Implicitní funkce

1. Rozhodněte, zda rovnice $x^2 + 2xy - y^2 = 4$ definuje implicitně funkci $y = f(x)$ v okolí bodu $[2;0]$. Napište aproximaci tohoto řešení pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

$$\left[-(x-2) + \frac{(x-2)^2}{2}\right]$$

---

2. Najděte rovnici tečny a normály v počátku ke křivce definované rovnicí $x^2(x+y) = x - y$.

$\big[$tečna: $x - y = 0$; normála: $x + y = 0\big]$

---

3. Spočtěte první dvě derivace funkce $y(x)$, která je řešením rovnice $\mathrm{e}^y + xy - \mathrm{e} = 0$ v okolí bodu $[0;1]$. $\big[y'(0) = -\mathrm{e}^{-1};\ y''(0) = \mathrm{e}^{-2}\big]$

---

4. Určete, zda řešení rovnice $e^{2x\cos y} + \mathrm{e}^{y\cos 2x} - 2 = 0$ je v okolí bodu $[0;0]$ funkcí $y(x)$ a napište aproximaci tohoto řešení v okolí bodu $[0;0]$ pomocí polynomu druhého stupně. $\big[y = -2x - 4x^2\big]$

---

5. Dokažte, že řešením rovnice $y - 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$ je lineární funkce a najděte ji.

$[y = kx\ ,\ k = 2\operatorname{arctg} k\ ;\ x \neq 0]$

---

6. Určete $\mathrm{d}z$ a d^2z funkce $z(x,y)$ definované rovnicí $x + y + z^2 = \mathrm{e}^z$ v bodě $[2;-1;0]$.

$\big[\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2\big]$

---

7. Určete rovnici tečné roviny k ploše definované rovnicí $z^3 - xz + y = 0$ v okolí bodu $[3;-2;2]$.

$[2x - y - 9z + 10 = 0]$

---

8. Napište rovnici tečných rovin k ploše určené rovnicí $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, které jsou rovnoběžné s rovinou určenou rovnicí $x + 4y + 6z = 0$. $[x + 4y + 6z - 21 = 0$ a $x + 4y + 6z + 21 = 0]$

---

9. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou derivaci. Dokažte, že funkce $z(x,y)$, která je řešením rovnice $ax + by + cz = f(x^2 + y^2 + z^2)$ vyhovuje rovnici $(cy - bz)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\dfrac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$.

---

10. Určete derivaci funkcí $y(x)$ a $z(x)$, které jsou řešením soustavy $2x\mathrm{e}^{2x+3y-z} - z\cos y = 0$ a $\ln(z - x) + \sin y + 2x + y - z = 0$ v okolí bodu $[1;0;2]$. Napište lineární aproximaci těchto řešení a rovnici tečny k této křivce v bodě $[1;0;2]$. $\left[y = \dfrac{1-x}{2},\ x = 1 + x;\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{2}\right]$

---

11. Nalezněte tečný vektor ke křivce, kterou dostaneme jako graf funkce získané řešením soustavy rovnic $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 2z = 0$ v okolí bodu $[1;1;1]$. $\big[\vec{t} = (1,-1,0)\big]$

---

12. Zjistěte, zda soustava rovnic $x\mathrm{e}^{u+v} + 2uv = 1$, $y\mathrm{e}^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$ má v okolí bodu $[1;2;0;0]$ řešení ve tvaru $u(x,y)$, $v(x,y)$ a určete $\mathrm{d}u(1,2)$, $\mathrm{d}v(1,2)$. $\left[\mathrm{d}u(1,2) = -\dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}v = -\mathrm{d}x + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}y\right]$

---

13. Určete y' a y'' pro funkci $y(x)$, která je definována implicitně rovnicíln $\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = 0$ v okolí bodu $[1;0]$. $\big[y'(1) = 1,\ y''(1) = 2\big]$

---

14. Určete y' a y'' pro funkci $y(x)$, která je definována implicitně rovnicí $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

$$\left[y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2},\ y'' = \frac{2xy}{\left(x - y^2\right)^3};\ x \neq y^2\right]$$

---

15. Určete rovnici tečny a normály ke křivce definované rovnicí $x^4 + y^4 - x^3y^3 = 9$ v bodě $[1;2]$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

$\left[\text{tečna: } x-y+1=0,\ \text{normála: } x+y-3=0\right]$

---

16. Určete $\mathrm{d}z$ a d^2z funkce $z(x,y)$, která je řešením rovnice $\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=0$ v bodě $[0;1;1]$.

$\left[\mathrm{d}z(1,2)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}^2z(1,2)=-\mathrm{d}x^2\right]$

---

17. Napište rovnici tečny k ploše $x^2+y^2+z=4$ rovnoběžné s rovinou $2x+2y+z=0$.

$[2x+2y+z-6=0]$

---

18. Určete derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0;0)$ funkce $z(x,y)$, která je řešením rovnice $x^2+y^2+z^2-2xyz-4=0$ v okolí bodu $[0;0;2]$.

$\left[z''_{xy}(0,0)=1\right]$

---

19. Nalezněte lineární aproximaci funkce $z(x,y)$, která je řešením rovnice $\left(z^2-x^2\right)xyz-y^5=5$ v okolí bodu $[1;1;2]$.

