Derivace složené funkce

Určete parciální derivace a diferenciál funkce F, kde

1. $F(x,y)=f(u,v)\,;\quad u=x+y\,,\ v=xy$ **2.** $F(x,y)=f(t)\,;\quad t=\dfrac{y}{x}$

3. $F(x,y)=f(u,v)\,,\quad u=x+y\,,\ v=x-y$ **4.** $F(x,y)=f(u,v)\,,\quad u=xy\,,\ v=\dfrac{x}{y}$

$\Big[$**1.** $\mathrm{d}F=\big(f'_u+yf'_v\big)\mathrm{d}x+\big(f'_u+xf'_v\big)\mathrm{d}y$. **2.** $\mathrm{d}F=f'\,\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2}$. **3.** $\mathrm{d}F=\big(f'_u+f'_v\big)\mathrm{d}x+\big(f'_u-f'_v\big)\mathrm{d}y$.
4. $\mathrm{d}F=\left(yf'_u+\dfrac{f'_v}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(xf_u-\dfrac{xf'_v}{y^2}\right)\mathrm{d}y.\Big]$

---

5. Dokažte, že funkce $F(x,y)=x^nf\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$, kde f je spojitě diferencovatelná funkce, vyhovuje vztahu $x\dfrac{\partial F}{\partial x}+2y\dfrac{\partial F}{\partial y}=nF$, $x\neq 0$.

---

6. Nalezněte jaká funkce tvaru $F(x,y)=f(x+y)+g(x-y)$ vyhovuje rovnici $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

$\big[g'(x-y)=0$, tj. $F(x,y)=f(x+y)$, kde f je libovolná diferencovatelná funkce$\big]$

---

7. Ukažte, že každá funkce $F(x,y)$, která má spojité parciální derivace a jejíž hodnota závisí pouze na vzdálenosti bodu $[x;y]$ od počátku, vyhovuje rovnici $y\dfrac{\partial F}{\partial x}-x\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$.

---

8. Určete, jaká funkce tvaru $F(x,y)=f\left(x,\dfrac{y}{x}\right)$ vyhovuje rovnici $x\dfrac{\partial F}{\partial x}+y\dfrac{\partial F}{\partial y}=F$.

$\Big[[uf'_u(u,v)=f$, tj. $F(x,y)=xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, kde g je diferencovatelná funkce$\Big]$

---

9. Nechť $F(x,y)=f(\rho,\varphi)$, kde $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ jsou polární souřadnice v rovině a funkce f má spojité parciální derivace. Vyjádřete v polárních souřadnicích

a) $\operatorname{grad}F=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)$ b) $|\operatorname{grad}F|^2=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2$ c) $x\dfrac{\partial F}{\partial y}-y\dfrac{\partial F}{\partial x}$

$\Big[$ a) $f'_x=\cos\varphi f'_\rho-\dfrac{\sin\varphi}{\rho}f'_\varphi$, $F_y=\sin\varphi f'_\rho+\dfrac{\cos\varphi}{\rho}f_\varphi$; b) $\left(f'_\rho\right)^2+\dfrac{1}{\rho^2}\left(f'_\varphi\right)^2$; c) $f_\varphi\Big]$

---

10. Dokažte, že všechny tečné roviny grafu funkce $F(x,y)=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$, kde f je spojitě diferencovatelná funkce, se protínají v jednom bodě.

---

11. Dokažte, že všechny normály ke grafu funkce $F(x,y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, kde f je spojitě diferencovatelná funkce, protínají osu z.

---

12. Ukažte, že derivace funkce $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ v libovolném bodě $[x_0;y_0;z_0]$ ve směru radiusvektoru tohoto bodu je rovna $\dfrac{2f(x_0,y_0,z_0)}{r_0}$, kde $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

---

13. Ukažte, že funkce $F(x,y)=f(x^2-y^2)$, kde f má spojitou derivaci, vyhovuje vztahu $y^2\dfrac{\partial F}{\partial x}+xy\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

14. Ukažte, že funkce $F(x,y) = yf(x^2-y^2)$, kde f má spojitou derivaci, vyhovuje rovnici $\frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{F}{y^2}$.

