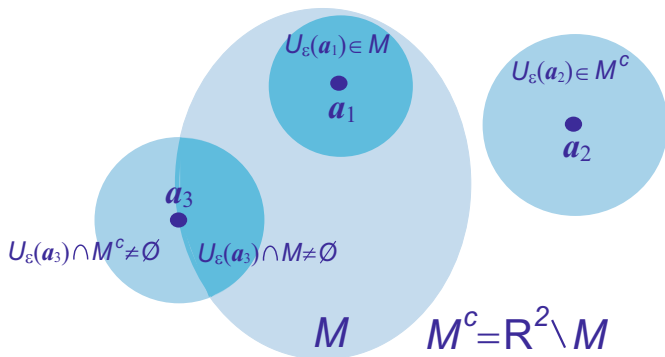
Definice 7. **Prstencovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$ se nazývá množina $P_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, tj.

$$P_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\}.$$



Definice 8. Uvažujme množinu $M \subset \mathbb{R}^n$. Bod a se nazývá

- **vnitřní bod množiny** M , existuje-li okolí $U_\varepsilon(a)$ takové, že $U_\varepsilon(a) \subset M$;
- **vnější bod množiny** M , existuje-li okolí $U_\varepsilon(a)$ takové, že $U_\varepsilon(a) \subset M^c$, kde $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$ je doplněk množiny M^c v \mathbb{R}^n ;
- **hraniční bod množiny** M jestliže pro každé jeho okolí $U_\varepsilon(a)$ je $U_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$ a $U_\varepsilon(a) \cap M^c \neq \emptyset$.



Definice 9. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá

- ➔ **otevřená** právě tehdy, když je každý její bod jejím vnitřním bodem.
- ➔ **uzavřená** právě tehdy, když je její doplněk $M^C = \mathbb{R}^n \setminus M$ otevřená množina.

☛ **Příklad 4.**

- $M = (-1, 2) \cup (3, 5)$ je otevřená množina.
- $M = \langle -1, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$ je uzavřená množina.
- $M = (-1, 2) \cup (3, 5]$ není otevřená ani uzavřená.



Definice 10. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá **vnitřek množiny** M a značí se M° .

Definice 11. Uzávěrem množiny M nazýváme doplněk ke vnitřku doplňku množiny M a značíme jej \overline{M} , tj. $\overline{M} = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus M)^\circ$.

Definice 12. Hranicí množiny M nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů a značíme ji ∂M .

☛ **Příklad 5.**

Uvažujme $M = (-1, 2) \cup (3, 5)$.

$$M^\circ = (-1, 2) \cup (3, 5) , \quad \overline{M} = \langle -1, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle , \quad \partial M = \{-1, 2, 3, 5\} .$$

Definice 13. Bod x se nazývá

- **hromadný bod** množiny M právě tehdy, když pro každé jeho prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ je $M \cap P_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.
- **izolovaný bod** množiny M právě tehdy, když existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ takové, že $M \cap P_\varepsilon(x) = \emptyset$.

☛ **Příklad 6.**

$$M = (-1, 2) \cup \{4\}$$

hromadný bod: libovolné $x \in \langle -1, 2 \rangle$

izolovaný bod: 4



Definice 14. $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je

$$d(x, \mathbf{O}) \leq K.$$

Definice 15. Uzavřená a omezená množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **kompaktní**.

1.2.7 Množina komplexních čísel

$$\mathbb{C} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá v množině \mathbb{R} řešení. Snaha o vytvoření takového oboru čísel, v němž by každá algebraická rovnice měla řešení, vedla k vytvoření množiny komplexních čísel, kterou budeme značit symbolem \mathbb{C} .

Množinu reálných čísel \mathbb{R} rozšíříme na množinu komplexních čísel \mathbb{C} takto. Nejdříve přidáme k množině \mathbb{R} číslo, které budeme značit i a které definujeme požadavkem, aby splňovalo rovnost $i^2 = -1$. Číslo i budeme nazývat **imaginární jednotkou**. Pak přidáme všechna čísla tvaru $x + iy$, kde x, y jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka. Takto utvořená čísla budeme nazývat **komplexními čísly**. Číslo x nazýváme **reálnou částí** komplexního čísla $z = x + iy$ a značíme je $\Re z$; číslo y nazýváme **imaginární částí** komplexního čísla $z = x + iy$ a značíme je $\Im z$. Komplexní číslo, jehož reálná část je rovna nule, nazýváme **ryze imaginárním číslem**. **Číslem komplexně sdruženým** ke komplexnímu

číslo $z = x + iy$ nazýváme číslo $\bar{z} = x - iy$. (Reálné části obou čísel jsou si rovny, imaginární se liší ve znaménku.)

Rovnost dvou komplexních čísel se definuje tak, že dvě komplexní čísla jsou si **rovna** právě tehdy, když se rovnají jejich reálné i jejich imaginární části.

