Přednáška 10

Diferenciály a parciální derivace vyšších řádů

Jak jsem se už asi zmínil dříve, je diferenciální počet založen na tom, že se danou funkci $y = f(\mathbf{x})$ snažíme v okolí bodu $\mathbf{a}$ aproximovat polynomy. V minulých přednáškách jsme se snažili aproximovat danou funkci lineární funkcí. To nás vedlo k pojmu diferenciálu funkce. Nyní se budeme snažit aproximovat funkci $y = f(\mathbf{x})$ v okolí bodu $\mathbf{a}$ polynomy vyššího řádu.

Diferenciál a parciální derivace druhého řádu

Při aproximaci kvadratickými polynomy se snažíme zapsat funkci ve tvaru

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} c_i h_i + \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} h_j h_k + \eta_2(\mathbf{a},\mathbf{h}), \quad \text{kde} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\bigl|\eta_2(\mathbf{a},\mathbf{h})\bigr|}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0\,.$$

Je zřejmé, že taková funkce $f(\mathbf{x})$ musí mít v bodě $\mathbf{a}$ první diferenciál

$$\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i = \sum_{i=1}^{n} f'_{,i}(\mathbf{a})\, h_i\,,$$

tedy musí platit

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} h_j h_k + \eta_2(\mathbf{a},\mathbf{h}), \quad \text{kde} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\bigl|\eta_2(\mathbf{a},\mathbf{h})\bigr|}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0\,.$$

Měli byste vědět, že pro funkci jedné proměnné $F(t)$, která má druhou derivaci, je taková aproximace dána Taylorovým polynomem druhého řádu, tj.

$$F(a+\tau) = F(a) + F'(a)\tau + \tfrac{1}{2}\,F''(a)\tau^2 + \eta_2(a,\tau), \quad \text{kde} \quad \lim_{\tau\to 0} \frac{\bigl|\eta_2(a,\tau)\bigr|}{\tau^2} = 0\,. \qquad (1)$$

V analogii s tímto vztahem budeme pro funkci n proměnných psát

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \eta_2(\mathbf{a},\mathbf{h})$$

a kvadratickou funkci $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a},\mathbf{h})$ proměnné $\mathbf{h}$ nazývat diferenciálem funkce $f(\mathbf{x})$ druhého řádu v bodě $\mathbf{a}$.

Podobně jako pro derivaci podle vektoru vezmeme $\mathbf{h}$ pevné a definujme funkci jedné proměnné $F(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$. Pokud má tato funkce v bodě $t = 0$ derivaci druhého řádu, platí pro ní podle (1)

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \tfrac{1}{2}\,F''(0)t^2 + \eta_2(0,t)\,.$$

Protože $F(0) = f(\mathbf{a})$ a předpokládáme, že je funkce $f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$, je

$$F'(0) = f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, h_i\,.$$

Pro druhou derivaci funkce $F(t)$ dostaneme formálně

$$F''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F'(t)\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\, h_i\Big) = \sum_{i,k}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\, h_i h_k \,.$$

Tedy pro $t = 0$ je formálně

$$F''(0) = \sum_{i,k}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{a})\, h_i h_k \,.$$

Aby tyto úvahy nebyly pouze formální, budeme požadovat, aby byly všechny funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ diferencovatelné v bodě $\mathbf{a}$. To nás vede k následující definici.

Definice. Řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *diferenciál druhého řádu* nebo krátce *druhý diferenciál*, jestliže

1. funkce $f(\mathbf{x})$ má diferenciál v nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$,
2. všechny parciální derivace $f'_{,i}(\mathbf{x})$ jsou diferencovatelné v bodě $\mathbf{a}$.

Druhý diferenciál funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ budeme značit $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ a je to kvadratická forma (funkce) proměnné $\mathbf{h}$

$$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}f(\mathbf{x}, \mathbf{h})\big)(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{a})\, h_i h_k \,, \tag{2}$$

kde $\mathrm{d}f(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ považujeme za funkci proměnné $\mathbf{x}$.

