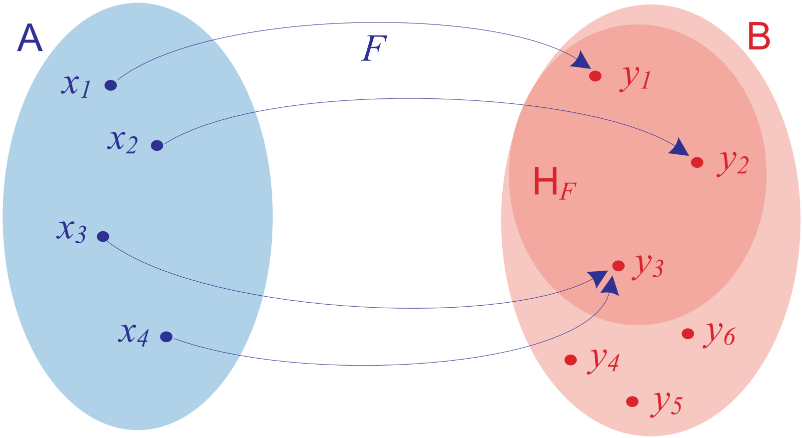
KAPITOLA 3

FUNKCE

3.1 Pojem zobrazení a funkce



Uvažujme libovolné neprázdné množiny **A**, **B**. Přiřadíme-li každému prvku $x \in$ **A** **právě jeden** prvek $y \in$ **B**, dostáváme množinu F uspořádaných dvojic $(x, y) \in$ **A** $\times$ **B**, která se nazývá **zobrazení množiny A do množiny B**.

Prvku x se říká **vzor** prvku y, prvku y se říká **obraz** prvku x v zobrazení F; rovněž se používá vyjádření, že y je **hodnota zobrazení** F v bodě x a píše se $y = F(x)$ nebo $x \mapsto F(x)$. Množina **A** se nazývá **definiční obor zobrazení** F a označuje také symbolem $\mathbf{D}(F)$ či $\mathbf{D}_F$. Množina všech obrazů v zobrazení F se nazývá **obor hodnot zobrazení** F a označuje se $\mathbf{H}(F)$ či $\mathbf{H}_F$; platí: $\mathbf{H}(F) \subset \mathbf{B}$.

Symbolicky se zobrazení F množiny **A** do množiny **B** zapisuje takto:

$$F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}(F) = \mathbf{A}$$

Speciální případy zobrazení F množiny A do množiny B

- **Zobrazení v množině A** nebo **zobrazení množiny A do sebe** je zobrazení F, kde **A** $=$ **B**.

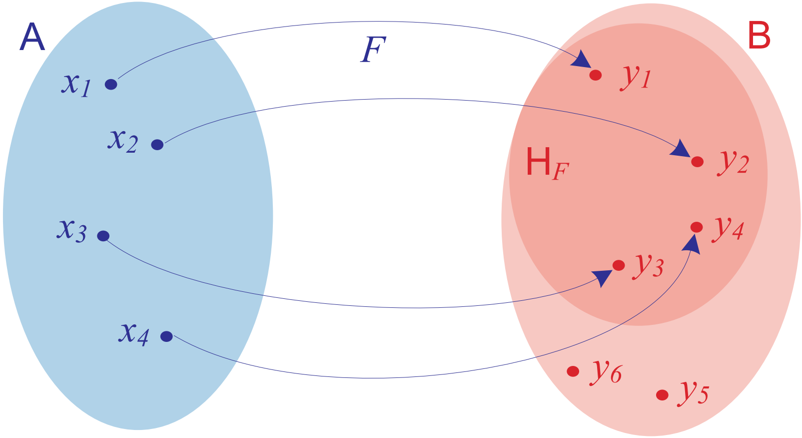
  Sem patří:

  - **Reálná funkce jedné reálné proměnné** je zobrazení v množině všech reálných čísel **R**, tj.

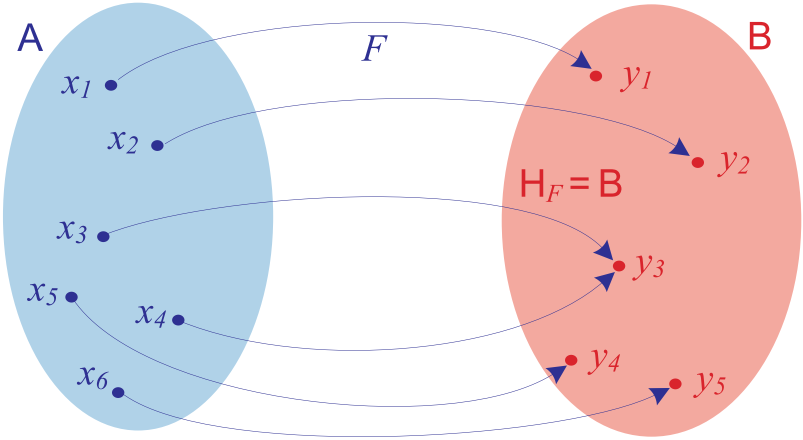
    $$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbb{R}.$$

  - **Geometrická zobrazení v rovině a v prostoru**, kde **A**, **B** jsou množiny bodů v téže rovině, popř. v prostoru.

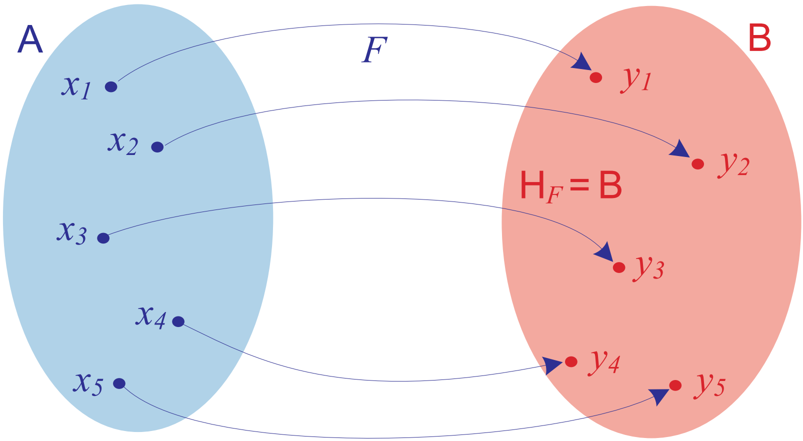
➥ **Prosté zobrazení** je takové zobrazení F, ve kterém je každý prvek $y \in \mathbf{H}(F)$ obrazem **právě jednoho** prvku $x \in \mathbf{A} = \mathbf{D}(F)$, neboli **každé dva různé vzory** x_1, x_2 **mají také různé obrazy** $F(x_1), F(x_2)$.



➥ **Zobrazení množiny A na množinu B** je takové zobrazení F, ve kterém je každý prvek množiny **B** obrazem aspoň jednoho prvku množiny **A**, tj. $\mathbf{B} = \mathbf{H}(F)$.

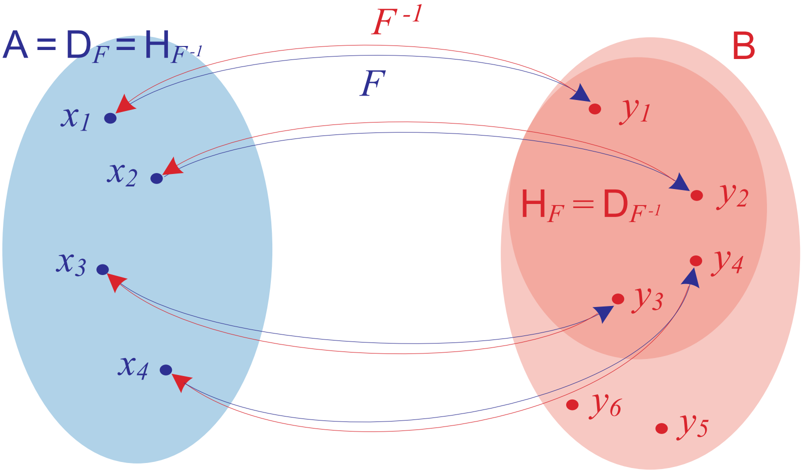


➥ **Vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami A, B** je **prosté zobrazení množiny A na množinu B**.

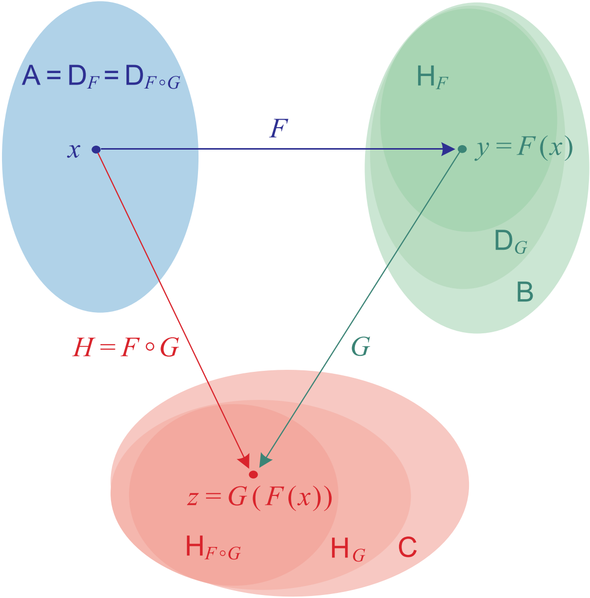


Je-li dané zobrazení F **prosté**, pak k němu existuje právě jedno prosté zobrazení, které ke každému prvku $y \in \mathbf{H}(F)$ přiřazuje jeho vzor $x \in \mathbf{D}(F)$; toto zobrazení se nazývá **inverzní zobrazení k zobrazení** F a značí se symbolem F^{-1}. Platí: $\mathbf{D}(F^{-1}) = \mathbf{H}(F)$, $\mathbf{H}(F^{-1}) = \mathbf{D}(F)$,

$$x = F^{-1}(y) \text{ právě když } y = F(x)$$



Nechť G a F jsou dvě zobrazení, pro která je $\mathbf{H}_F \subset \mathbf{D}_G$. Zobrazení H se nazývá **kompozicí zobrazení F a G**, je-li $H(x) = G(F(x))$ pro všechna $x \in \mathbf{D}_F$. Kompozice zobrazení F a G (v tomto pořadí) se symbolicky zapisuje $H = F \circ G$.



