Extrémy funkcí více proměnných

1. Určete lokální extrémy funkce $y(x)$ definované implicitně rovnicí

$$\text{a)}\ \ x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0\,;\qquad \text{b)}\ \ x^2y^3+y-3=0\,;$$
$$\text{c)}\ \ \operatorname{arctg} y+x-y=0\,.$$

$\big[$a) $y_{\max}=1$ pro $x=1$; b) $y_{\max}=3$ pro $x=0$; c) extrém neexistuj$\big]$

---

2. Nalezněte lokální extrémy funkcí:

$$\text{a)}\ \ f(x,y,z)=x^3+y^2+\frac{z^2}{2}-3xz-2y+2z\,;\qquad \text{b)}\ \ f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}\,,\quad x\,,y\,,z>0\,.$$

$\big[$a) $f_{min}=-1$ v bodě $[2;1;4]$; b) $f_{\min}=4$ v bodě $[1/2;1;1]\big]$

---

3. Určete extrémy funkce $z(x,y)$, která je řešením rovnice $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$.

$\Big[z_{min}=1$ v bodě $[-2;0]$; $z_{\max}=-\dfrac{8}{7}$ v bodě $[15/6;0]\Big]$

---

4. Nalezněte lokální extrémy funkce f s vazební podmínkou g:

$$\text{a)}\ \ f(x,y)=x^2+2y^2\,,\quad g(x,y)=x^2-2x+2y^2+4y=0\,;$$
$$\text{b)}\ \ f(x,y)=xy\,,\qquad g(x,y)=x+y-1=0\,.$$

$\Big[$a) $f_{\max}=12$ v bodě $[2;-2]$; $f_{\min}=0$ v bodě $[0;0]$; b) $f_{\max}=\dfrac{1}{4}$ v bodě $[1/2;1/2]\Big]$

---

5. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y,z)=x-2y+2z$ za podmínky $x^2+y^2+z^2=1$.

$\Big[f_{\max}=3$ v bodě $[1/3;-2/3;2/3]$; $f_{\min}=-3$ v bodě $[-1/3;2/3;-2/3]\Big]$

---

6. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y,z)=xyz$ za podmínek $x+y+z=5$, $xy+yz+xz=8$.
$\Big[f_{\min}=4$ v bodech $[2;2;1]$, $[2;1;2]$ a $[1;2;2]$; $f_{\max}=\dfrac{112}{27}$ v bodech $[4/3;4/3;7/3]$, $[4/3;7/3;4/3]$ a $[7/3;4/3;4/3]\Big]$

---

7. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y)=3xy$ na množině $\mathcal{M}=\big\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le 2\big\}$.

$\Big[f_{\min}=-3$ v bodech $[1;-1]$ a $[-1;1]$; $f_{\max}=3$ v bodech $[1;1]$ a $[-1;-1]\Big]$

---

8. Stanovte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y)=x^2-y^2$ na množině

$$\mathcal{M}=\big\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le 1\big\}\ .$$

$\Big[f_{\min}=-1$ v bodech $[0;1]$ a $[0;-1]$; $f_{\max}=1$ v bodech $[1;0]$ a $[-1;0]\Big]$

---

9. Stanovte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y)=x^2+2xy-4x+8y$ na množině $\mathcal{M}=\{(x,y)\,;\ 0\le x\le 1\,;\ 0\le y\le 2\}$.

$\Big[f_{\max}=17$ v bodě $[1;2]$; $f_{\min}=-3$ v bodě $[1;0]\Big]$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

10. Nalezněte lokální extrémy funkcí:

a) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$; b) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$;
c) $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$; d) $f(x,y) = x^3y^2(12 - x - y) \quad x, y > 0$;
e) $f(x,y) = 3x^2y - 6xy + y^3$; f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;
g) $f(x,y) = x^2y(4 - x + y)$; h) $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$.

[a) $f_{\min} = 6$ v bodě $[1;1/2]$; b) $f_{\min} = -1$ v bodě $[-4;1]$; c) nemá extrém; d) $f_{\max} = 6912$ v bodě $[6;4]$; e) $f_{\min} = -2$ v bodě $[1;1]$, $f_{\max} = 2$ v bodě $[1,-1]$; f) $f_{\min} = -4$ c bodech $[\sqrt{2};-\sqrt{2}]$ a $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$; g) $f_{\min} = -4$ v bodě $[2;-1]$, neostré minimum $f = 0$ pro $x = 0$ a $y \in (-4,0)$, neostré lokální maximum $f = 0$ pro $x = 0$ a $y \in (-\infty,-4) \cup (0,\infty)$; h) $f_{\max} = 8$ v bodě $[2;2]$]

---

11. Nalezněte lokální extrémy funkce $y(x)$, která je řešením rovnice:

a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$; b) $x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y = 0$;
c) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

[a) $y_{\max} = 3$, $y_{\min} = 1$ pro $x = 4$; b) $y_{\max} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} - 2$ pro $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $y_{\min} = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} - 2$ pro $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; c) $y_{\max} = 2^{2/3}$ pro $x = 2^{1/3}$]

---

12. Nalezněte lokální extrémy funkce:

a) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz)$; b) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

[a) $f_{\min} = -12$ v bodě $[2;2;2]$; b) nemá extrém]

---

13. Nalezněte lokální extrémy funkce $z(x,y)$, která je řešením rovnice:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z + 2 = 0$.

