KAPITOLA 2

POSLOUPNOSTI

2.1 Zobrazení

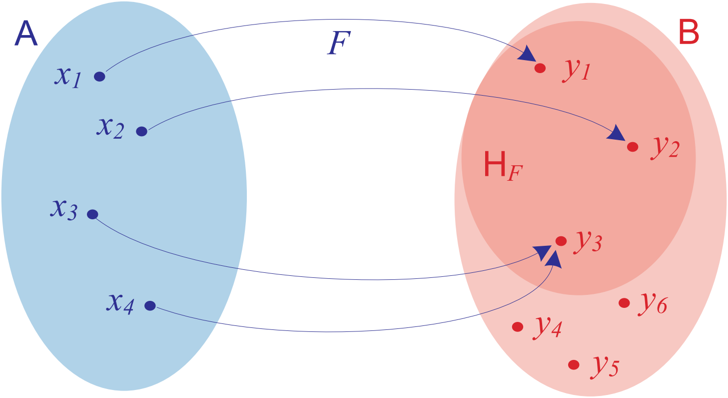
Definice 1. Uvažujme libovolné neprázdné množiny A, B. **Zobrazení množiny A do množiny B** je definováno jako množina F uspořádaných dvojic $(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, kde ke každému prvku $x \in \mathbf{A}$ existuje **právě jeden** prvek $y \in \mathbf{B}$, pro který je $(x, y) \in F$.

Prvku x se říká **vzor** prvku y, prvku y se říká **obraz** prvku x v zobrazení F; rovněž se používá vyjádření, že y je **hodnota zobrazení** F v bodě x a píše se $y = F(x)$ nebo $x \mapsto F(x)$. Množina **A** se nazývá **definiční obor zobrazení** F a označuje také symbolem $\mathbf{D}(F)$ či $\mathbf{D}_F$. Množina všech obrazů v zobrazení F se nazývá **obor hodnot zobrazení** F a označuje se $\mathbf{H}(F)$ či $\mathbf{H}_F$; platí: $\mathbf{H}(F) \subset \mathbf{B}$.

Zobrazení F tedy přiřazuje každému prvku $x \in \mathbf{A}$ právě jeden prvek $y = F(x) \in \mathbf{B}$.

Symbolicky se zobrazení F množiny **A** do množiny **B** zapisuje takto:

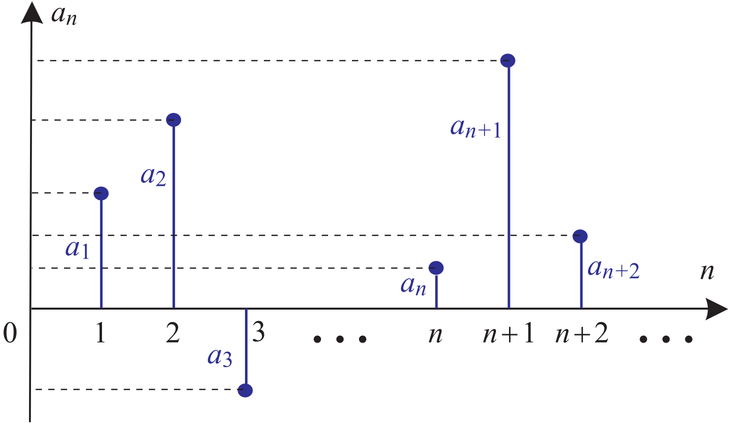
$$F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}(F) = \mathbf{A}$$



2.2 Posloupnost reálných čísel

Definice 2. Posloupností nazýváme zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$.

Posloupnost tedy přiřazuje každému $n \in \mathbb{N}$ právě jeden prvek $f(n) \in \mathbb{R}$, který se nazývá **člen posloupnosti** a obvykle se značí a_n. Celou posloupnost budeme značit (a_n). Grafem posloupnosti jsou izolované body:



☛ *Příklad 1.*

Aritmetická posloupnost je definována předpisem

$$a_1 \in \mathbb{R}\,, \qquad a_n = a_1 + (n-1)d\,,$$

kde a_1 , d jsou daná reálná čísla.