3.2 Reálná funkce jedné reálné proměnné

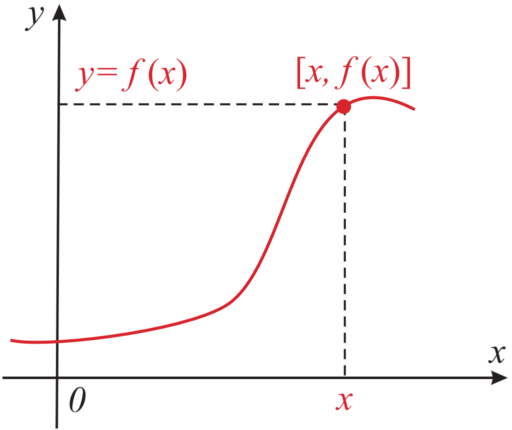
Jak je uvedeno v předchozí části, **reálnou funkcí jedné reálné proměnné** se rozumí zobrazení v množině všech reálných čísel **R**; reálnou funkci budeme zpravidla značit f, vzor x se nazývá **proměnná** nebo **argument funkce** f, obraz y se nazývá **funkční hodnota** nebo **hodnota funkce** f v bodě x a značí se $f(x)$.

Názornou představu o vlastnostech funkce poskytuje její **grafické vyjádření** neboli **graf funkce**, který sestrojíme takto:

V rovině zvolíme pravoúhlou soustavu souřadnic s počátkem O a osami x, y. Pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ přiřadíme v této rovině každé uspořádané dvojici reálných čísel $[x, f(x)]$ bod, který má (v uvedeném pořadí) souřadnice $(x, f(x))$. Množina všech takových bodů roviny se nazývá **graf funkce** f :

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbf{D}(f),\ y = f(x)\}$$

Obsahuje-li definiční obor $\mathbf{D}(f)$ konečný počet hodnot argumentu x, můžeme sestrojit celý graf přesně, bod po bodu. Obsahuje-li však definiční obor dané funkce nekonečně mnoho hodnot, je nutné graf přibližně dokreslit. Ke správnému nakreslení grafu jsou nezbytné znalosti různých vlastností funkce. Proto se v následujícím podíváme na základní elementární funkce a u každé z nich si připomeneme její **analytické zadání**, tj. **vzorec** či rovnici tvaru $y = f(x)$, kde $f(x)$ je výraz s proměnnou x, a příslušné **grafické zobrazení**.



3.2.1 Vlastnosti a druhy funkcí

Některé funkce mají určité společné vlastnosti, podle kterých je nazýváme. Nejdůležitější z nich jsou následující:

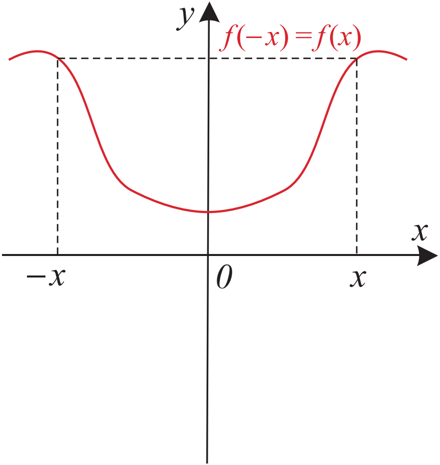
Funkce sudé a liché

Definice 1. Nechť má funkce f takovou vlastnost, že pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je také $-x \in \mathbf{D}(f)$

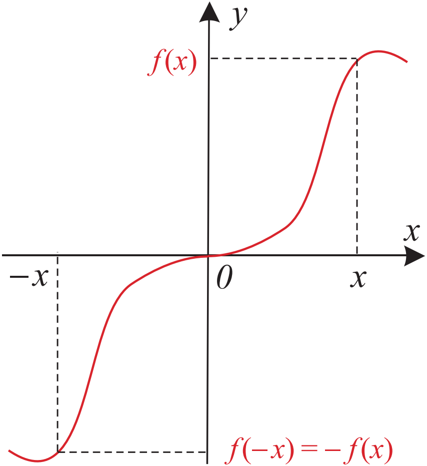
- Funkce f se nazývá **sudá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je $f(-x) = f(x)$.
- Funkce f se nazývá **lichá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

Funkce samozřejmě nemusí splňovat ani jednu z podmínek, tedy nemusí být ani sudá, ani lichá.

Funkce sudá:

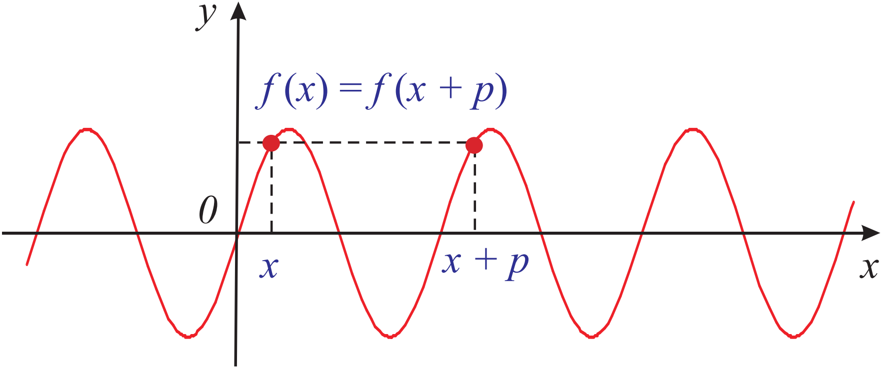


Funkce lichá:



Funkce periodické

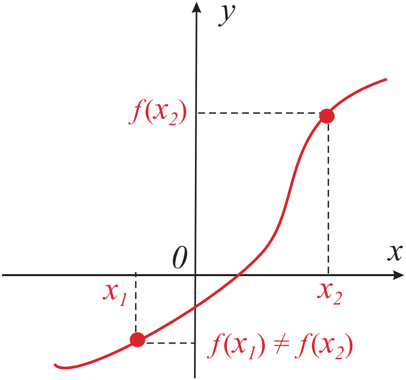
Definice 2. Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in$ **D**(f) je také $x \pm p \in$ **D**(f) a platí: $f(x \pm p) = f(x)$.



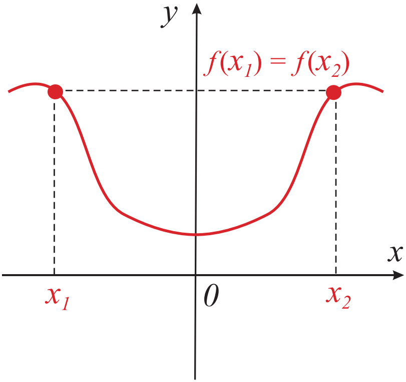
Funkce prosté a funkce k nim inverzní

Protože funkce je speciálním případem zobrazení, použije se pro ni stejná definice jako pro prosté zobrazení a zobrazení k němu inverzní.

Definice 3. Funkce f se nazývá **prostá,** jestliže pro každé dva různé body $x_1\,, x_2 \in \mathbf{D}_f\,,\ x_1 \neq x_2$, je také $f(x_1) \neq f(x_2)$.



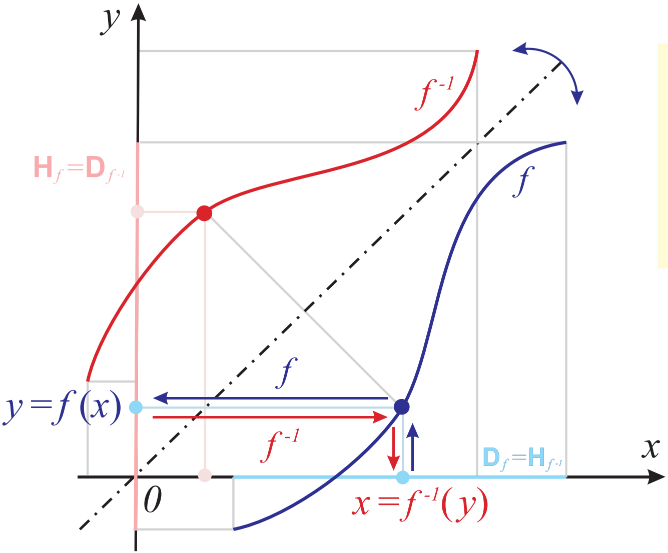
Funkce prostá



Funkce, která není prostá

Definice 4. Je-li funkce f prostá, pak se **inverzní funkcí** f^{-1} nazývá funkce, která každému prvku $y \in \mathbf{H}_f$ přiřazuje jeho vzor $x \in \mathbf{D}_f$:

$$x = f^{-1}(y) \text{ právě když } y = f(x).$$



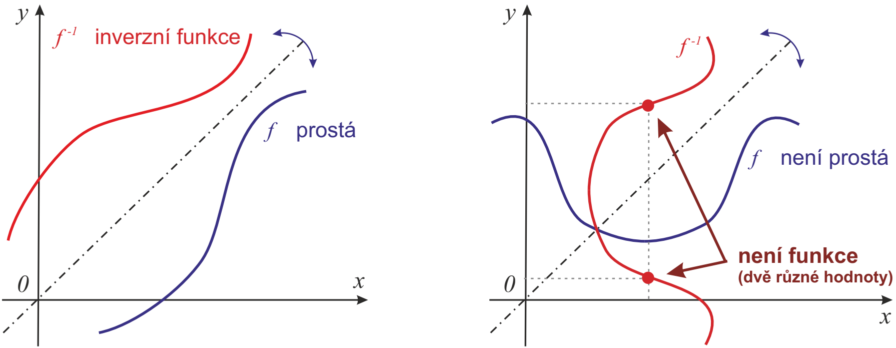
platí:

$\mathbf{D}_f = \mathbf{H}_{f^{-1}}$

$\mathbf{H}_f = \mathbf{D}_{f^{-1}}$

Při sestrojování grafu inverzní funkce pak vyneseme proměnou jako obvykle na osu x a hodnoty na osu y – oproti grafu původní funkce si tak souřadnicové osy „vymění role“; graf inverzní proto bude symetrický s grafem původní funkce f v osové souměrnosti podle osy prvního a třetího kvadrantu.