Pro zobrazení $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ do $\mathbb{R}^k$ definujeme druhý diferenciál po složkách, tj. zobrazení $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ má druhý diferenciál v bodě $\mathbf{a}$ právě tehdy, když každá jeho složka $F_r(\mathbf{x})$, $r = 1, 2, \ldots, k$, má druhý diferenciál v bodě $\mathbf{a}$. Diferenciál každé složky je pak dán vztahem (2), kde nahradíme funkci $f(\mathbf{x})$ funkcí $F_r(\mathbf{x})$.

Ze vztahu (2) vidíme, že pro jeho výpočet budeme potřebovat parciální derivace parciálních derivací, tzv. parciální derivace druhého řádu, neboli druhé parciální derivace.

Definice. Nechť existuje parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ funkce $f(\mathbf{x})$ v nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$. Jestliže existuje parciální derivace $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{a})$, nazýváme toto číslo *druhá parciální derivace* funkce $f(\mathbf{x})$ podle proměnných x_i a x_k v bodě $\mathbf{a}$.

Pro druhé parciální derivace budeme často používat značení

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{a}) = f''_{,ki}(\mathbf{a}) \,.$$

`Poznámka.` V obecném případě je nutné zachovávat pořadí, ve kterém derivujeme, tj. obecně neplatí $f''_{,ki}(\mathbf{a}) = f''_{,ik}(\mathbf{a})$. Ale například vztah (2) pro druhý diferenciál už na pořadí derivací nezávisí. Pro funkce, které mají druhý diferenciál platí následující důležitá věta.

Věta. Nechť je $f(x_1, x_2)$ funkce dvou proměnných, jejíž parciální derivace $f'_{,1}(\mathbf{x})$ a $f'_{,2}(\mathbf{x})$ existují v nějakém okolí bodu $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Jestliže mají funkce $f'_{,1}(\mathbf{x})$ a $f'_{,2}(\mathbf{x})$ diferenciál v bodě $\mathbf{a}$, je $f''_{,12}(\mathbf{a}) = f''_{,21}(\mathbf{a})$.

Důkaz: Nechť parciální derivace $f'_{,1}(\mathbf{x})$ a $f'_{,2}(\mathbf{x})$ existují na množině $K_\delta = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta)$ pro $0 < h < \delta$ uvažujme funkci

$$F(h) = \frac{1}{h^2}\Big(f(a_1 + h, a_2 + h) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + h) + f(a_1, a_2)\Big).$$

Zvolme h pevné a označme $\varphi(x_1) = f(x_1, a_2 + h) - f(x_1, a_2)$. Protože $F(h) = \dfrac{1}{h^2}\big(\varphi(a_1 + h) - \varphi(a_1)\big)$, plyne z Lagrangeovy věty o střední hodnotě, že existuje $\Theta \in (0, 1)$ takové, že

$$F(h) = \frac{\varphi'(a_1 + \Theta h)}{h}.$$

A protože $\varphi'(x_1) = f'_{,1}(x_1, a_2 + h) - f'_{,1}(x_1, a_2)$, dostaneme

$$F(h) = \frac{1}{h}\Big(f'_{,1}\big(a_1 + \Theta h, a_2 + h\big) - f'_{,1}\big(a_1 + \Theta h, a_2\big)\Big).$$

Protože je parciální derivace $f'_{,1}(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$, je

$$\begin{aligned} f'_{,1}\big(a_1 + \Theta h, a_2 + h\big) &= f'_{,1}(\mathbf{a}) + f''_{,11}(\mathbf{a})\Theta h + f''_{,21}(\mathbf{a})h + \eta\big(\mathbf{a}, (\Theta h, h)\big), \\ f'_{,1}\big(a_1 + \Theta h, a_2\big) &= f'_{,1}(\mathbf{a}) + f''_{,11}(\mathbf{a})\Theta h + \eta\big(\mathbf{a}, (\Theta h, 0)\big). \end{aligned}$$

Proto je

$$F(h) = f'_{,21}(\mathbf{a}) + \frac{\eta\big(\mathbf{a}, \Theta h, h\big)}{h} - \frac{\eta\big(\mathbf{a}, (\Theta h, 0)\big)}{h}.$$

Když použijeme toho, že $\displaystyle\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\eta(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$, dostaneme v limitě

$$\lim_{h\to 0_+} F(h) = f''_{,21}(\mathbf{a}).$$

Analogicky, pouze s tím rozdílem, že místo funkce $\varphi(x_1)$ zavedeme funkci $\psi(x_2) = f(a_1 + h, x_2) - f(a_1, x_2)$, se ukáže, že

$$\lim_{h\to 0_+} F(h) = f''_{,12}(\mathbf{a}).$$

Srovnáním těchto limit pak dostaneme uvedené tvrzení.