Pro imaginární jednotku zřejmě platí rovnosti

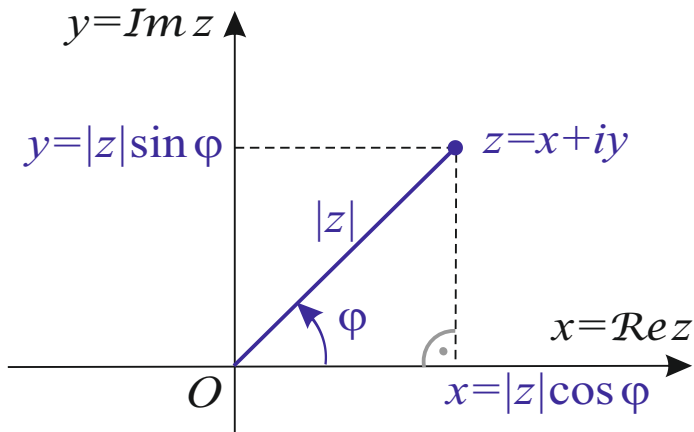
$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.4)$$

Každé komplexní číslo $z = x + iy$ je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí reálných čísel (x, y) . Tato dvojice určuje v rovině \mathbb{R}^2 s kartézskou soustavou souřadnic právě jeden bod, který má souřadnice (x, y) . Také obráceně, každé uspořádané dvojici (x, y) souřadnic nějakého bodu roviny \mathbb{R}^2 můžeme přiřadit právě jedno komplexní číslo $z = x + iy$. Dostali jsme tak vzájemně jednoznačný vztah mezi rovinou \mathbb{R}^2 a množinou komplexních čísel \mathbb{C} . Budeme proto i komplexní čísla chápat jako body v rovině a tuto rovinu budeme nazývat **rovinou komplexních čísel**, nebo také

komplexní rovinou \mathbb{C} . Přímku

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = 0\}, \quad \text{resp.} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = 0\}$$

nazýváme **reálnou**, resp. **imaginární osou** komplexní roviny \mathbb{C} .



Modul komplexního čísla

Číslo

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.5)$$

je tzv. **modul (absolutní hodnota)** komplexního čísla $z = x + iy$. Zřejmě je $|z| \in \langle 0, \infty \rangle$. Každé komplexní číslo, jehož modul je roven 1, se nazývá **komplexní jednotka**.

Hlavní hodnota argumentu

Důležitou roli v celé analýze komplexní proměnné má velikost orientovaného úhlu, který svírá kladná reálná poloosa a průvodič bodu $z \neq 0$ v komplexní rovině. Toto číslo se obvykle značí symbolem φ a zpravidla se požaduje, aby leželo v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Tento úhel φ , který je přiřazen každému nenulovému komplexnímu číslu z , nazýváme **hlavní hodnota argumentu** komplexního čísla z . Někdy se místo intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ volí interval $\langle 0, 2\pi \rangle$. Pro hlavní hodnotu φ argumentu komplexního čísla z se používá označení $\arg z$. Jelikož každému nenulovému komplexnímu číslu

z je přiřazena právě jedna hlavní hodnota argumentu $\arg z$, můžeme $\arg z$ chápat jako reálnou funkci komplexní proměnné, definovanou na množině $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, nebo také jako reálnou funkci dvou reálných proměnných. Explicitně ji můžeme definovat předpisem:

$$\arg z = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna } x < 0, y > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro všechna } x = 0, y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna } x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro všechna } x = 0, y < 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna } x < 0, y \leq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Pomocí hlavní hodnoty $\arg z$ nenulového komplexního čísla můžeme definovat nekonečně mnoho dalších hodnot argumentu tohoto čísla z , a to předpisem

$$\operatorname{Arg}_k z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Zřejmě $\text{Arg}_k z \in \langle (2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi \rangle$ a $\text{Arg}_0 z = \arg z$. Takto definované funkce $\text{Arg}_k z$, jejichž definičním oborem je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, nazýváme **jednoznačnými větvemi argumentu**. Funkce $\arg z$ se nazývá **hlavní větev argumentu**.

Zápis komplexních čísel

Každé komplexní číslo $z \neq 0$ lze zapsat právě jedním způsobem v jeho tzv. **kartézském (algebraickém) tvaru**

$$z = x + iy \quad (1.8)$$

nebo v tzv. **goniometrickém (polárním) tvaru**

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi. \quad (1.9)$$

Z goniometrického tvaru komplexního čísla z plynou rovnosti

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.10)$$

Uvedeme ještě třetí, tzv. **exponenciální tvar** komplexního čísla

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad (1.11)$$

kde komplexní funkci reálné proměnné $e^{i\varphi}$ definujeme pomocí tzv. **Eulerova vztahu**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

☛ **Příklad 7.**

Vyjádřeme komplexní číslo $z = 1 + i\sqrt{3}$ v goniometrickém a exponenciálním tvaru.