Uvědomme, že inverzní funkce existuje jen pro funkci prostou – pro funkci, která není prostá, nebude křivka vzniklá osovou somě rností grafem funkce:

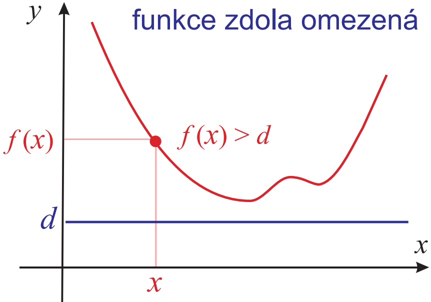


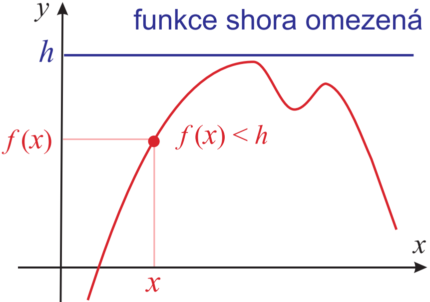
Funkce omezené, zdola omezené, shora omezené

Definice 5. Uvažujme funkci f a podmnožinu $\mathbf{M} \subset \mathbf{D}_f$.

- Funkce f se nazývá **zdola omezená na množině M**, existuje-li $d \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in \mathbf{M}$ je $f(x) \geq d$.
- Funkce f se nazývá **shora omezená na množině M**, existuje-li $h \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in \mathbf{M}$ je $f(x) \leq h$.
- Funkce f se nazývá **omezená na množině M**, je-li omezená zdola i shora na **M**.

Je-li $\mathbf{M} = D_f$, řekneme, že **funkce je omezená (zdola, shora).**





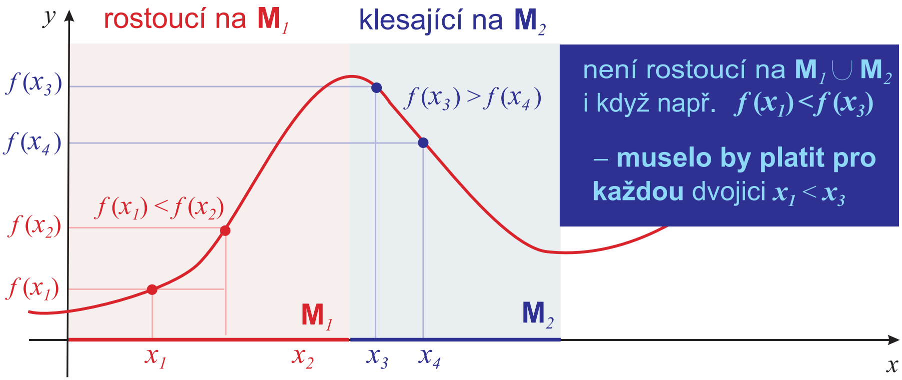
Funkce monotónní

Definice 6. Uvažujme funkci f a podmnožinu $\mathbf{M} \subset \mathbf{D}(f)$.

Funkce f se nazývá

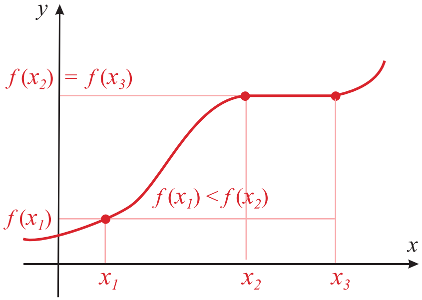
- **rostoucí na množině M**, právě když pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
- **klesající na množině M**, právě když pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.
- **neklesající na množině M**, právě když pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **nerostoucí na množině M**, právě když pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají **ryze monotónní** (na dané množině); neklesající a nerostoucí se souhrnně nazývají **monotónní** (na dané množině).

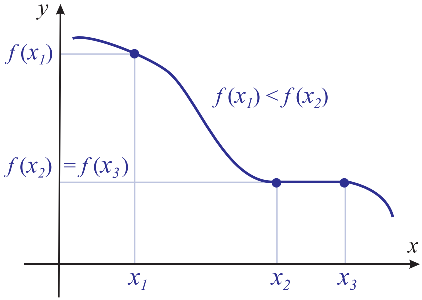


není rostoucí na $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$
i když např. $f(x_1) < f(x_3)$

– **muselo by platit pro každou** dvojici $x_1 < x_3$



neklesající



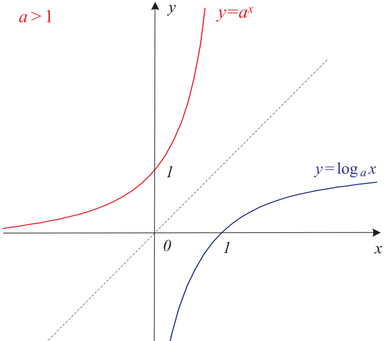
nerostoucí

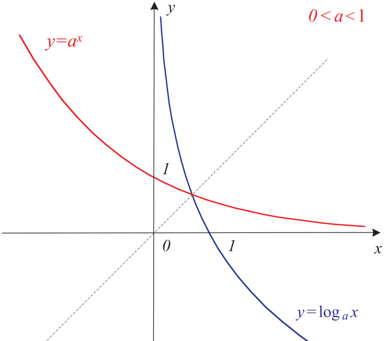
Snadno si můžeme rozmyslet, že je-li funkce pouze rostoucí nebo pouze klesající na dané množině, pak nemůže stejné hodnoty nabývat ve dvou různých bodech, a je tedy prostá:

Věta 1. Je-li funkce f ryze monotónní na množině M, pak je na této množině prostá.

Dále platí:

Věta 2. Nechť je funkce $f : X \to Y$ **rostoucí (klesající)** funkce zobrazující množinu X na Y. Pak je její inverzní funkce $f^{-1} : Y \to X$ také **rostoucí (klesající)**.





Lokální extrémy

Definice 7. Řekneme, že funkce f má bodě $x_0 \in \mathbf{D}(f)$

- **ostré lokální maximum**, jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí:

$$f(x_0) > f(x)\,,$$

- **ostré lokální minimum**, jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí:

$$f(x_0) < f(x)\,,$$

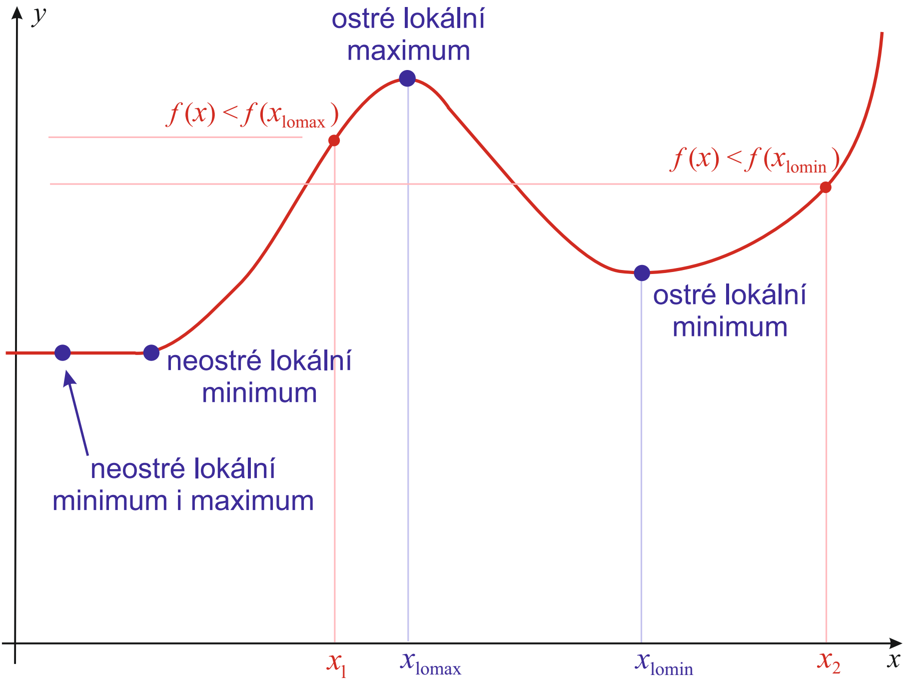
- **neostré lokální maximum**, jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí:

$$f(x_0) \geq f(x)\,,$$

- **neostré lokální minimum**, jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí:

$$f(x_0) \leq f(x)\,.$$

Lokální maxima a minima se také nazývají **lokální extrémy.**



y
ostré lokální
maximum
$f(x) < f(x_{lomax})$
$f(x) < f(x_{lomin})$
ostré lokální
minimum
neostré lokální
minimum
neostré lokální
minimum i maximum
x_1
x_{lomax}
x_{lomin}
x_2
x