Pro členy aritmetické posloupnosti platí: $a_{n+1} - a_n = d\,.$
Číslo d se nazývá **diference aritmetické posloupnosti.**

Matematickou indukcí lze dokázat, že pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n\big(a_1 + a_n\big)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\,d\,.$$

Také lze uvažovat:

$$\begin{array}{lcccccc}
s_n & = & a_1 & +\,(a_1 + d) & +\,(a_1 + 2d) & + \cdots + & (a_1 + (n-1)d) \\
s_n & = & a_n & +\,(a_n - d) & +\,(a_n - 2d) & + \cdots + & (a_n - (n-1)d) \\
\hline
2s_n & = & (a_1 + a_n) & +(a_1 + a_n) & +\,(a_1 + a_n) & + \cdots + & (a_1 + a_n)
\end{array}$$

$$\Longrightarrow 2s_n = n(a_1 + a_n) \Longrightarrow s_n = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

☛ ***Příklad 2.***

Geometrická posloupnost je definována předpisem

$$a_1 \in \mathbb{R}\,, \qquad a_n = a_1 q^{n-1}\,,$$

kde a_1 , q jsou daná reálná čísla.

Je-li $a_1 q \neq 0$, platí mezi dvěma po sobě jdoucími členy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q\,.$$

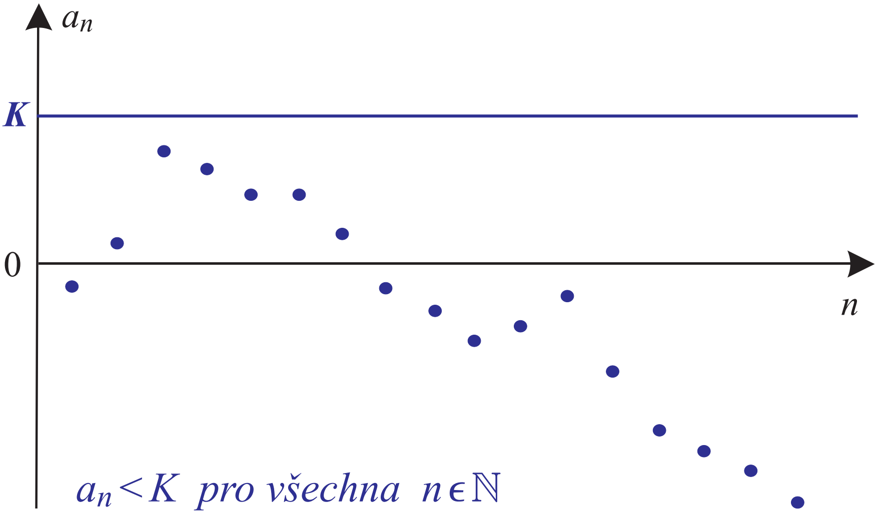
Tento poměr se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti.**

Matematickou indukcí lze dokázat, že pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti platí:

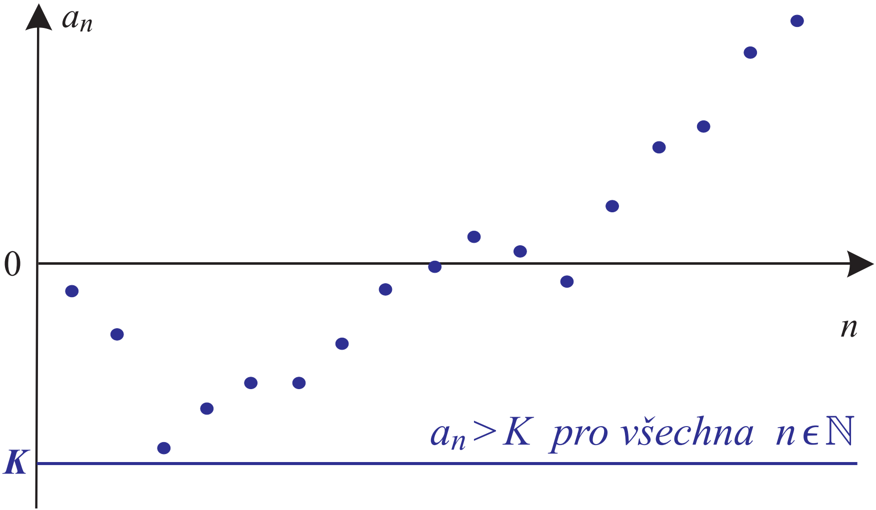
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) = \begin{cases} a_1\,\dfrac{q^n - 1}{q - 1} & \text{pro } \; q \neq 1, \\ n a_1 & \text{pro } \; q = 1. \end{cases}$$

