Derivace a diferenciály vyšších řádů. Taylora věta

1. Ukažte, že pro funkci $f(x,y)=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$ platí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

---

2. Spočtěte $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$ pro funkci $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$. $\left[\dfrac{4y(3x^2-4y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$

---

3. Určete $\mathrm{d}^2 f$ pro funkce:

a) $f(x,y)=\sin(2x+y)$; b) $f(x,y)=\ln(x-y)$; c) $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$.

$\Big[$a) $\mathrm{d}^2 f=-\sin(2x+y)\,(4\mathrm{d}x^2+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y^2)$; b) $\mathrm{d}^2 f=\dfrac{-\mathrm{d}x_2^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\mathrm{d}x^2}{(x-y)^2}$; c) $\mathrm{d}^2 f=-\cos(x+y+z)\big(\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z^2\big)\Big]$

---

4. V okolí bodu $[2;1]$ nahraďte funkci $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ Taylorovým polynomem řádu 3.

$\big[1-(x-2)+(y-1)+(x-2)^2-2(x-2)(y-1)+(y-1)^2-(x-2)^3+3(x-2)^2(y-1)-3(x-2)(y-1)^2+(y-1)^3\big]$

---

5. Napište Taylorův rozvoj funkce $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ v bodě $[0;0]$ do členů čtvrtého řádu včetně.

$\left[y+xy-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{x^2y}{2}-\dfrac{xy^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}-\dfrac{x^3y}{6}-\dfrac{x^2y^2}{4}+\dfrac{xy^3}{3}-\dfrac{y^4}{4}\right]$

---

6. Nechť funkce f a g mají spojité derivace druhého řádu. Dokažte, že funkce $F(x,y)=xf(x+y)+yg(x+y)$ vyhovuje rovnici $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$

. **7.** Laplaceův operátor $\triangle f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\ldots+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ v $\mathbb{R}^n$ vyjádřete pro funkci, která závisí pouze na vzdálenosti bodu $x=(x_1,\ldots,x_n)$ od počátku souřadnicové soustavy, tj. $f(x_1,\ldots x_n)=F(r)$, kde $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2,\ldots+x_n^2}$. $\left[F''+\dfrac{n-1}{r}F'\right]$

---

8. Výraz $x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ přetransformujte pro funkci $F(u,v)=f(x,y)$, kde $u=y$, $v=\dfrac{y}{x}$.

$\left[v^2\left(-f''_{uv}+\dfrac{f'_v}{u}\right)\right]$

---

9. Ukažte, že je-li funkce $f(x,y)$ řešením rovnice $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, pak funkce $F(u,v)=f(x,y)$, kde $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ a $v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ je řešením rovnice $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0$.

---

10. Výraz $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ vyjádřete pro funkci $F(u,v)=f(x,y)$, kde $u=xy$ a $v=\dfrac{x}{y}$.

$[4uvF''_{uv}-2vF'_v]$

---

11. Vyjádřete Laplaceův operátor $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ v polárních souřadnicích $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

$\left[f''_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}f'_\rho+\dfrac{1}{\rho^2}f''_{\varphi\varphi}\right]$

---

12. Určete: a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$; c) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ pro funkci $f(x,y) = \sin xy$.

[a) $\cos xy - xy \sin xy$; b) $-y(2\sin xy + \cos xy)$; c) $-x(2\sin xy + xy\cos xy$]

---

13. Určete derivace druhého řádu pro funkce

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} & f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right), & \text{b)} & f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}, \\
\text{c)} & f(x,y) = \arcsin xy, & \text{d)} & f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}, \\
\text{e)} & f(x,y,z) = e^{xyz}, & \text{f)} & f(x,y) = \sin^2(ax+by).
\end{array}$$