$\left[z=\dfrac{1}{11}(25-2x-y)\right]$

---

20. Vypočtěte $y'(1)$ a $y''(1)$ funkce $y(x)$, která je řešením rovnice $y^3-2xy+x^2=0$ v okolí bodu $(1;1)$ a napište Taylorův polynom stupně 2 této funkce v bodě 1.

$\left[y'(1)=0,\ y''(1)=-2;\ y=1-(x-1)^2\right]$

---

21. Funkce $y(x)$ a $z(x)$ jsou řešením soustavy rovnic $x^2-y^2+z^2=1$ a $y^2-2x+z=0$ v okolí bodu $[1;1;1]$. Určete $y'(1)$ a $z'(1)$.

$\left[y'(1)=1,\ z'(1)=0\right]$

---

22. Určete derivace až do druhého řádu funkcí $y(x)$ a $z(x)$, které jsou řešením soustavy $x+y+z=0$ a $x^3+y^3-z^3=10$ v okolí bodu $[1;1;-2]$ a napište aproximaci těchto řešení pomocí Taylorova polynomu stupně 2.

$\left[y'(1)=-1,\ z'(1)=9,\ y''(1)=-\dfrac{4}{5},\ z''(1)=\dfrac{4}{5};\ y=1-(x-1)-\dfrac{2}{5}(x-1)^2,\ z=1+\dfrac{2}{5}(x-1)^2\right]$

---

23. Určete tečný vektor ke křivce, která je grafem funkce získané jako řešení soustavy $x^2+y^2+z^2=169$ a $2x+y-z+2=0$ v okolí bodu $[3;4;12]$.

$\left[\vec{t}=(16,-27,5)\right]$

---

24. Ukažte, že soustava $x^2-u^2-v^2=0,\ \dfrac{u}{v}-y=0$ v okolí bodu $\left[\sqrt{2};1;1;1\right]$ má řešení u, v, které je funkcemi $u(x,y)$, $v(x,y)$ proměnných x a y a určete Jacobiho matici zobrazení (u,v) v bodě $\left[\sqrt{2};1\right]$.

$\left[\mathrm{d}u(\sqrt{2},1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}v(\sqrt{2},1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right]$

---

25. Určete rovnici tečné roviny k ploše definované rovnicí

$$\ln(x+y+z-2)\cdot\mathrm{e}^{x+y}=2x-y-z$$

v bodě $[1;1;1]$.

$\left[\left(\mathrm{e}^2-2\right)(x-1)+\left(\mathrm{e}^2+1\right)(y+z-1)=0\right]$

---

26. Určete derivaci $y'(x)$ funkce $y(x)$, která je řešením rovnice:

a) $xy=y^x$; b) $xy-\ln y=0$; c) $y\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$;
d) $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$; e) $x^2y=\mathrm{e}^y$ f) $\sin xy-\mathrm{e}^{xy}-x^2y=0$.

$\left[\text{a) } \dfrac{y(1-x\ln y)}{x(x-1)};\ \text{b) } \dfrac{y^2}{1-xy};\ \text{c) } \dfrac{-y}{1+\mathrm{e}^{y-x}};\ \text{d) } \dfrac{\mathrm{e}^x-y^2}{2xy-\cos y};\ \text{e) } \dfrac{2y}{x(y-1)};\ \text{f) } \dfrac{y(2x+\mathrm{e}^{xy}-\cos xy)}{x(\cos xy-\mathrm{e}^{xy}-x)}\right]$

---

27. Určete parciální derivace funkce $z(x,y)$, která je implicitně definována rovnicí

$$\text{a)}\ x^2+y^2+z^2-2xz=1 \qquad \text{b)}\ z^3+3xyz-1=0\,;$$
$$\text{c)}\ x^2+z^2-xz+xy^4-1=0\,.$$

$\left[\text{a) } z_x=1,\ z_y=\dfrac{y}{x-z};\ \text{b) } z_x=\dfrac{-yz}{z^2+xy},\ z_y=\dfrac{-xz}{z^2+xy};\ \text{c) } z_x=\dfrac{2x-z+y^4}{x-2z},\ z_y=\dfrac{4xy^3}{x-2z}\right]$

---

28. Dokažte,že funkce $z(x,y)$, která je implicitně definována rovnicí $2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z=0$ vyhovuje vztahu $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

---

29. Dokažte, že funkce $z(x,y)$, která je určena implicitně rovnicí $\left(x+\dfrac{z}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{z}{x}\right)^2=0$, vyhovuje rovnici $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

---

30. Nechť $f(x,y)$ má spojité parciální derivace 1. řádu. Ukažte, že funkce $z(x,y)$, která je definována implicitně soustavou

$$\begin{aligned}&\left(z-f^3(x,y)\right)^2=x^2\left(y^2-f^2(x,y)\right)\,,\\ &3\left(z-f^3(x,y)\right)f(x,y)=x^2\,,\end{aligned}$$

vyhovuje vztahu $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$.

---

31. Ukažte, že funkce $z(x,y)$, která je řešením soustavy

$$\begin{aligned}&f^2(x,y)x+y-zf(x,y)+f(x,y)\cos f(x,y)=0\,,\\ &f^2(x,y)x-y-f^2(x,y)\sin f(x,y)=0\,,\end{aligned}$$

kde $f(x,y)$ má spojité derivace 1. řádu, vyhovuje vztahu $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.