2.2.1 Vlastnosti posloupností

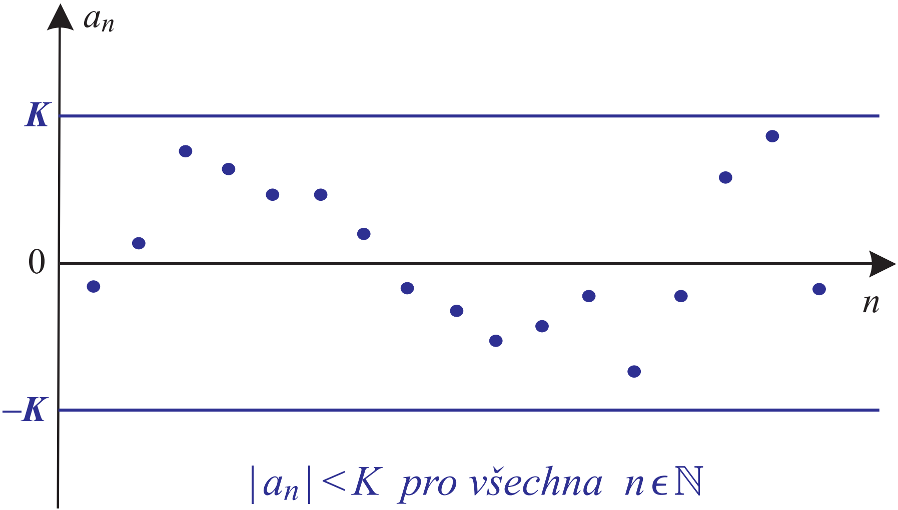
Definice 3. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **shora omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq K$.



Definice 4. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **zdola omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq K$.



Definice 5. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $|a_n| \leq K$.



☛ ***Příklad 3.***

Pro $d > 0$ je aritmetická posloupnost zdola omezená číslem a_1, ale není omezená shora, a tedy není ani omezená

☛ ***Příklad 4.***

Geometrická posloupnost $\left(a_n\right)$, kde $a_1 \neq 0$, je

➥ je omezená, je-li $|q| \leq 1$ (stačí zvolit $K = \left|a_1\right|$),
  např. hodnoty $5,\ -5 \cdot \frac{1}{2},\ 5 \cdot \frac{1}{4},\ -5 \cdot \frac{1}{8}, \ldots$ leží v $\langle -5, 5 \rangle$

➥ je omezená zdola, je-li $q > 1$ (např. hodnotou $K = \left|a_1\right|$),
  např. hodnoty $5,\ 5 \cdot 2,\ 5 \cdot 4,\ 5 \cdot 8, \ldots$ jsou větší nebo rovny 5,

➥ není omezená ani shora, ani zdola, je-li $q < -1$,
  např. hodnoty $5,\ -5 \cdot 2,\ 5 \cdot 4,\ -5 \cdot 8,\ 5 \cdot 16 \ldots$
  neboli $5,\ -10,\ 20,\ -40,\ 80, \ldots$ „utíkají“ do $+\infty$ i $-\infty$.

Definice 6. Posloupnost (a_n) se nazývá

- **rostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n < a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n > a_{n+1}$,
- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq a_{n+1}$,
- **nerostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq a_{n+1}$.