Globální extrémy

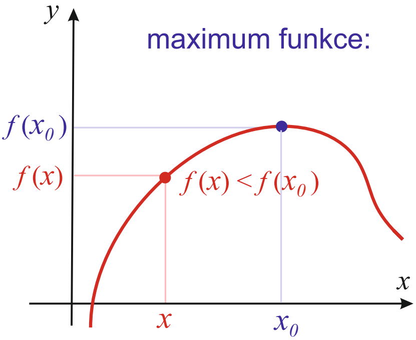
Definice 8. Řekneme, že funkce f má bodě $x_0 \in \mathbf{M} \subset \mathbf{D}(f)$

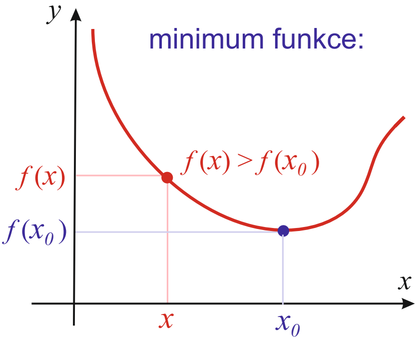
- **ostré globální maximum na množině M,** jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí: $f(x_0) > f(x)$,
- **ostré globální minimum na množině M,** jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí: $f(x_0) < f(x)$,
- **neostré globální maximum na množině M,** jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí: $f(x_0) \geq f(x)$,
- **neostré globální minimum na množině M,** jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí: $f(x_0) \leq f(x)$.

Globální maxima a minima se také nazývají **globální extrémy.**

Neostré globální maximum (minimum) funkce f na množině **M** se také nazývá krátce **maximum (minimum) funkce f na množině M**.

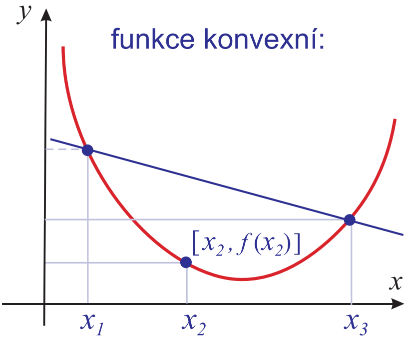
Je-li $\mathbf{M} = \mathbf{D}_f$, hovoříme krátce o **maximu (minimu) funkce f**.

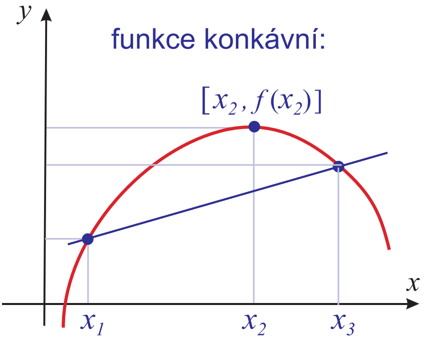




Definice 9. Nechť je $I \subset \mathbb{R}$ interval, $f : I \to \mathbb{R}$. Jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, kde $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $A = [x_2, y]$ přímky procházející body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_3; f(x_3)]$

- ➥ nad bodem grafu funkce $[x_2, f(x)]$, nazývá se funkce f **konvexní na intervalu** I,
- ➥ pod bodem grafu funkce $[x_2, f(x)]$, nazývá se funkce f **konkávní na intervalu** I.

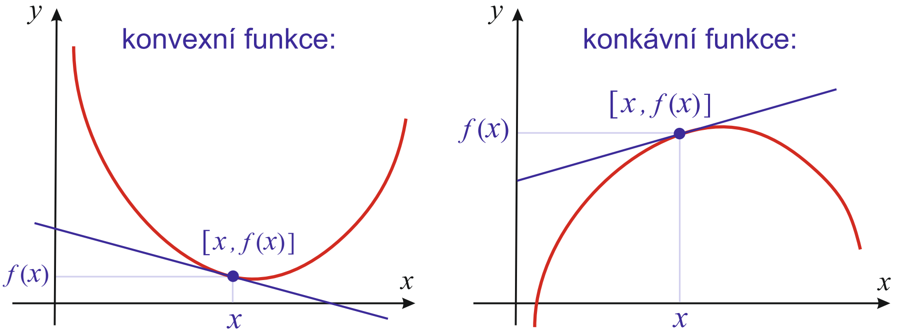




Jinak také můžeme říci, že funkce f je

- **konvexní na intervalu** I, jestliže graf funkce f na intervalu I leží **nad tečnou sestrojenou v libovolném bodě** $x \in I$,

- **konkávní na intervalu** I, jestliže graf funkce f na intervalu I leží **pod tečnou sestrojenou v libovolném bodě** $x \in I$.

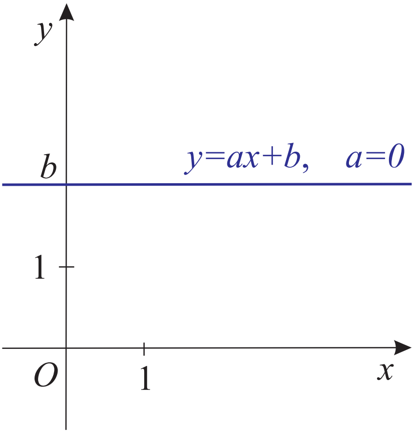


3.2.2 Základní elementární funkce

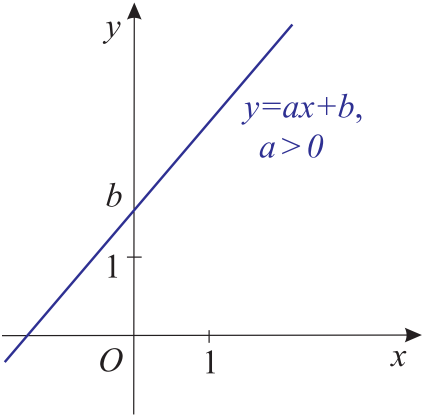
Lineární funkce

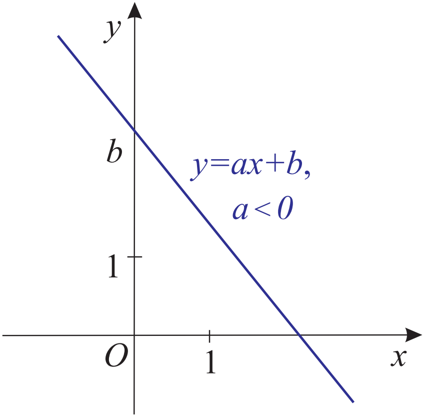
Lineární funkcí nazýváme každou funkci

$$f:\ y = ax + b, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}. \tag{3.1}$$



$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathbf{H}(f) = \{b\}$, nerostoucí a neklesající, není prostá





$\textbf{D}(f) = \mathbb{R}, \; \textbf{H}(f) = \mathbb{R}$

není ani shora, ani zdola omezená

rostoucí	klesající
prostá	prostá

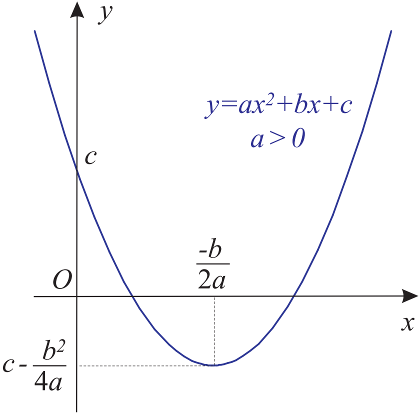
Kvadratická funkce

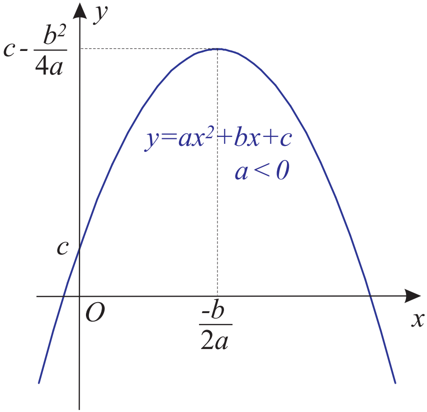
Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci

$$f: \; y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Grafem každé kvadratické funkce je **parabola**, která je souměrná podle osy o rovnoběžné s osou y.

Průsečíku osy paraboly s parabolou se říká **vrchol paraboly** a přímce kolmé k ose paraboly, procházející jejím vrcholem, se říká **vrcholová tečna paraboly**.