---

15. Ukažte, že funkce $F(x,y) = f(x^2+y^2)$, kde f má spojitou derivaci, vyhovuje rovnici $y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

---

16. Ukažte, že každá funkce $F(x,y) = \dfrac{y}{f\left(x^2-y^2\right)}$, kde f je nenulová funkce mající spojitou derivaci, vyhovuje vztahu $y^2\frac{\partial F}{\partial x} + xy\frac{\partial F}{\partial y} - xF = 0$.

---

17. Určete parciální derivace a diferenciál funkce $F(x,y,z) = f(u,v,w)$, kde $f(u,v,w) = u+v^2+w^3$ a $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ a $w = w(x,y)$.

$\left[\mathrm{d}F = \left(u'_x + 2vv'_x + 3w^2w'_x\right)\mathrm{d}x + \left(u'_y + 2vv'_y + 3w^2w'_y\right)\mathrm{d}y + \left(u'_z + 2vv'_z\right)\mathrm{d}z\right]$

---

18. Určete diferenciál funkce $F(x,y) = u+v$, kde $u = e^{xy}$, $v = e^{-xy}$. $\left[\mathrm{d}F = 2\sinh xy \cdot (y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)\right]$

---

19. Určete diferenciál a parciální derivace funkce $F(x,y) = f(u,v,w)$, kde $u = x^2+y^2$, $v = x^2-y^2$ a $w = 2xy$. $\left[\mathrm{d}F = 2(xf'_u + xf'_v + yf'_w)\,\mathrm{d}x + 2(yf'_u - yf'_v + xf'_w)\,\mathrm{d}y\right]$

---

20. Určete diferenciál a parciální derivace funkce $F(x,y) = f(t)$, kde

a) $t = x+y$; b) $t = \sqrt{x^2+y^2}$; c) $t = \dfrac{y}{x}$

$\left[\text{a) } \mathrm{d}F = f'(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y);\ \text{b) } \mathrm{d}F = \frac{f'}{t}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y);\ \text{c) } \mathrm{d}F = \frac{f'}{x^2}(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)\right]$

---

21. Určete diferenciál a parciální derivace funkce $F(x,y,z) = f(t)$, kde: $t = x^2+y^2+z^2$; b) $t = xyz$.

$\left[\text{a) } \mathrm{d}F = 2f'(t)\cdot(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z);\ \text{b) } \mathrm{d}F = f'(t)\cdot(yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z)\right]$

---

22. Určete derivaci funkce $F(t) = f(x,y,z)$, $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. $\left[F'(t) = f'_x + 2tf'_y + 3t^2f'_z\right]$

---

23. Do rovnice $(x+y)\frac{\partial F}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ zaveďte nové proměnné $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

$\left[f'_u - f'_v = 0\right]$

---

24. Ukažte, že funkce $F(x,y) = e^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$, kde f je libovolná diferencovatelná funkce, vyhovuje rovnici $(x^2-y^2)\frac{\partial F}{\partial x} + xy\frac{\partial F}{\partial y} = xyF$.

---

25. Ukažte, že funkce $F(x,y) = f(xy) + \dfrac{y^2}{3x}$, kde f je libovolná diferencovatelná funkce, vyhovuje rovnici $x^2\frac{\partial F}{\partial x} - xy\frac{\partial F}{\partial y} + y^2 = 0$.

---

26. Ukažte, že funkce $F(x,y,z) = x^n f\left(\dfrac{y}{ax}, \dfrac{z}{by}\right)$, kde f je spojitě diferencovatelná funkce, vyhovuje rovnici $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = nF$.

---

27. Ukažte, že funkce $F(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}\ln x + xf\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$, kde f je spojitě diferencovatelná funkce, vyhovuje vztahu $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = F + \frac{xy}{z}$.