Posloupnost, která splňuje jednu z výše uvedených podmínek, se nazývá **monotónní.** Je-li rostoucí nebo klesající, nazývá se též **ryze monotónní.**

☛ ***Příklad 5.***

Nechť je dána posloupnost (a_n), kde $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Členy posloupnosti: $1\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ -\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ -\frac{1}{6}\,,\ \ldots\,.$
Posloupnost není monotonní, je omezená např. číslem 1.

Definice 7. Nechť je dána posloupnost (a_n) a rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n), tj.

$$k_n \in \mathbb{N} \qquad \text{a} \qquad k_n < k_{n+1}\,.$$

Posloupnost (b_n), pro jejíž členy platí $b_n = a_{k_n}$, nazveme **vybranou posloupností** z posloupnosti (a_n).

☛ ***Příklad 6.***

Posloupnost (b_n) definovaná vztahem

$$b_n = \frac{(-1)^{n^2+1}}{n^2}$$

je vybraná z posloupnosti (a_n), kde

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

V tomto případě je $k_n = n^2$ $(b_1 = 1 = a_1;\ b_2 = -\frac{1}{4} = a_4\ \ldots)$.

☛ ***Příklad 7.***

Posloupnost (c_n), kde $c_n = \dfrac{1}{n^2}$, není vybraná z posloupnosti (a_n), kde

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

protože neexistuje rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) tak, aby $a_{k_n} = c_n = \frac{1}{n^2}$ $\quad (c_1 = 1 = a_1;\ c_2 = \frac{1}{4}$, ale $a_4 = -\frac{1}{4})$.

☛ ***Příklad 8.***

Posloupnost (d_n), jejíž členy jsou postupně

$$1\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ -\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{7}\,,\ \frac{1}{9}\,,\ -\frac{1}{6}\,,\ \frac{1}{11}\,,\ \dots$$

také není vybranou posloupností z posloupnosti (a_n), přestože množina členů obou těchto posloupností je stejná. Lze sice najít posloupnost přirozených čísel (k_n) tak, aby $d_n = a_{k_n}$, ale tato posloupnost není rostoucí.

2.2.2 Algebraické operace

Násobení posloupnosti (a_n) **reálným číslem** $c \in \mathbb{R}$ definujeme jako posloupnost, jejíž n–tý člen je ca_n, tj. jako posloupnost

$$c(a_n) = (ca_n)\,.$$

Součet posloupností (a_n) **a** (b_n) je definován předpisem

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)\,.$$

Součin posloupností (a_n) **a** (b_n) je definován předpisem

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)\,.$$

Je-li $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je **podíl posloupností** (a_n) **a** (b_n) definován jako

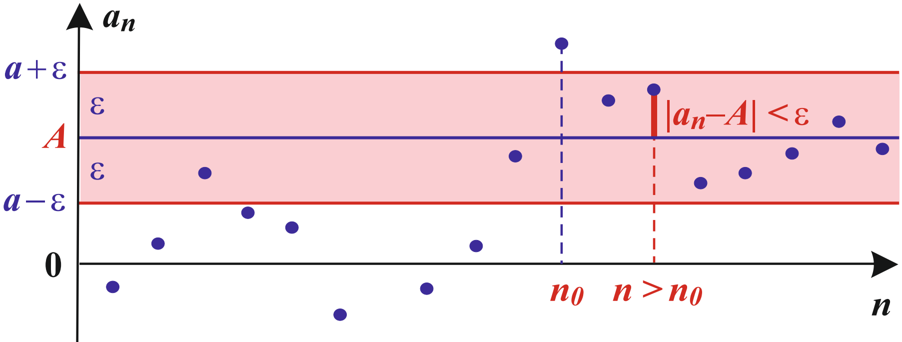
$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)\,.$$

2.2.3 Limita posloupnosti

Definice 8. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **limitu** $A \in \mathbb{R}$ (**vlastní limitu**), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ platí:

$$\left|a_n - A\right| < \varepsilon \text{ neboli } a_n \in U_\varepsilon(A).$$

Tuto skutečnost zapisujeme jako $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.