$\mathbf{D}(f)=\mathbb{R},\ \mathbf{H}(f)=\left\langle c-\frac{b^2}{4a},+\infty\right)$

zdola omezená, není shora omezená

klesající v $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right\rangle$

rostoucí v $\left\langle-\frac{b}{2a},+\infty\right)$

$\mathbf{D}(f)=\mathbb{R},\ \mathbf{H}(f)=\left(-\infty,c-\frac{b^2}{4a}\right\rangle$

shora omezená, není zdola omezená

rostoucí v $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right\rangle$

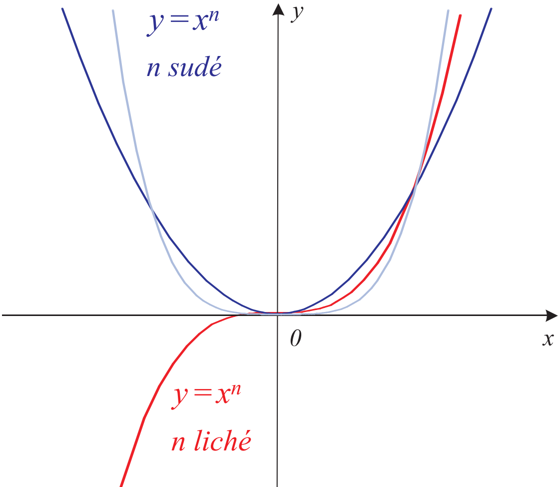
klesající v $\left\langle-\frac{b}{2a},+\infty\right)$

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem je funkce

$$f: \ y = x^n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Je-li speciálně $n = 1$, je f lineární funkce; je-li $n = 2$ je to funkce kvadratická. Pro $n > 1$ je grafem **parabola n-tého stupně**.



Pomocí algebraických operací násobení číslem a sčítaní funkcí $f(x) = x^n$ získáme *polynomy*.

Polynomem nazýváme funkci $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \; a_i \in \mathbb{R}.$$

Není-li polynom identicky roven nule, existuje největší n takové, že $a_n \neq 0$. Toto n nazýváme **stupeň** polynomu. V dalším budeme předpokládat, že je polynom $P(x)$ nenulový a že má stupeň n.
Nulovým bodem neboli **kořenem** polynomu P se rozumí bod $x_0 \in \mathbb{R}$, pro který

$$P\big(x_0\big) = 0.$$

Je-li x_1 nulový bod polynomu $P(x)$ stupně n, ze psát

$$P(x) = (x - x_1) P_1(x),$$

kde $P_1(x)$ je polynom stupně $(n-1)$. Má-li polynom $P_1(x)$ kořen x_2, je $P_1(x) = (x - x_2) P_2(x)$, a tedy

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) P_2(x),$$

kde $P_2(x)$ je polynom stupně $(n-2)$. Jestliže pokračujeme uvedeným postupem dostaneme nulové body x_1, x_2, . . . , x_N, z nichž se některé mohou vyskytovat vícekrát. Polynom $P(x)$ lze pak zapsat ve tvaru

$$P(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} P_N(x),$$

kde x_1, . . . , x_r jsou navzájem různé kořeny polynomu $P(x)$, přirozená čísla k_i se nazývají *násobnost kořene* x_i a platí pro ně $N = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$, a $P_N(x)$ je polynom stupně $(n - N)$, který nemá reálné kořeny.

Obecně lze libovolný polynom stupně n zapsat ve tvaru

$$P(x) = a_n\left(x - x_1\right)^{k_1}\left(x - x_2\right)^{k_2} \dots \left(x - x_r\right)^{k_r}\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{m_1} \\ \left(x^2 + p_2x + q_2\right)^{m_2} \dots \left(x^2 + p_sx + q_s\right)^{m_s},$$

kde polynomy $x^2 + p_ix + q_i$ nemají reálný kořen a

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r + 2m_1 + \cdots + 2m_s = n.$$

Lineární lomené funkce jsou funkce tvaru

$$f: \ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{kde} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Je-li $c = 0$, jedná se o lineární funkci. Proto budeme dále předpokládat, že $c \neq 0$. Protože rovnost $cx + d = 0$ platí pouze pro $x = -\frac{d}{c}$, je definiční obor lineární lomené funkce $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Lineární lomenou funkci lze upravit na tvar

$$f(x) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\,\frac{1}{x+d/c}\ .$$

Tedy pro $ad - bc = 0$ je tato funkce rovna konstantní funkci. Proto budeme navíc předpokládat, že $ad - bc \neq 0$. Obecnou lineární lomenou funkci lze získat také složením tří jednodušších funkcí $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde f_1 je lineární funkce $f_1(x) = x + \frac{d}{c}$, funkce $f_2 = \frac{1}{x}$ a funkce f_3 je opět lineární funkce $f_3(x) = -\frac{ad-bc}{c^2}x + \frac{a}{c}$. Z těchto funkcí jsme podrobněji nepopsali pouze funkci $f_2(x) =$

$\frac{1}{x}$. Tato funkce vyjadřuje vztah nepřímé úměry mezi x a y. Je definována na intervalech $(-\infty, 0)$, kde je klesající a na intervalu $(0, +\infty)$ kde je také klesající. Ale je třeba upozornit, že tato funkce není klesající na celém svém definičním oboru. Funkce je lichá a její graf je rovnoosá *hyperbola* se středem v počátku, jejíž asymptoty jsou souřadnicové osy.

Je-li $ad - bc > 0$ je obecná lineární lomená funkce $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ klesající na intervalech $(-\infty, -d/c)$ a $(d/c, +\infty)$. Je-li $ad - bc < 0$ je funkce na těchto intervalech rostoucí. Grafem je hyperbola se středem v bodě $\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$, jejíž asymptoty jsou přímky $x = -\frac{d}{c}$ a $y = \frac{a}{c}$. Graf funkce protíná osu Ox v bodě $x = -\frac{b}{a}$ a osu Ox v bodě $y = \frac{b}{d}$.

Lineární lomená funkce $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ je prostá a její inverzní funkce je opět lineární lomená funkce $y = \frac{dx - b}{-cx + a}$.

Racionální funkce jsou funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \ ,$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy.

Označíme-li X_0 množinu všech reálných nulových bodů polynomu $Q(x)$, je definiční obor $D_f = \mathbb{R} \setminus X_0$.

Je-li stupeň polynomu $P(x)$, n, větší nebo roven stupni m polynomu $Q(x)$, lze dělením zjistit, že tuto funkci je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $P_1(x)$ je polynom stupně $(n - m)$ a stupeň polynomu $Q(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$.

Funkci $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde je stupeň polynomu$P(x)$ menší než stupeň polynomu $Q(x)$, lze zapsat jako součet jednodušších racionálních funkcí. Předpokládejme, že

$$q(x) = \left(x - x_1\right)^{k_1}\left(x - x_2\right)^{k_2} \cdots$$
$$\cdots \left(x - x_r\right)^{k_r}\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{m_1} \ldots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{m_s},$$

kde dvojčleny $x^2 + p_i x + q_i$ nemají reálné kořeny, tj. platí $p_i^2 - 4q_i < 0$. Pak lze racionální funkci $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ psát ve tvaru:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{\left(x - x_1\right)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{\left(x - x_1\right)^{k_1}} +$$
$$+ \frac{A_{21}}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_{2k_2}}{\left(x - x_2\right)^{k_2}} + \cdots + \frac{A_{r1}}{x - x_r} + \cdots + \frac{A_{rk_r}}{\left(x - x_r\right)^{k_r}}$$
$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^2} + \cdots + \frac{B_{1m_1}x + C_{1m_1}}{\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{m_1}}$$
$$+ \cdots +$$
$$+ \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + p_s x + q_s} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{\left(x^2 + p_s x + q_s\right)^2} + \cdots + \frac{B_{sm_s}x + C_{sm_s}}{\left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{m_s}}$$

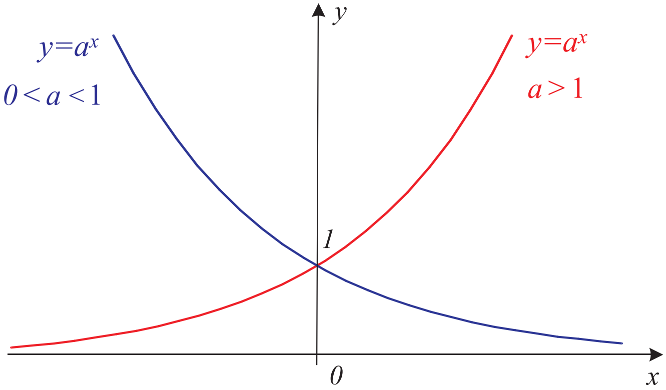
Tomuto zápisu se říká **rozklad na parciální zlomky**.

Exponenciální funkce o základu *a*

Exponenciální funkce o základu *a* je funkce

$$f:\ y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

Je-li základ $a > 1$, je funkce a^x rostoucí v $\mathbb{R}$, je-li $0 < a < 1$, je klesající v $\mathbb{R}$; v obou případech je prostá v celém definičním oboru.



Logaritmická funkce o základu *a*

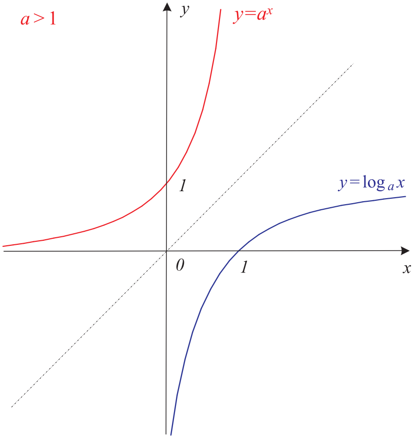
Logaritmická funkce o základu *a* je zavedena jako funkce **inverzní k exponenciální funkci o témže základu** a. Symbolicky se zapisuje takto:

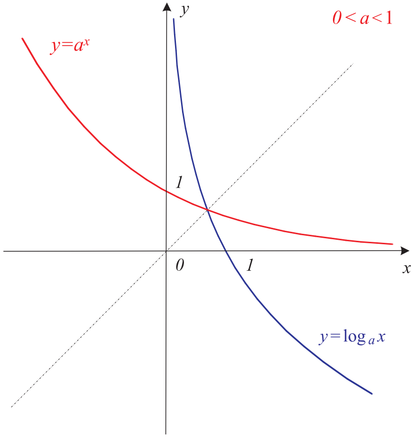
$$f:\ y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad D(f) = (0, +\infty),$$

přičemž podle definice pro každé $x \in (0, +\infty),\ y \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$ platí:

$$y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ x = a^y$$

Je-li základ $a > 1$, je funkce $\log_a x$ rostoucí v $\mathbb{R}$, je-li $0 < a < 1$, je klesající v $\mathbb{R}$; v obou případech je prostá v celém definičním oboru.