Řešení. Nejdříve vypočteme modul $|z|$ a hlavní hodnotu argumentu $\varphi = \arg z$. Podle (1.5) je $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Pro hodnotu φ podle (1.10) musí platit

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\pi \leq \varphi < \pi.$$

Odtud dostáváme $\varphi = \pi/3$. Podle (1.9) goniometrický tvar komplexního čísla z je

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Podobně podle (1.11) pro exponenciální tvar komplexního čísla z platí

$$z = 2e^{i\pi/3}.$$

Počtení operace s komplexními čísly

Nechť $z = x + iy$ a $w = u + iv$ jsou dvě komplexní čísla. Pak jejich **součet, rozdíl, součin a podíl** definujeme vztahy:

$$\begin{aligned}z + w &= (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \\z - w &= (x + iy) - (u + iv) = (x - u) + i(y - v) \\zw &= (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \\ \frac{z}{w} &= \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - xv}{u^2 + v^2} .\end{aligned} \tag{1.13}$$

Slovy můžeme operace s komplexními čísly popsat takto.

Sčítání a **odčítání** je nejvýhodnější ve tvaru kartézském. Sečteme, resp. odečteme reálné části a sečteme, resp. odečteme imaginární části.

Násobení komplexních čísel v kartézském tvaru provádíme jako násobení dvojčlenu dvojčlenem, v goniometrickém a exponenciálním tvaru se vynásobí moduly a sčítají argumenty:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi) = |w|e^{i\psi}$$

$$\begin{aligned} zw &= |z|e^{i\varphi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i\varphi}e^{i\psi} = |z||w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \\ &= |z||w|[(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)] = \end{aligned}$$

Tedy

$$zw = |z||w|[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)] = |z||w|e^{i(\varphi + \psi)}. \quad (1.14)$$

Současně jsme ukázali, že platí rovnost

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi + \psi)}. \quad (1.15)$$

Odtud indukcí pro každé přirozené n plyne

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}. \quad (1.16)$$

Dělení komplexních čísel v kartézském tvaru pro $w \neq 0$ provádíme tak, že zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli. V goniometrickém a exponenciálním tvaru se dělí moduly a argumenty se odečítají:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi) = |w|e^{i\psi},$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{|w|(\cos \psi + i \sin \psi)} = \frac{|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi - i \sin \psi)}{|w|(\cos \psi + i \sin \psi)(\cos \psi - i \sin \psi)} =$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)) = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\varphi - \psi)}. \quad (1.17)$$

Moivreova věta

Z Eulerova vztahu

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad (1.18)$$

plyne

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}); \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \quad (1.19)$$

Umocníme-li obě strany rovnosti (1.18) na číslo n , dostaneme rovnost

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n.$$

Protože $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, platí tzv. **Moivreova věta**:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad (1.20)$$

Jestliže

$$z = |z|e^{i(\varphi+2k\pi)} = |z|(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)),$$

pak pomocí Moivreovy věty dostáváme:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n} \right) \right)^n &= \\ &= |z|(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) = z \end{aligned}$$

pro $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Je tedy přirozené prohlásit každé z n čísel

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{z})_k &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n} \right), \\ k &= 0, \dots, n-1, \end{aligned} \tag{1.21}$$

za **n -tou odmocninu komplexního čísla z** . Povšimněte si, že pro $n = 2$ a reálná $z > 0$ odpovídá $(\sqrt[2]{z})_0 = (\sqrt{z})_0$ obvyklé definici druhé odmocniny v oboru reálných čísel. Podrobnější rozbor a zdůvodnění definice n -té odmocniny bude dáno ve druhé kapitole při studiu zobrazení v komplexní rovině.

• **Příklad 8.** Najděte všechna řešení algebraické rovnice $z^6 - 8 = 0$.

Řešení. Úloha je ekvivalentní s úlohou najít hodnoty všech šestých odmocnin čísla 8. Podle (1.21) je

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_k = \left(\sqrt[6]{8(\cos 0 + i \sin 0)}\right)_k = \sqrt{2} \left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

Odtud dostáváme hledané odmocniny

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_0 = \sqrt{2}(\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt{2},$$

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_1 = \sqrt{2}(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)) = \sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2),$$

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_2 = \sqrt{2}(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)) = \sqrt{2}(-1/2 + i\sqrt{3}/2),$$

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_3 = \sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\sqrt{2},$$

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_4 = \sqrt{2}(\cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3)) = -\sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2),$$

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_5 = \sqrt{2}(\cos(5\pi/3) + i \sin(5\pi/3)) = \sqrt{2}(1/2 - i\sqrt{3}/2).$$

Řešeními dané rovnice je tedy množina komplexních čísel

$$\left\{ \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$

Pro komplexní čísla platí užitečné nerovnosti, které budeme používat v dalším textu. Z definice modulu komplexního čísla plynou nerovnosti

$$-|z| \leq \Re z \leq |z|, \quad -|z| \leq \Im z \leq |z|. \quad (1.22)$$

Zřejmě platí

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1\bar{z}_2), \quad (1.23)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\Re(z_1\bar{z}_2). \quad (1.24)$$

Z nerovností (1.22) plyne $\Re(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1||\bar{z}_2|$ a z předchozích dvou nerovností plynou nerovnosti

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1.25)$$

V geometrické interpretaci představují nerovnosti (1.25) známé podmínky pro konstrukci trojúhelníka ze tří zadaných úseček: součet délek dvou stran nemůže být menší než strana třetí a velikost rozdílu délek dvou stran nemůže být větší než strana třetí.