☛ ***Příklad 9.***

Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+4}{n^3+n+1} = 0$.

Řešení. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z nerovnosti

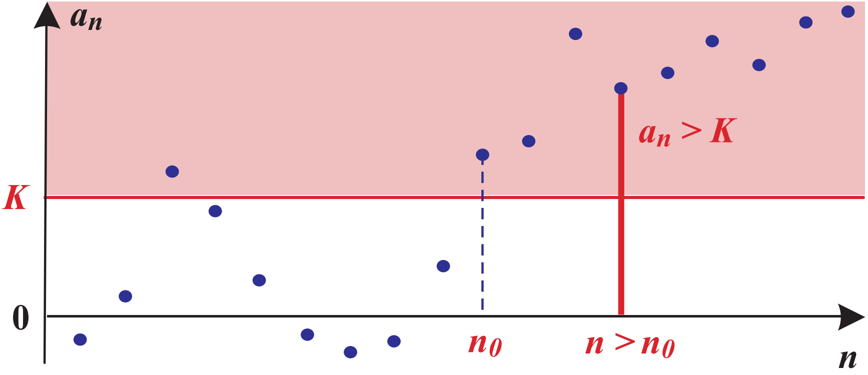
$$\frac{n+4}{n^3+n+1} < \frac{5n^2}{n^3} = \frac{5}{n}$$

plyne, že pokud zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\dfrac{5}{n_0} < \varepsilon$, bude pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, splněna nerovnost

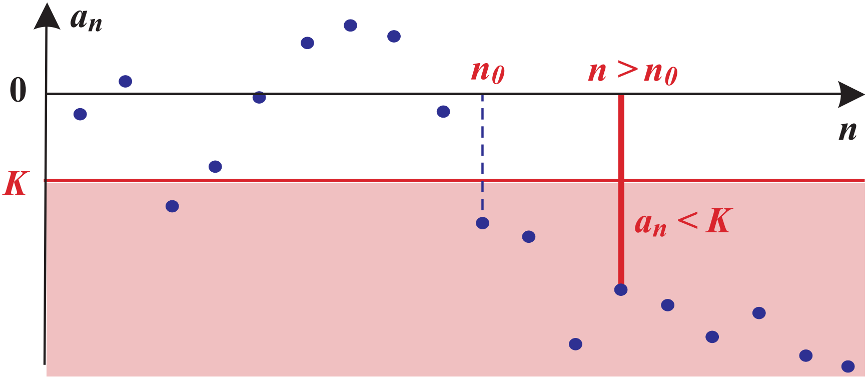
$$\left| \frac{n+4}{n^3+n+1} - 0 \right| = \frac{n+4}{n^3+n+1} < \frac{5}{n} < \frac{5}{n_0} < \varepsilon\,.$$

Tedy stačí zvolit $n_0 = \left[\dfrac{5}{\varepsilon}\right] + 1$, kde $[x]$ je tzv. celá část reálného čísla x, která je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definována jako jediné celé číslo, pro které platí nerovnosti $[x] \le x < [x] + 1$.

Definice 9. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu** $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n > K$, neboli $a_n \in U_\varepsilon(+\infty)$.



Definice 10. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu** $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n < K$, neboli $a_n \in U_\varepsilon(-\infty)$..



Předchozí tři definice lze také vyjádřit jedinou definicí využívající pojem **okolí bodu** (viz kap. 1, str. 30–31):

Definice 11. Řekneme, že posloupnost reálných čísel (a_n) má **limitu** $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže pro každé okolí $U(A)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n \in U_\varepsilon(A)$, tj.

$$\forall U(A)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: \ n > n_0 \Rightarrow a_n \in U(A).$$

Věta 1. *Posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Definice 12. Jestliže posloupnost (a_n) má vlastní limitu, nazýváme ji **konvergentní**. Jestliže posloupnost (a_n) má nevlastní limitu nebo limitu nemá, nazýváme ji **divergentní**.