$a>1$
y
$y=a^x$
1
$y=\log_a x$
0
1
x


y
$0<a<1$
$y=a^x$
1
0
1
x
$y=\log_a x$

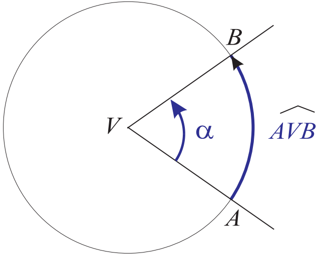
Goniometrické funkce

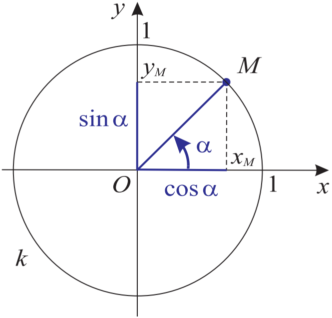
Připomeňme si nejprve pojem **orientovaného úhlu** a jeho **velikosti**. Orientovaným úhlem se rozumí uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem. První z této dvojice se nazývá **počátečním ramenem orientovaného úhlu**, druhá **koncovým ramenem orientovaného úhlu**; společný počátek obou polopřímek se nazývá **vrchol orientovaného úhlu**. Pro orientovaný úhel se používá označení $\widehat{AVB}$. **Velikostí orientovaného úhlu** $\widehat{AVB}$ se nazývá každé z reálných čísel $\alpha+2k\pi$ (v obloukové míře), resp. $\alpha + k \cdot 360°$ (v míře stupňové), kde $k \in \mathbb{Z}$ a α se určí takto:

a) Je-li $VA = VB$, je $\alpha = 0$,

b) Je-li $VA \neq VB$, je α velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v **kladném smyslu**, tj. proti směru hodinových ručiček.

Je tedy $0 \leq \alpha < 2\pi$, resp. $0° \leq \alpha < 360°$; této velikosti se říká **základní velikost orientovaného úhlu.**





Zvolme kartézskou soustavu souřadnic Oxy. Ke každému reálnému číslu α lze přiřadit právě jeden orientovaný úhel velikosti α (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je polopřímka OI, kde I je obraz čísla 1 na ose x (místo I budeme v grafu psát přímo číslo 1); říká se mu **orientovaný úhel v základní poloze**. Sestrojíme jednotkovou kružnici k (tj. kružnici o poloměru 1) se středem O, její průsečík s koncovým ramenem orientovaného úhlu α v základní poloze označíme M.

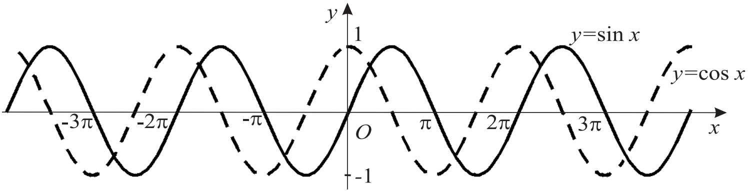
Definujeme

Druhou souřadnici bodu M jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze nazýváme **sinus úhlu** α a jeho první souřadnici nazýváme **kosinus úhlu** α; značíme je $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

$$\sin\alpha = y_M, \qquad \cos\alpha = x_M \qquad \text{pro každé } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Těmito vztahy je každému reálnému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $\sin x$ a právě jedno reálné číslo $\cos x$, tj. tyto vztahy udávají funkční předpisy **funkce sinus** a **funkce kosinus**:

$$f: \ y = \sin x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}, \qquad\qquad f: \ y = \cos x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$



Důležité je zejména to, že funkce sinus je lichá, funkce kosinus sudá a obě funkce jsou **periodické s periodou** 2π. Obě jsou rovněž omezené:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

Ihned z definice také plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$\sin x = 0$ právě když je $x = k\pi = 2k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0$ právě když je $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$

Pro libovolné reálné číslo x platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{3.2}$$

Funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ jsou zavedeny vztahy:

$$f: \; y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$f: \; y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}.$$

Nejdůležitější hodnoty goniometrických funkcí můžeme shrnout do tabulky:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
$\operatorname{cotg}\alpha$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Součtové vzorce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

$$\operatorname{cotg} g\,(x \pm y) = \frac{\pm \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x \mp \operatorname{cotg} y}$$

Vztahy pro dvojnásobný úhel

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x \qquad \tan 2x = \tfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Vztahy pro poloviční úhel

$$\sin \tfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos x}{2}} \qquad \tan \tfrac{x}{2} = \tfrac{1-\cos x}{\sin x} = \tfrac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\cos \tfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos x}{2}}$$

Znaménko se určí podle kvadrantu.

Součtové věty

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \tfrac{x+y}{2} \cdot \cos \tfrac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \tfrac{x+y}{2} \cdot \sin \tfrac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \tfrac{x+y}{2} \cdot \cos \tfrac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \tfrac{x+y}{2} \cdot \sin \tfrac{x-y}{2}$$

Převody přes liché násobky

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \qquad \operatorname{cotg}\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$$

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou zavedeny jako inverzní funkce k funkcím goniometrickým. Protože funkce inverzní existuje jen pro prostou funkci, je vždy nejprve třeba omezit definiční obor na interval, na němž je daná goniometrická funkce prostá.

Funkce arkussinus,

$$f: \; y = \arcsin x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle,$$

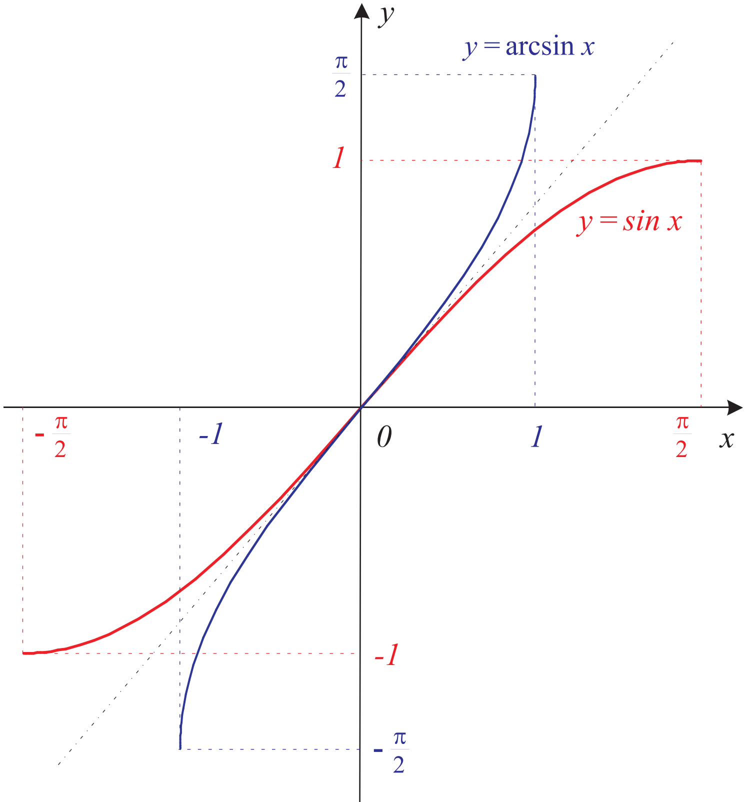
je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\sin x$ na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.
Je tedy určena vztahem

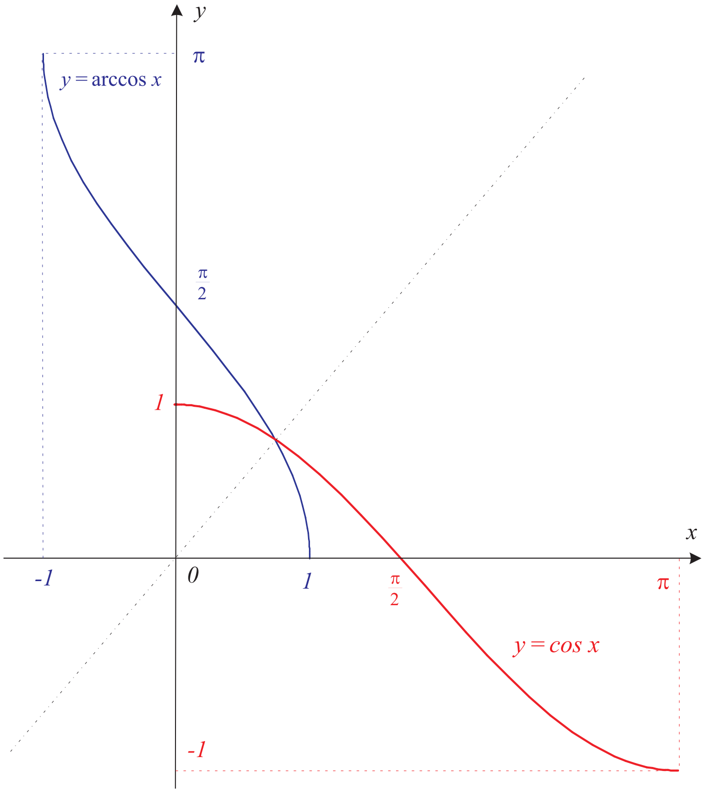
$$y = \arcsin x \iff x = \sin y, \quad y \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle.$$