Důsledek. Má-li funkce $f(\mathbf{x})$ druhý diferenciál v bodě $\mathbf{a}$, platí pro každé $i, k = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big)(\mathbf{a}).$$

Důkaz: Protože funkce dvou proměnných

$$F(x_i, x_k) = f\big(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\big)$$

má diferenciál druhého řádu, splňuje všechny předpoklady předchozí věty, ze které plyne bezprostředně uvedené tvrzení.

Protože pro funkce, které mají druhý diferenciál jsou parciální derivace záměnné, tj. nezávisí na pořadí, ve kterém derivujeme, lze vztah (2) psát ve tvaru

$$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} f''_{,ii}(\mathbf{a})\, h_i^2 + \sum_{i\neq k} f'_{,ik}(\mathbf{a})\, h_i k_k = \sum_{i=1}^{n} f''_{,ii}(\mathbf{a})\, h_i^2 + 2 \sum_{1\le i<k\le n} f''_{,ik}(\mathbf{a})\, h_i h_k\,. \tag{3}$$

Velmi často se i pro diferenciály druhého řádu používá pro nezávisle proměnné h_i značka $\mathrm{d}x_i$. Pak má vztah (3) v obecném bodě $\mathbf{x}$ tvar

$$\mathrm{d}f = \sum_{i,k=1}^{n} f''_{,ik}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k = \sum_{i=1}^{n} f''_{,ii}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i^2 + 2 \sum_{1\le i<k\le n} f''_{,ik}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k\,. \tag{4}$$

Speciálně pro funkci tří proměnných $f(x,y,z)$ je

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = f''_{,xx}\,\mathrm{d}x^2 + f''_{,yy}\,\mathrm{d}y^2 + f''_{,zz}\,\mathrm{d}z^2 + 2f''_{,xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2f''_{,xz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + 2f''_{,yz}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

`Poznámka.` Existuje ještě jeden užitečný zápis druhého diferenciálu funkce $f(\mathbf{x})$. Zavedeme tzv. *Hessovu matici*

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \big(H_{ik}(\mathbf{x})\big) = \big(f''_{ik}(\mathbf{x})\big), \quad \text{tj.} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}) & f''_{12}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{1n}(\mathbf{x}) \\ f''_{21}(\mathbf{x}) & f''_{22}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(\mathbf{x}) & f''_{n2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Ze záměnnosti druhých parciálních derivací plyne, že Hessova matice je symetrická, tj. platí $\mathbf{H}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})$.

Když ještě zavedeme sloupcovou matici

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix},$$

lze druhý diferenciál (3), resp. (4), zapsat jako

$$\mathrm{d}^2 f = \mathbf{h}^T\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{h}\,, \quad \text{resp.} \quad \mathrm{d}^2 f = \big(\mathrm{d}\mathbf{x}\big)^T\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

kde $\mathbf{h}^T$, resp. $\big(\mathrm{d}\mathbf{x}\big)^T$ je transponovaná matice (tj. řádek) k matici (sloupci) $\mathbf{h}$, resp. $\mathrm{d}\mathbf{x}$.

Tento tvar druhého diferenciálu se nám bude hodit později.

Uvedená věta o záměnnosti parciálních derivací vyžaduje existenci diferenciálu všech prvních parciálních derivací. Tento předpoklad se dá v konkrétních případech poměrně složitě ověřit. Jedna z možností, jak zajistit existenci druhého diferenciálu, dává následující věta.