Věta 2. *Nechť posloupnosti* (a_n) *a* (b_n) *konvergují,* $c \in \mathbb{R}$ *. Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$*.*

Pak konvergují také posloupnosti

$$(ca_n)\,,\ (a_n + b_n)\,,\ (a_n \cdot b_n)$$

a platí

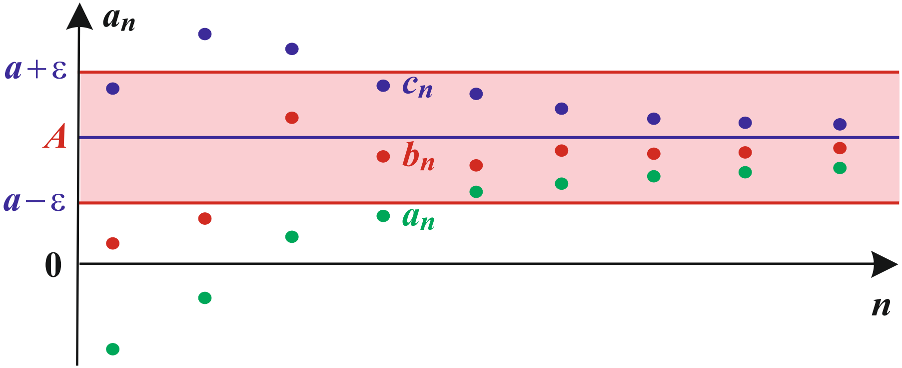
$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = cA\,, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B\,, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = AB\,.$$

Jestliže je navíc $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$*, pak konverguje i posloupnost* $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}\,.$$

Věta 3. *Jsou-li posloupnosti* (a_n) *a* (b_n) *konvergentní a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \le b_n$*, je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$*.*

Věta 4. *Nechť pro členy posloupností* (a_n), (b_n) *a* (c_n) *platí* $a_n \le b_n \le c_n$ *a existují limity* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$*. Pak existuje také limita posloupnosti* (b_n) *a platí* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$*.*



Věta 5. *Pro posloupnost* (a_n) *je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *právě tehdy, když* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Důkaz. Tvrzení je zcela zřejmé z definice limity. $\square$

Věta 6. *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a posloupnost* (b_n) *je omezená. Pak je* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

☛ ***Příklad 10.***

Najděte limitu posloupnosti $a_n = \dfrac{2^{\cos n}}{n + \sin n!}$.

Řešení: $a_n = b_n \cdot c_n$, kde $b_n = \dfrac{1}{n}$ a $c_n = \dfrac{2^{\cos n}}{1 + (\sin n!)/n}$. $\lim b_n = 0$; $|\cos n| \le 1 \Rightarrow 2^{\cos n} \le 2$; $|\sin n!| \le 1$, proto $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin n!}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{\sin n!}{n}\right) = 1$. Posloupnost (c_n) je omezená a podle předchozí věty je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta 7. *Je-li posloupnost (a_n) neklesající, resp. nerostoucí, existuje její limita (vlastní nebo nevlastní) a platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n\,, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n\,.$$

Poznámka: Tvrzení této věty lze shrnout tak, že monotonní posloupnosti mají vždy limitu, která je rovna supremu pro neklesající posloupnosti a infimu pro posloupnosti nerostoucí.

Pomocí uvedené věty lze ukázat, že platí důležité vztahy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \text{obecněji} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^k$$

☛ ***Příklad 11.***

Dokažte, že posloupnost $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ konverguje.

Označme $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$. Tato posloupnost je klesající:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \\
\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} &> \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} && \Big| \cdot \frac{n+1}{n} \\
\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} &> \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} && \Big| : \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \\
\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} &> 1 + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí díky tomu, že

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} =$$

$$= 1 + 1 \cdot (n+2) \cdot \frac{1}{n(n+2)} + 1 \cdot \binom{n+2}{2} \cdot \left(\frac{1}{n(n+2)}\right)^2 + \cdots > 1 + \frac{1}{n}\,.$$

Posloupnost (b_n) je proto klesající. Protože pro všechna přirozená n platí $b_n > 0$, je tato posloupnost omezená zdola, a má tedy vlastní limitu. Označme ji symbolem e. Protože

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

má posloupnost (a_n) stejnou limitu e, jejíž hodnota se nazývá **Eulerovo číslo:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ \ldots\ .$$

☛ ***Příklad 12.*** Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} = e^k\,.$$

Podobně jako v předchozím příkladu lze ukázat, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je posloupnost $a_n = (1+k/n)^{n+k}$ klesající a zdola omezená, a proto limita existuje.