Funkce arkuscosinus,

$$f: \; y = \arccos x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\cos x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
Je tedy určena vztahem: $y = \arccos x \iff x = \cos y, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle.$


y
y = arcsin x
π/2
1
y = sin x
- π/2
-1
0
1
π/2
x
-1
- π/2


y
π
y = arccos x
π/2
1
x
-1
0
1
π/2
π
y = cos x
-1

Funkce arkustangens,

$$f: \ y = \operatorname{arctg} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}\,,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Je tedy určena vztahem

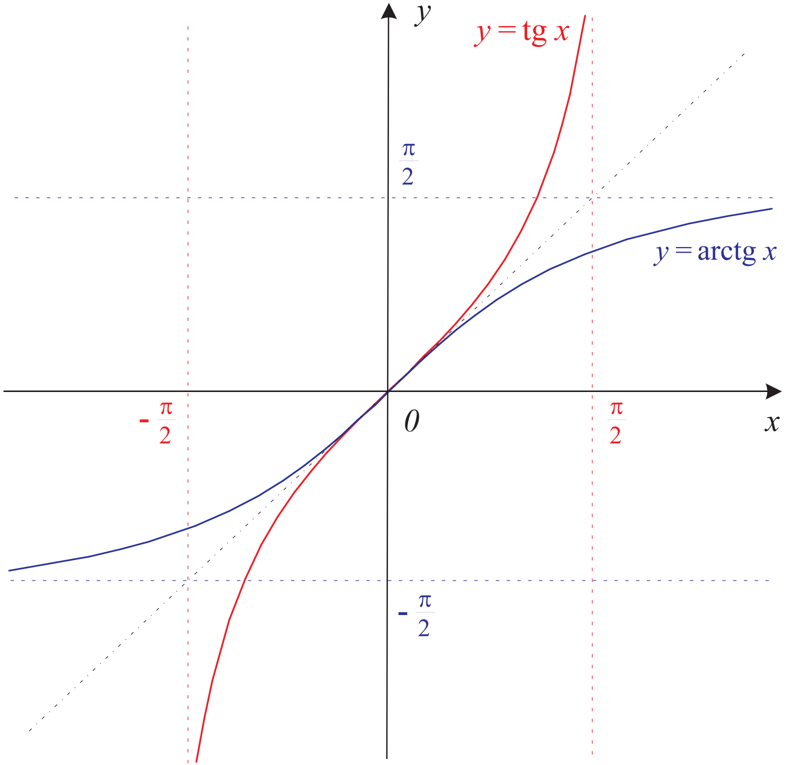
$$y = \operatorname{arctg} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{tg} y, \quad y \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle.$$

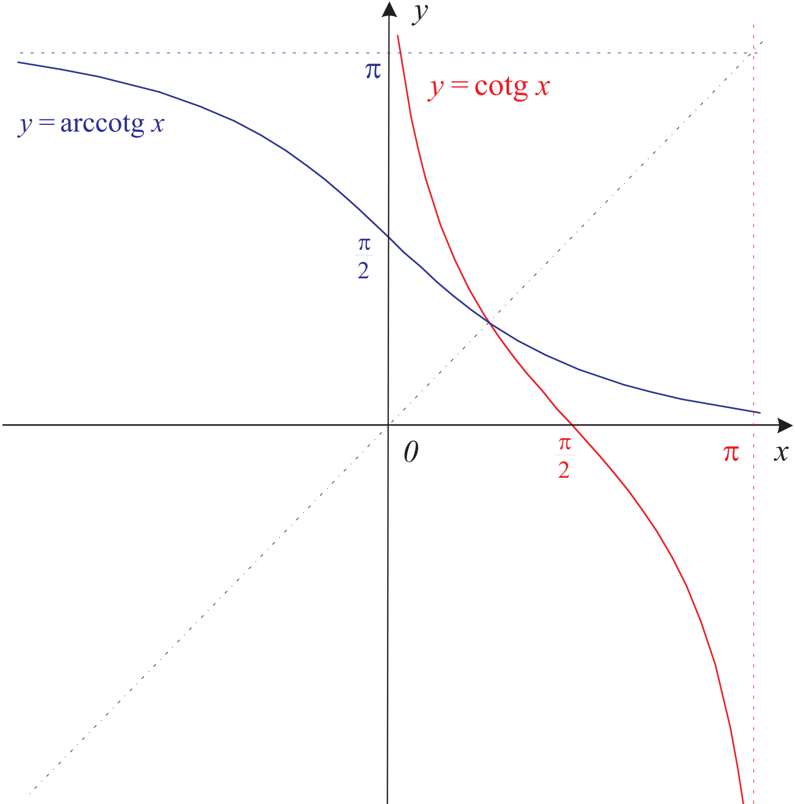
Funkce arkuskotangens,

$$f: \ y = \operatorname{arccotg} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}\,,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Je tedy určena vztahem

$$y = \operatorname{arccotg} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{cotg} y, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle.$$


y
$y = \text{tg}\, x$
$\frac{\pi}{2}$
$y = \text{arctg}\, x$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$


y
π
y = cotg x
y = arccotg x
π/2
0
π/2
π
x

Hyperbolické funkce

Funkce **sinus hyperbolický a kosinus hyperbolický**,

$$f:\ y = \sinh x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

$$f:\ y = \cosh x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

jsou definované vztahy

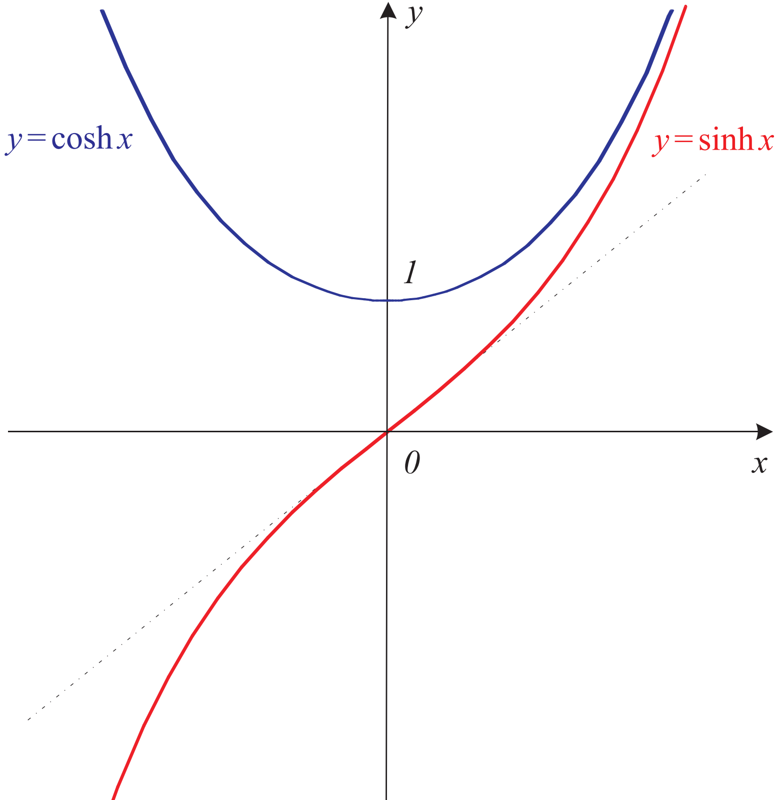
$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Z definičních vztahů plyne, že pro $\sinh x$ a $\cosh x$ platí:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y\,.$$


y
$y = \cosh x$
$y = \sinh x$
1
0
x

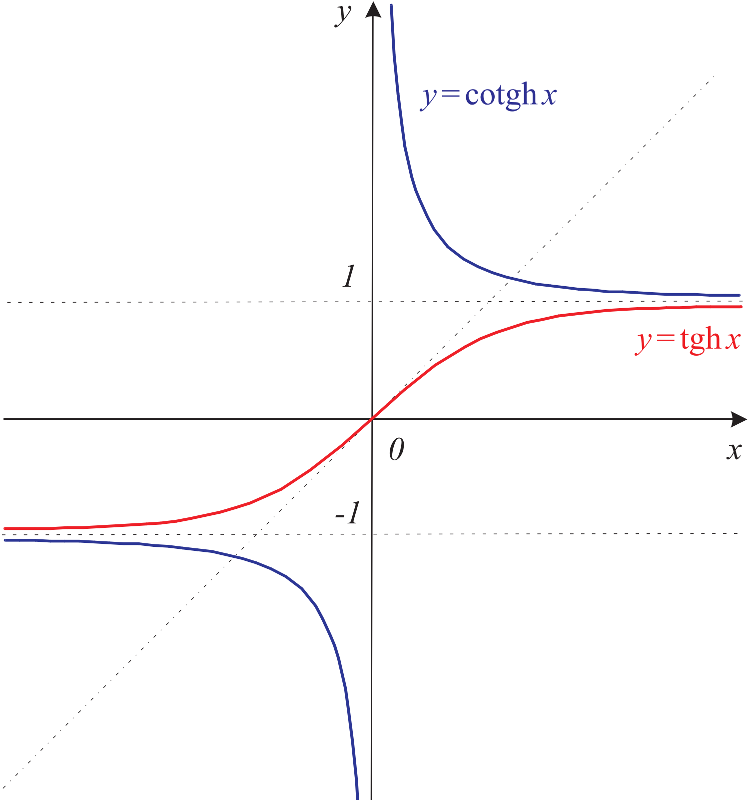
Funkce **tangens hyperbolický a kotangens hyperbolický**,

$$f: \ y = \operatorname{tgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

$$f: \ y = \operatorname{cotgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

jsou definované vztahy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$$


y
y = cotgh x
1
y = tgh x
0
x
-1

Hyperbolometrické funkce

Funkce **argument sinus hyperbolický**,

$$f: \ y = \operatorname{argsinh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci sinus hyperbolický:

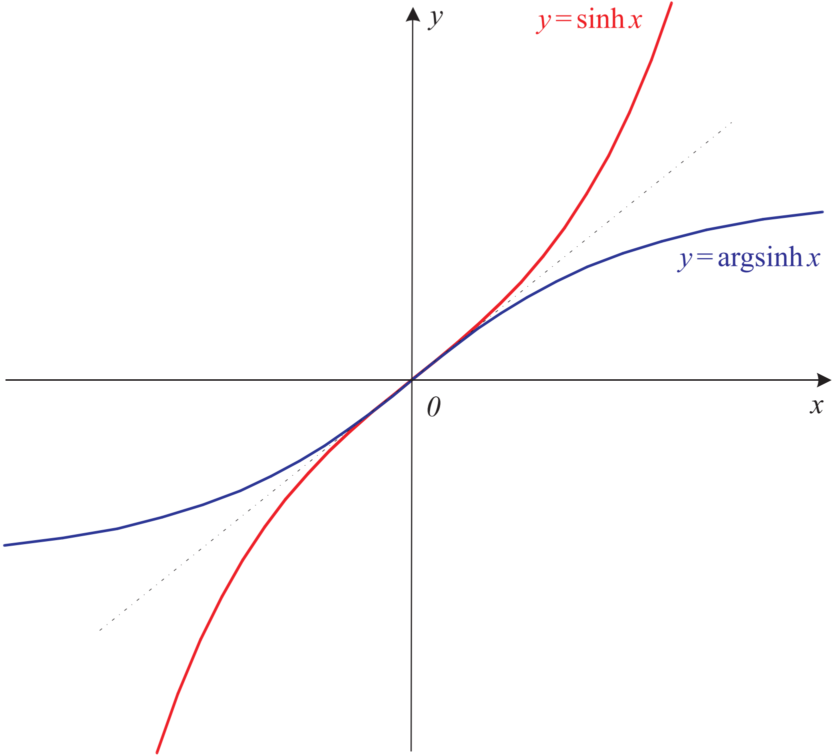
$$y = \operatorname{argsinh} x \iff x = \sinh y, \quad y \in \mathbb{R},$$

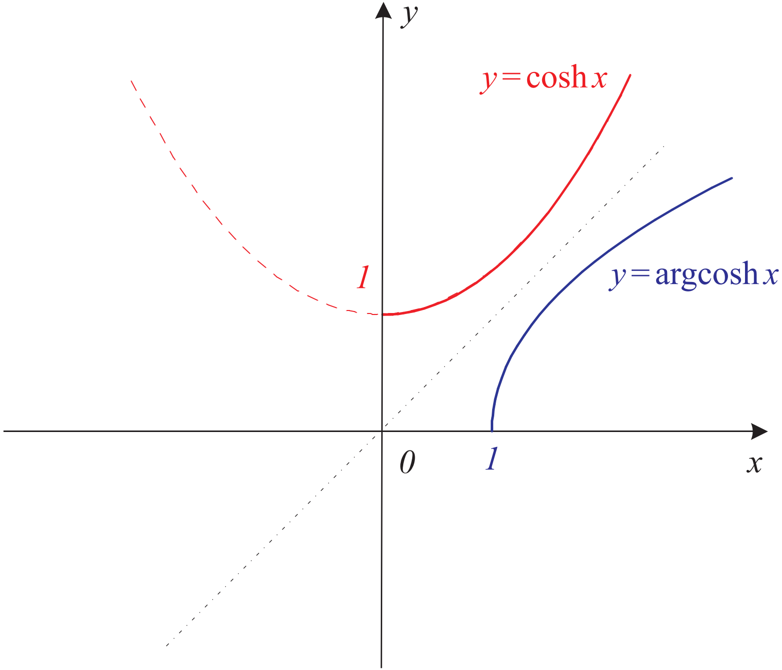
Funkce **argument kosinus hyperbolický**,

$$f: \ y = \operatorname{argcosh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle 1, \infty),$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci kosinus hyperbolický:

$$y = \operatorname{argcosh} x \iff x = \cosh y, \quad y \in \langle 0, \infty)$$


y
y = sinh x
y = argsinh x
0
x



y
y = cosh x
1
y = argcosh x
0
1
x

Funkce **argument tangens hyperbolický**,

$$f:\ y = \operatorname{tgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = (-1, 1),$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci tangens hyperbolický:

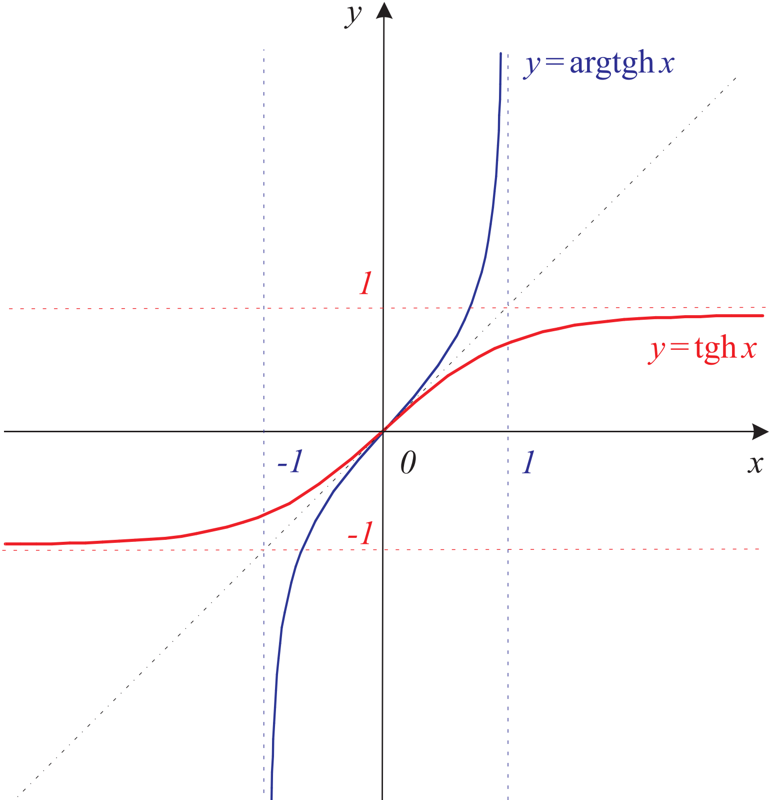
$$y = \operatorname{argtgh} x \iff x = \operatorname{tgh} y, \quad y \in \mathbb{R}$$

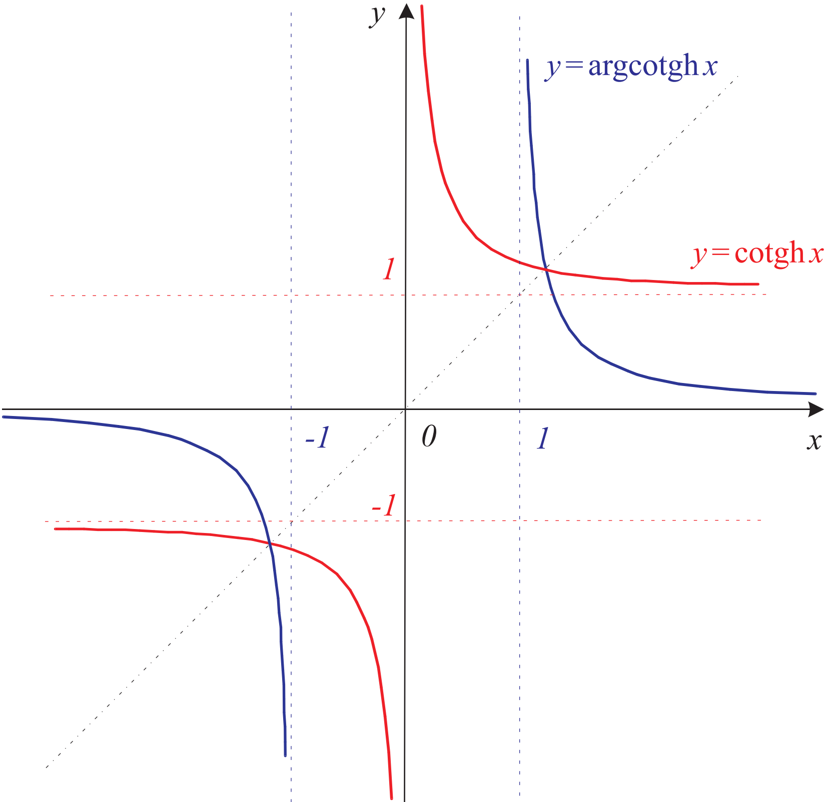
Funkce **argument kotangens hyperbolický**,

$$f:\ y = \operatorname{cotgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

je definovaná vztahem

$$y = \operatorname{argcotgh} x \iff x = \operatorname{cotgh} y, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$


y
y = argtgh x
1
y = tgh x
-1
0
1
x
-1


y
y = argcotgh x
y = cotgh x
1
-1
0
1
x
-1