Věta. Nechť má funkce $f(\mathbf{x})$ v nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ všechny parciální derivace druhého řádu, které jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$. Pak má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál druhého řádu.

DŮKAZ: Protože jsou všechny druhé parciální derivace spojité v bodě $\mathbf{a}$, mají podle věty z minulé přednášky všechny parciální derivace $f'_{,i}(\mathbf{x})$ diferenciál v bodě $\mathbf{a}$. Tedy funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ druhý diferenciál.

Z uvedené věty plyne, že pokud má funkce $f(\mathbf{x})$ na otevřené množině M spojité všechny druhé parciální derivace, mají na M druhý diferenciál a pro každé $\mathbf{x} \in M$ platí $f''_{,ik}(\mathbf{x}) = f''_{,ki}(\mathbf{x})$. Pro množinu všech funkcí $f(\mathbf{x})$, které mají na otevřené množině M spojité všechny parciální derivace druhého řádu, se zavádí speciální označení.

Definice. Jestliže má zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace druhého řádu, tj. všechny jeho složky $f_r(\mathbf{x})$ mají na množině M spojité parciální derivace druhého řádu, nazývá se *zobrazení třídy* C_2 na množině M.

Množina všech zobrazení třídy C_2 na množině M se obvykle značí $C_2(M)$.

Tvrzení předchozí věty lze formulovat také tak, že zobrazení třídy $C_2(M)$ má na množině M diferenciál druhého řádu a všechny jeho parciální derivace druhého řádu jsou záměnné.

V minulé přednášce jsme zavedli zobrazení třídy $C_0(M)$ a $C_1(M)$. Snadno se ukáže, že platí inkluze $C_2(M) \subset C_1(M) \subset C_0(M)$.

Ale abychom ověřili předpoklady poslední věty, musíme znát obě parciální derivace $f''_{,ik}(\mathbf{a})$ a $f''_{,ki}(\mathbf{a})$. Z toho důvodu nemá uvedená věta pro zjišťování záměnnosti parciálních derivací praktický význam. Bez důkazu (i když ten není až tak složitý) uvedeme ještě jednu větu.

Věta. Nechť v nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ existují parciální derivace $f'_{,i}(\mathbf{x})$ a $f'_{,k}(\mathbf{x})$ a nechť je $f''_{,ki}(\mathbf{x}) = \big(f'_{,i}\big)'_{,k}(\mathbf{x})$ spojitá v bodě $\mathbf{a}$. Pak v bodě $\mathbf{a}$ existuje $f''_{,ik}(\mathbf{a}) = \big(f'_{,k}\big)'_{,i}(\mathbf{a})$ a platí $f''_{,ik}(\mathbf{a}) = f''_{ki}(\mathbf{a})$.

Příklad. Najděte druhý diferenciál funkce $f(x, y) = x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ v bodě $\mathbf{a} = [1, 1]$.

ŘEŠENÍ: Pro parciální derivace funkce $f(x, y)$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,. \tag{5}$$

Druhé parciální derivace funkce $f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2y^3}{(x^2 + y^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \tag{6}$$

jsou spojité na celém $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$. Proto existuje druhý diferenciál funkce $f(x, y)$ v bodě $[1, 1]$ a podle (3) nebo (4) je

$$\mathrm{d}^2 f(1, 1) = -\tfrac{1}{2}\, h_1^2 + h_1 h_2 - \tfrac{1}{2}\, h_2^2 = -\tfrac{1}{2}\, \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \tfrac{1}{2}\, \mathrm{d}y^2\,.$$

Parciální derivace a diferenciál k–tého řádu

Parciální derivace k–tého řádu budeme definovat jako parciální derivaci parciální derivace $(k-1)$–ního řádu.

Definice. Jestliže existuje parciální derivace

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}}\partial x_{i_{k-2}}\dots\partial x_{i_1}}\right)(\mathbf{a}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k-1}}\dots\partial x_{i_1}}(\mathbf{a}) = f^{(k)}_{,i_k i_{k-1}\dots i_1}(\mathbf{a})\,,$$

nazývá se *parciální derivace* funkce $f(\mathbf{x})$ řádu k podle proměnných x_{i_1}, x_{i_2}, $\dots$, x_{i_k} v bodě $\mathbf{a}$.