Můžeme zvolit vybranou posloupnost $(b_m) = (a_{km}) = (1+1/m)^{km+k}$. Podle předchozího příkladu je

$$\lim_{m\to\infty}(1+1/m)^{km+k} = \left(\lim_{m\to\infty}(1+1/m)^m\right)^k \cdot \lim_{m\to\infty}(1+1/m)^k = e^k.$$

Protože limita (a_n) existuje, platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

☛ ***Příklad 13.*** Nalezněte limitu $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}$.

Řešení. Označme $a_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}$. Uvažujme posloupnost $b_m = (1+1/m)^{2m+5}$. Zřejmě $b_{3n} = a_n$, takže (a_n) vybraná posloupnost z posloupnosti (b_n). Platí

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m+5} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m} \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^{5}.$$

Protože limita prvního činitele je rovna e^2 a limita druhého je rovna 1, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5} = e^2\,.$$

Později dokážeme: Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, pak

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n} = e^{\alpha},\ \text{kde } \alpha = \lim_{n\to\infty} a_n b_n.$$

Definice 13. Posloupnost (a_n) se nazývá **cauchyovská** , jestliže splňuje **Cauchy–Bolzanovu podmínku**:
Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každá m, n, kde $m > n_0$ a $n > n_0$, platí $\left|a_m - a_n\right| < \varepsilon$.

Věta 8. *Posloupnost (a_n) konverguje právě tehdy, když je cauchyovská.*

Věta 9. *Nechť je (b_n) posloupnost vybraná z posloupnosti (a_n) a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pak je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

☛ ***Příklad 14.***

Dokažte, že $a_n = (-1)^n$ nemá limitu.

Řešení. Pro $n = 2k$ dostaneme vybranou posloupnost $b_k = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ s limitou 1, pro $n = 2k + 1$ vybranou posloupnost $b_k = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ s limitou -1.

☛ ***Příklad 15.***

Dokažte, že posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ nemá limitu.

Řešení. Pro sudá $n = 2k$ dostaneme vybranou posloupnost $b_k = a_{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}$. To je posloupnost vybraná z posloupnosti $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Proto je $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = e$. Pro lichá $n = 2k - 1$ dostaneme vybranou posloupnost

$$c_k = a_{2k-1} = \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1},$$

což je vybraná posloupnost z posloupnosti $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Protože všechny členy této posloupnosti jsou menší než 1, nemůže být její limita rovna $e > 1$. Ve skutečnosti je $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = e^{-1}$. Protože posloupnost a_n obsahuje dvě posloupnosti, které nemají stejnou limitu, neexistuje ani limita posloupnosti (a_n).

Definice 14. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **hromadným bodem** posloupnosti (a_n) právě tehdy, když existuje vybraná posloupnost (b_n) taková, že $a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

☛ ***Příklad 16.***

Pro posloupnost $a_n = (-1)^n$ jsou hromadné body 1 a -1, neboť

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (-1) = -1.$$

☛ *Příklad 17.*

Najděte všechny hromadné body posloupnosti

$$a_n = \frac{(n+1)^2 + (-1)^n n^2}{n^2+n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{3}\, n \,.$$

Řešení. $a_n = b_n \cdot c_n$, kde

$$b_n = \frac{(n+1)^2 + (-1)^n n^2}{n^2+n+1}, \qquad c_n = \cos \tfrac{2}{\pi} 3\, n \,.$$

Ani jedna z těchto posloupností nemá limitu.

