Diferenciály, směrové derivace a tečná rovina

1. Určete diferenciál funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ a směrovou derivaci v bodě $[1;1]$ ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Rozhodněte, zda jsou funkce diferencovatelné v daném bodě

2. $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f(0,0) = 0$ v bodě $[0;0]$

3. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ v bodě $[0;0]$

4. $f(x,y) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ v bodě $[0;0]$

[**2.** ne; **3.** ne; **4.** ano, $\mathrm{d}f(0,0) = 0$]

---

5. Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = xy^2 + z^3 - xyz$ v bodě $A = [1;1;2]$ ve směru vektoru, který svírá se souřadnicovými osami úhly $60°$, $45°$ a $60°$. [5]

---

6. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ v bodě $[1;1]$.
$[2x - 2y + 4z - \pi = 0]$

---

7. Pomocí diferenciálu spočtěte přibližně hodnotu výrazu $\ln\left(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1\right)$. [0.005]

---

8. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y) = xy$, která je kolmá na přímku $\frac{x+2}{2} = y + 2 = 1 - z$. $[2x + y - z - 2 = 0]$

---

9. Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y,z) = xy$ v počátku a v bodě $A = [2;1;2]$.
$[z = 0;\ x + 2y - z - 2 = 0]$

---

10. Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ v bodě $A = [2;3;17]$.
$[8x + 6y - z - 17 = 0]$

---

11. Najděte rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - xy$ v bodě $A = [3;4;-7]$. $\left[17x + 11y + 5z - 60 = 0;\ \frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}\right]$

---

12. Rozhodněte, zda je funkce $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ diferencovatelná v $\mathbb{R}^2$ a případně napište $\mathrm{d}f$.

$\Big[$ano; $\mathrm{d}f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\big(y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)\,\mathrm{d}x + x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)\,\mathrm{d}y\big)$ pro $[x;y] \neq [0;0]$, $\mathrm{d}f(0,0) = 0\Big]$

---

13. Napište diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodech $A = [0;0]$ a $B = [1;2]$.
$\left[\mathrm{d}f(0,0)\text{ neexistuje; } \mathrm{d}f(1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathrm{d}x + 1\mathrm{d}y)\right]$

---

14. Vyjádřete přibližně: a) $1.0002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$, b) $1.04^{2.02}$. [a) 108.972; b) 1.08]

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

15. Určete derivaci funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ ve směru vektoru od bodu $A = [3;1]$ do bodu $B = [6;5]$. $\left[\frac{1}{5}(10x + 11y)\right]$

---

16. Najděte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = xyz$ ve směru vektoru od bodu $A = [5;1;2]$ do bodu $B = [9;4;14]$ v bodě A. $\left[\frac{98}{13}\right]$

---

17. Nalezněte derivaci funkce $f(x,y) = \ln(x+y)$ v bodě $A = [1;2]$ ve směru tečny k parabole $y^2 = 4x$ v bodě A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

---

18. Ve kterém bodě je gradient funkce $f(x,y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ roven vektoru $\left(1, -\frac{16}{9}\right)$.

[[−1/3; 3/4] a [7/3; −3/4]]

---

19. Rozhodněte, zda funkce $f(x,y,z) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ v bodě $A = [1;1;1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (2,1,2)$ roste nebo klesá. [funkce roste]

---

20. Nalezněte derivaci funkce $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ v bodě $A = \left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right]$ ve směru libovolného vektoru. Rozhodněte, ve kterém směru je derivace: a) největší, b) nejmenší, c) nulová.

$\left[f'_{\vec{u}}(A) = \cos\alpha + \sin\alpha,\ \text{kde } \vec{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha;\ \text{a) } \alpha = \frac{\pi}{4};\ \text{b) } \alpha = \frac{5\pi}{4};\ \text{c) } \alpha_1 = \frac{3\pi}{4},\ \alpha_2 = \frac{7\pi}{4}\right]$