Stejně jako pro parciální derivace druhého řádu závisí obecně parciální derivace k–tého řádu na pořadí, ve kterém derivujeme. Ale platí věty analogické uvedeným větám pro druhou derivaci, které zaručují, že jsou parciální derivace záměnné.

Věta. Nechť jsou všechny parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ do řádu $(k-2)$ včetně diferencovatelné v nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ a všechny $(k-1)$–ní parciální derivace mají diferenciál v bodě $\mathbf{a}$. Pak existují všechny parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ do řádu k včetně a nezávisí na pořadí, ve kterém derivujeme.

Věta. Nechť v nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ existují všechny parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ až do řádu k včetně a všechny parciální derivace řádu k jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$. Pak jsou všechny parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ až do řádu k včetně záměnné.

Z praktického hlediska je nejdůležitější případ, kdy má funkce $f(\mathbf{x})$ na otevřené množině M spojité všechny parciální derivace až do řádu k včetně. Pro takové funkce zavádíme speciální označení.

Definice. Jestliže má zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace do řádu k včetně, tj. všechny jeho složky $f_r(\mathbf{x})$ mají na množině M spojité parciální derivace do řádu k, nazývá se *zobrazení třídy* C_k na množině M.

Množina všech zobrazení třídy C_k na množině M se obvykle značí $C_k(M)$.

Z uvedených vět plyne

Věta. Je-li $f(\mathbf{x}) \in C_k(M)$, jsou všechny parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ až do řádu k včetně v každém bodě množiny M záměnné.

`Poznámka`. Jestliže jsou všechny parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ do řádu k v bodě $\mathbf{a}$ záměnné, používá se obvykle pro parciální derivaci zkrácené označení

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_n^{k_n}}(\mathbf{a})\,,$$

kde $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ a k_1 je počet parciálních derivací podle proměnné x_1, k_2 počet parciálních derivací podle proměnné x_2 atd. Přitom pro $k_i = 0$ se symbol ∂x_i^0 vynechává. Například

$$f^{(7)}_{,1214514}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^7 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_1\partial x_4\partial x_5\partial x_1\partial x_4}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^7 f}{\partial x_1^3\partial x_2\partial x_4^2\partial x_5}(\mathbf{a})\,.$$

Nyní zavedeme diferenciál k–tého řádu. Definice je v podstatě zobecnění definice diferenciálu druhého řádu, který byl definován jako diferenciál diferenciálu prvního řádu.

Definice. Řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *diferenciál řádu k* nebo *diferenciál k–tého řádu*, jestliže:

1. všechny parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ až do řádu $(k-2)$ včetně jsou diferencovatelné v nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$,
2. všechny parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ řádu $(k-1)$ jsou diferencovatelné v bodě $\mathbf{a}$.

Diferenciál řádu k funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$, tj. $\mathrm{d}^k f(\mathbf{a},\mathbf{h})$, je pak definován vztahem

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}^{k-1} f(\mathbf{x},\mathbf{h})\big)(\mathbf{a},\mathbf{h})\,, \tag{7}$$

kde diferenciál $(k-1)$–ního řádu považujeme za funkci proměnné $\mathbf{x}$.

Diferenciál k-tého řádu zobrazení $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je definován po složkách.

`Poznámka.` Z definice diferenciálu k–tého řádu (7) plyne, že diferenciál k–tého řádu v bodě $\mathbf{a}$ je mocninná funkce vektorové proměnné $\mathbf{h}$ stupně k.

Přímo z definice diferenciálu k–tého řádu a uvedených vět o záměnnosti parciálních derivací plyne

Věta. Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál k–tého řádu, jsou všechny její parciální derivace do řádu k včetně v bodě $\mathbf{a}$ záměnné.

Snadné důsledky definice diferenciálu k–tého řádu a předchozích vět jsou následující dvě věty.

Věta. Má-li zobrazení $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ na množině M diferenciál řádu k, tj. má diferenciál řádu k v každém bodě množiny M, je třídy $C_{k-1}(M)$.