[a) $f_{xx} = \dfrac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $f_{xy} = \dfrac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $f_{yy} = \dfrac{x^3 + (x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$; b) $f_{xx} = \dfrac{-4y}{(x+y)^3}$, $f_{xy} = \dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}$, $f_{yy} = \dfrac{4x}{(x+y)^3}$; c) $f_{xx} = \dfrac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$, $f_{xy} = \dfrac{1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$, $f_{yy} = \dfrac{x^3y}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$; d) $f_{xx} = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = \dfrac{-2y}{(1+y^2)^2}$; e) $f_{xx} = y^2z^2\mathrm{e}^{xyz}$, $f_{xy} = z(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz}$, $f_{xz} = y(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz}$, $f_{yy} = x^2z^2\mathrm{e}^{xyz}$, $f_{yz} = x(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz}$, $f_{zz} = x^2y^2\mathrm{e}^{xyz}$; f) $f_{xx} = 2a^2\cos 2(ax+by)$, $f_{xy} = 2ab\cos 2(ax+by)$, $f_{yy} = 2b^2\cos 2(ax+by)$]

---

14. Určete $\mathrm{d}^2 f$ pro funkce: a) $f(x,y) = x\sin^2 y$; b) $f(x,y) = xy^2 - x^2y$; c) $f(x,y) = y^{\ln x}$; d) $f(x,y,z) = xyz$.

[a) $2\sin 2y \mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2x\cos 2y$; b) $-2y\mathrm{d}x^2 + 4(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2x\mathrm{d}y^2$;
c) $y^x\left(\dfrac{\ln y(\ln y - 1)}{x^2}\mathrm{d}x^2 + \dfrac{2(1+\ln x\ln y)}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \dfrac{\ln x(\ln x - 11)}{y^2}\mathrm{d}y^2\right)$; d) $2(z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)$]

---

15. Dokažte, že funkce $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$ vyhovuje rovnici $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

---

16. Dokažte, že funkce $f(x,y) = \dfrac{y}{y^2 - a^2x^2}$ vyhovuje rovnici $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

---

17. Dokažte, že funkce $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ vyhovuje rovnici $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

---

18. Ukažte, že funkce $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

---

19. Napište Taylorův polynom třetího stupně pro funkci $f(x,y) = e^x \sin y$ v bodě $(0,0)$.

$\left[y + xy + \dfrac{x^2y}{2} - \dfrac{y^3}{6}\right]$

---

20. Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $[1;1]$.

$\left[1(x-1)(x-1)(y-1)\dfrac{(x-1)^2(y-1)}{2}\right]$

---

21. Nechť f a g mají spojité derivace druhého řádu. Dokažte, že funkce $F(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$ vyhovuje rovnici $x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

---

22. Jsou-li f a g funkce, které mají spojitou derivaci druhého řádu, dokažte, že funkce $F(x,y) = \frac{1}{y}[f(ax+y) + g(ax-y)]$ vyhovuje rovnici $y^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial F}{\partial y}\right)$.

---

23. Spočtěte $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \triangle F$, je-li $F(x,y) = xy + yf\left(\frac{x}{y}\right)$, kde f je funkce, která má spojité derivace druhého řádu. $\left[\frac{x^2+y^2}{y^3}\,f''\left(\frac{x}{y}\right)\right]$

---

24. Výraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial y}$ vyjádřete pro funkci $F(u,v) = f(x,y)$, kde $u = x - 2\sqrt{y}$, $v = x + 2\sqrt{y}$. $[4F''_{uv}]$

---

25. Jsou-li f a g funkce, které mají spojité derivace druhého řádu, ukažte, že funkce $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

---

26. Výraz $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ vyjádřete pro funkci $F(\rho,\varphi)$, kde $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$. $[\rho^2 f''_{\rho\rho}]$

---

27. Vyjádřete Laplaceův operátor $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ pro funkci $F(\rho,\varphi,z) = f(x,y,z)$, kde $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a $z = z$. $\left[f''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\,f'_\rho + \frac{1}{\rho^2}\,f''_{\varphi\varphi} + f''_{zz}\right]$