[a) $z_{\max} = 6$, $z_{\min} = -2$ v bodě $[1;-1]$; b) $z_{\max} = 0$ v bodě $[-1;[1]$, $z_{\min} = -8$ v bodě $[-5;-5]$]

---

14. Je dáno n bodů $A_1 \equiv (x_1;y_1;z_1), \ldots, A_n \equiv (x_n;y_n;z_n) \in \mathbb{R}^3$. V rovině $z = 0$ najděte bod A, pro který je součet čtverců vzdáleností od bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ minimální.

$\left[x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ y = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right]$

---

15. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x + y = 1$.

[$f_{\min} = \dfrac{1}{2}$ v bodě $[1/2;1/2]$]

---

16. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 + y^2 = 2$.

[$f_{\max} = 1$ v bodech $[1;1]$ a $[-1;-1]$, $f_{\min} = -1$ v bodech $[1;-1]$ a $[-1;1]$]

---

17. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = xyz$ za podmínky $x + y + z = 3$.

[$f_{\max} = 1$ v bodě $[1;1;1]$]

---

18. Nalezněte lokální extrémy funkce f za daných podmínek:

$$\text{a) } f(x,y,z) = xy + yz\,; \qquad x^2 + y^2 = 2\,, \qquad y + z = 2\,;$$
$$\text{b) } f(x,y,z) = xyz\,; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \quad x + y + z = 0\,.$$

$\Big[$lokální maxima jsou $f(1,1,1) = 2$ a $f\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}-5}{2}$; lokální minima jsou $f(-1,1,1)0$ a $f\left(-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}+5}{2}$;

b) $f_{\max} = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right]$, $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right]$ a $\left[\dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right]$;

$f_{\min} = -\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $\left[\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right]$, $\left[\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right]$ a $\left[-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right]\Big]$

---

19. Nalezněte lokální extrém funkce $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ za podmínky $xyz = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

$\left[f_{\min} = 3 \text{ v bodě } [1;1;1]\right]$

---

20. V rovině $3x - 2z = 0$ nalezněte bod, který má minimální součet čtverců vzdáleností od bodů $A \equiv (1;1;1)$ a $B \equiv (2;3;4)$.

$\left[\left[\dfrac{21}{13}; 2; \dfrac{63}{26}\right]\right]$

---

21. Určete body elipsy $x^2 + 4y^2 = 4$, které mají minimální a maximální vzdálenost od přímky $2x + 3y - 6 = 0$.

$\left[\left[\dfrac{8}{5}; \dfrac{3}{5}\right] \text{ minimální; } \left[-\dfrac{8}{5}; -\dfrac{3}{5}\right] \text{ maximální}\right]$

---

22. Bodem $P \equiv (a;b;c)$ veďte rovinu tak, aby objem čtyřstěnu vymezeného touto rovinou a souřadnicovými rovinami byl minimální.

$\left[\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 3,\ V_{\min} = \dfrac{9}{2}\,abc\right]$

---

23. Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$ vepište rovnoramenný trojúhelník takový, že má základnu rovnoběžnou s osou x a má maximální obsah.

$\left[A = [3;-1],\ B = [-3,-1],\ C = [0;2]; \text{ obsah je } 9\ \right]$

---

24. Určete rozměry obdélníku daného obvodu $2p$, který rotací kolem jedné strany vytvoří těleso s maximálním objemem.

$\left[\dfrac{p}{3}, \dfrac{2p}{3};\ P = \dfrac{4}{27}\,\pi p^3\right]$

---

25. Určete rozměry pravoúhlého odkrytého bazénu, který má při daném objemu V minimální povrch.

$\left[a = b = (2V)^{1/3},\ c = \dfrac{(2V)^{1/3}}{2};\ P = 3(2V)^{2/3}\right]$

---

26. V rovině $z = 0$ určete bod D tak, aby koule, která prochází body $A \equiv (0;0;12)$, $B \equiv (0;0;4)$, $C \equiv (8;0;8)$ a D měla minimální objem.

$\left[D = [3; \pm\sqrt{39}; 0]\right]$

---

27. Do rotačního kužele o délce površky 1 a vrcholovém úhlu $\pi/2$ vepište kvádr maximálního objemu.

$\left[a = b = \dfrac{2}{3},\ \text{výška } v = \dfrac{\sqrt{2}}{6};\ V = \dfrac{2\sqrt{2}}{27}\right]$

---

28. Do koule o poloměru R vepište válec o maximálním povrchu.

$\left[r = R\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}},\ h = 2R\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\right]$

29. Nalezněte minimální vzdálenost bodu $A \equiv (1;4)$ od paraboly dané rovnicí $y^2 = 2x$.

$\left[d = \sqrt{5} \text{ v bodě } [2;2]\right]$

---

30. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ na množině $\mathcal{M} = \left\{(x,y)\,;\; x^2 + y^2 \le 25\right\}$. $\left[f_{\max} = 125 \text{ v bodě } [-3;4];\; f_{\min} = -75 \text{ v bodě } [3;-4]\right]$

---

31. Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině $\mathcal{M} = \left\{(x,y)\,;\; x^2 \le y \le 4\right\}$. $\left[f_{\min} = 0 \text{ v bodě } [0;0];\; f_{\max} = 32 \text{ v bodech } [-2;4] \text{ a } [2;4]\right]$

---

32. Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2y(4 - x - y)$ na množině $\mathcal{M} = \left\{(x,y)\,;\; x \ge 0\,,\; y \ge 0\,,\; x + y \le 6\right\}$. $\left[f_{\max} = 4 \text{ v bodě } [2;1];\; f_{\min} = -32 \text{ v bodě } [4;2]\right]$

---

33. Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ na množině $\mathcal{M} = \left\{(x,y)\,;\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,,\; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$. $\left[f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ v bodě } \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right];\; f_{\min} = 0 \text{ v bodě } [0;0]\right]$