Věta. Je-li zobrazení $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in C_k(M)$, má na množině M diferenciál k–tého řádu.

Z těchto vět plyne inkluze

$$C_0(M) \supset C_1(M) \supset C_2(M) \supset \ldots \supset C_k(M) \supset \ldots\,.$$

Definice. Zobrazení $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ se nazývá *třídy $C_\infty(M)$* nebo *hladké* na M, jestliže je třídy $C_k(M)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

`Poznámka.` Se zobrazeními třídy $C_\infty(M)$ se už docela dobře počítá. Ale jsou ještě lepší zobrazení, které se dají v nějakém okolí každého bodu $\mathbf{x} \in M$ vyjádřit pomocí mocninné řady. Taková zobrazení se nazývají *analytická* a obvykle se jejich množina značí $C_\omega(M)$.

Jak již víme, diferenciály prvního řádu lze vyjádřit pomocí parciálních derivací prvního řádu jako

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x},\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\, h_i\,.$$

Z definice (7) plyne pro diferenciál druhého řádu

$$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x},\mathbf{h}) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{x})\, h_i h_k$$

a obecně dostaneme pro diferenciál k–tého řádu

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{x},\mathbf{h}) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x})\, h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k}\,. \tag{8}$$

Jestliže si uvědomíme, že jsou parciální derivace v (8) záměnné, vidíme, že členy, které se liší pouze pořadím parciálních derivací, jsou stejné. Počet permutací k–prvkové množiny je $k!$. Jestliže se parciálních derivacích objevuje index x_1 k_1–krát, počet derivací podle druhé proměnné k_2–krát atd., nezmění se permutace, jestliže permutujeme k_1–prvkovou množinu, která obsahuje parciální derivace podle x_1, k_2–prvkovou množinu, která obsahuje parciální derivace podle x_2 atd. Po tomto uspořádání lze (8) zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{x},\mathbf{h}) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_n!}\, \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}(\mathbf{x})\, h_1^{k_1} h_2^{k_2} \ldots h_n^{k_n}\,. \tag{9}$$

`Poznámka.` Pro funkci dvou proměnných má vztah (9) tvar

$$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x},\mathbf{h}) = \sum_{r+s=k} \frac{k!}{r!\cdot s!}\, \frac{\partial^k f}{\partial x_1^r \partial x_2^s}(\mathbf{x})\, h_1^r h_2^s = \sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!\cdot (k-r)!}\, \frac{\partial^k f}{\partial x_1^r \partial x_2^{k-r}}(\mathbf{x})\, h_1^r h_2^{k-r} =$$
$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^r \partial x_2^{k-r}}(\mathbf{x})\, h_1^r h_2^{k-r}\,,$$

který připomíná binomickou známou větu

$$(a_1 + a_2)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a_1^r a_2^{k-r}\,.$$

Proto lze formálně psát k–tý diferenciál funkce dvou proměnných ve tvaru

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{x},\mathbf{h}) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^k f(\mathbf{x})\,.$$

Pro součet n členů má binomická věta tvar

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^k = \sum_{k_1+k+2+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_n!}\, a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}\,,$$

a proto lze opět formálně psát

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{x},\mathbf{h}) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(\mathbf{x})\,.$$

Parciální derivace a difereciály vyšších řádu složené funkce

Nyní se budeme zabývat parciálními derivacemi složené funkce. Z minulé přednášky víme, že je-li $F(\mathbf{y})$ diferencovatelná definovaná na množině $Y \subset \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ diferencovatelné zobrazení množiny $X \subset \mathbb{R}^n$ do množiny Y, je složená funkce $f(\mathbf{x}) = F\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)$ diferencovatelná na množině X a pro její parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial y_r}\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\, \frac{\partial y_r}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,. \tag{10}$$