$$b_{2k} = \frac{8k^2+4k+1}{4k^2+6k+1} \to 2, \qquad b_{2k-1} = \frac{4k-1}{4k^2-2k+1} \to 0 \,.$$

Protože posloupnost c_n je omezená, je $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0.$

Uvažujme
$$a_{2k} = \frac{8k^2 + 4k + 1}{4k^2 + 6k + 1} \cdot \cos \tfrac{4\pi}{3} k;$$
$\cos \frac{4\pi}{3} k$ nabývá hodnot 1 pro $k = 3m$, $-\frac{1}{2}$ pro $k = 3m \pm 1$. Tedy z posloupnosti (a_{2k}) lze vybrat posloupnosti (a_{6k}), která má limitu 2 a $(a_{6k\pm 2})$, která má limitu -1. Hromadné body posloupnosti (a_n) jsou tedy -1, 0 a 2.

☛ ***Příklad 18.***

Najděte všechny hromadné body posloupnosti
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots .$$

Řešení. Tato posloupnost obsahuje všechna racionální čísla z intervalu $(0, 1)$, tj. čísla $\dfrac{p}{q}$, kde $0 < p < q$ jsou přirozená nesoudělná čísla, a to každé dokonce nekonečně krát. Protože každé reálné číslo lze s libovolnou přesností aproximovat posloupností racionálních čísel, je množina hromadných bodů posloupnosti (a_n) celý interval $\langle 0, 1 \rangle$.

Definice 15. Nechť je M množina všech hromadných bodů posloupnosti (a_n). Číslo $S = \sup M$, resp. $s = \inf M$ se nazývá **limes superior**, resp. **limes inferior**, posloupnosti (a_n) a značí se $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, resp. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

☛ ***Příklad 19.***

V předchozích dvou příkladech jsme hledali hromadné body. Nyní můžeme doplnit:

- Pro posloupnost z příkladu 16 je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -1$.
- Pro posloupnost z příkladu 17 je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -1$.
- Pro posloupnost z příkladu 18 je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0$.

Věta 10. *Posloupnost* (a_n) *má limitu tehdy a jen tehdy, když*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \, .$$

Věta 11. *Množina* M *je kompaktní právě tehdy, pokud lze z každé posloupnosti* (a_n) *takové, že* $a_n \in M$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$*, vybrat konvergentní posloupnost, jejíž limita leží v* M*.*

2.3 Posloupnosti v $\mathbb{R}^k$

Definice 16. Posloupností v prostoru $\mathbb{R}^k$ nazýváme každé zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$.

Definice limity vypadá stejně jako definice 11 na str. 19, jen uvažujeme okolí v $\mathbb{R}^k$ (viz část 1).

Definice 17. Řekneme, že posloupnost (a_n) v prostoru $\mathbb{R}^k$ má **limitu** $A \in \mathbb{R}^k$, jestliže pro každé okolí $U(A)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n \in U_\varepsilon(A)$, tj.

$$\forall U(A)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n > n_0 \Rightarrow a_n \in U(A).$$

Má-li posloupnost (a_n) limitu, pak se nazývá **konvergentní,** jinak se nazývá **divergentní.**

Věta 12. *Posloupnost* $(\mathbf{a}_n) = \left(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)}\right)$ *v* $\mathbb{R}^k$ *konverguje právě tehdy, když konvergují všechny posloupnosti* $\left(a_n^{(i)}\right)$, *kde* $i = 1, 2, \ldots, k$. *Přitom platí:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)}\right) = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}\right),$$

právě tehdy, když pro každé $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$ *je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(i)} = A^{(i)}$.

Tato věta umožňuje jednoduché nalezení limity: stačí vypočítat limity jednotlivých složek a jestliže všechny existují a jsou konečné, „poskládáme“ z nich výslednou limitu dané posloupnosti v $\mathbb{R}^k$. Jakmile některá z nich neexistuje nebo je nevlastní, pak daná posloupnost diverguje.

☛ ***Příklad 20.***

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{3n^2+2n+3}, \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n-3}, \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} n\right)^{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}, e^4, e^{-2/\pi}\right)$$