Jestliže je $F(\mathbf{y}) \in C_2(Y)$ a $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in C_2(X)$ (ale stačí i slabší předpoklady), můžeme rovnost (10) derivovat podle x_k. A protože jsou za uvedených předpokladů všechny parciální derivace druhého řádu záměnné, dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_r}\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\, \frac{\partial y_r}{\partial x_i}(\mathbf{x})\Big) = \\
&= \sum_{r=1}^{m} \bigg(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_r}\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\Big)\frac{\partial y_r}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F}{\partial y_r}\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\, \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial y_r}{\partial x_i}(\mathbf{x})\Big)\bigg) = \\
&= \sum_{r=1}^{m} \bigg(\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_s}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_r}\Big)\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\, \frac{\partial y_s}{\partial x_k}(\mathbf{x})\, \frac{\partial y_r}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F}{\partial y_r}\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\, \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{x})\bigg) = \\
&= \sum_{r,s=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial y_r \partial y_s}\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\, \frac{\partial y_s}{\partial x_k}(\mathbf{x})\, \frac{\partial y_r}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial y_r}\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\, \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{x})\,,
\end{aligned}$$

kde jsme pro parciální derivaci $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\Big(\dfrac{\partial F}{\partial y_r}\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\Big)$ museli použít vztah pro derivaci složené funkce.

Pro parciální derivace vyššího řádu platí následující věta:

Věta. Nechť jsou $X \subset \mathbb{R}^n$ a $Y \subset \mathbb{R}^m$ otevřené množiny. Nechť je $\mathbf{g} : X \to Y$ zobrazení třídy $C_k(X)$ a funkce $F : Y \to \mathbb{R}$ je třídy $C_k(Y)$. Pak je složená funkce $f = F \circ \mathbf{g} : X \to \mathbb{R}$ třídy $C_k(X)$.

Parciální derivace vyššího řádu složené funkce je počítají podobně, jak jsme výše ukázali pro parciální derivace druhého řádu.

Příklad. Nechť je funkce $F(u, v) \in C_2(\mathbb{R}^2)$ a funkce $f(x, y)$ je definována vztahem $f(x, y) = F\big(u(x, y), v(x, y)\big)$, kde $u(x, y) = x^2 + y^2$ a $v(x, y) = xy$. Vyjádřete parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ pomocí parciálních derivací $\dfrac{\partial F}{\partial u}$, $\dfrac{\partial F}{\partial v}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^F}{\partial u \partial v}$ a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$.

Řešení: Nejprve najdeme parciální derivace

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = y\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x\,,$$

které budeme při výpočtu často potřebovat. Podle věty o parciální derivaci složené funkce dostaneme pro parciální derivace prvního řádu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\,\frac{\partial F}{\partial u} + y\,\frac{\partial F}{\partial v}\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\,\frac{\partial F}{\partial u} + x\,\frac{\partial F}{\partial v}\,.
\end{aligned}$$

Druhé parciální derivace získáme tak, že derivujeme první parciální derivace. Musíme si ale uvědomit, že pokud derivujeme funkci F nebo její derivace, jedná se o derivaci složené funkce. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(2x\,\frac{\partial F}{\partial u}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(y\,\frac{\partial F}{\partial v}\Big) = 2\,\frac{\partial F}{\partial u} + 2x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big) + y\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big) = \\
&= 2\,\frac{\partial F}{\partial u} + 2x\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= 2\,\frac{\partial F}{\partial u} + 2x\left(2x\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\right) + y\left(2x\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + y\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right) = \\
&= 2\,\frac{\partial F}{\partial u} + 4x^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 4xy\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + y^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\,.
\end{aligned}$$

Pro další parciální derivace druhého řádu už nebudeme tak podrobně rozepisovat jednotlivé kroky.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2x\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big) + y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big) + \frac{\partial F}{\partial v} = \\
&= 4xy\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2x^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 2y^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + xy\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{\partial F}{\partial v} = \\
&= 4xy\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\big(x^2 + y^2\big)\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + xy\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{\partial F}{\partial v}\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2\,\frac{\partial F}{\partial u} + 2y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big) + x\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big) = \\
&= 2\,\frac{\partial F}{\partial u} + +4y^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 4xy\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + x^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\,.
\end{aligned}$$

Taylorův polynom funkce více proměnných

Na závěr této přednášky uvedeme analogii Taylorova vzorce pro funkci n proměnných, což je vlastně nahrazení funkce $f(\mathbf{x})$ v okolí bodu $\mathbf{a}$ polynomem, o kterém jsme se zmínili na začátku přednášky.

Věta. Nechť má funkce $f(\mathbf{x})$ v každém bodě úsečky $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{h}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ diferenciál $(k+1)$–ního řádu. Pak existuje $\Theta \in (0,1)$ takové, že

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \ldots + \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \frac{1}{(k+1)!}\,\mathrm{d}^{k+1} f(\mathbf{a}+\Theta\mathbf{h},\mathbf{h})$$

Důkaz: Uvažujme funkci $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Protože má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodech úsečky $\mathbf{a} + t\mathbf{h}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ diferenciál $(k+1)$–ního řádu, má v těchto bodech také funkce $F(t)$ derivace až do řádu $(k+1)$. Podle Taylorova vzorce pro funkci jedné reálné proměnné existuje $\Theta \in (0,1)$ takové, že

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}\,t + \frac{F''(0)}{2!}\,t^2 + \ldots + \frac{F^{(k)}(0)}{k!}\,t^k + \frac{F^{(k+1)}(\Theta)}{(k+1)!}\,.$$

A protože $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ a funkce $f(\mathbf{x})$ mají diferenciály až do řádu $(k+1)$, platí $F^{(r)}(t) = \mathrm{d}^r f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}, \mathbf{h})$ pro každé $r = 0, 1, \ldots, k+1$.

Bez důkazu uvedeme ještě jednu větu, které ukazuje, jak lze pomocí diferenciálů aproximovat funkci n proměnných polynomy.

Věta. Nechť je $f(\mathbf{x}) \in C_k(M)$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $\mathbf{a} \in M$. Pro každé $\mathbf{h}$, pro které je $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in M$ platí

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \ldots + \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \eta_k(\mathbf{a},\mathbf{h})\,,$$

kde $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \dfrac{\bigl|\eta_k(\mathbf{a},\mathbf{h})\bigr|}{\|\mathbf{h}\|^k} = 0.$

Definice. Nechť má funkce $f(\mathbf{x})$ a v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál k–tého řádu. Pak se polynom

$$T_k\bigl(\mathbf{x}\bigr) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a},\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \ldots + \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k f(\mathbf{a},\mathbf{x}-\mathbf{a})$$

stupně k v proměnných x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, nazývá *Taylorův polynom stupně k* funkce $f(\mathbf{x})$ se středem v bodě $\mathbf{a}$.

Příklad. Najděte Taylorův polynom stupně 2 funkce $f(x,y) = x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ se středem v bodě $\mathbf{a} = [1,1]$.

Řešení: Parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x,y)$ jsme našli v (5) a (6). Protože

$$\begin{aligned} &f(1,1) = \tfrac{1}{4}\,\pi\,, && f'_{,x}(1,1) = \tfrac{1}{4}\,\pi - \tfrac{1}{2}\,, && f'_{,y}(1,1) = \tfrac{1}{2}\,,\\ &f''_{,xx}(1,1) = -\tfrac{1}{2}\,, && f''_{,xy}(1,1) = \tfrac{1}{2}\,, && f''_{,yy}(1,1) = -\tfrac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f\bigl([1,1], x-1, y-1\bigr) &= \bigl(\tfrac{1}{4}\,\pi - \tfrac{1}{2}\bigr)(x-1) + \tfrac{1}{2}\,(y-1)\,,\\ \mathrm{d}^2 f\bigl([1,1], x-1, y-1\bigr) &= -\tfrac{1}{2}\,(x-1)^2 + (x-1)(y-1) - \tfrac{1}{2}\,(y-1)^2\,, \end{aligned}$$

Taylorův polynom stupně 2 se středem v bodě $[1,1]$ je

$$T_2(x,y) = \tfrac{1}{4}\,\pi + \tfrac{1}{4}\,(\pi-2)(x-1) + \tfrac{1}{2}\,(y-1) - \tfrac{1}{4}\,(x-1)^2 + \tfrac{1}{2}\,(x-1)(y-1) - \tfrac{1}{4}\,(y-1)^2\,.$$