Přednáška 11

Funkce definované implicitně a regulární zobrazení

Funkce definované implicitně

V první části této přednášky se budeme zabývat následujícím problémem:
Je dáno s spojitých funkcí $(r+s)$ proměnných

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s) = F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Otázka je, kdy existují, alespoň lokálně, tj. v okolí daného bodu $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, spojité funkce $y_1 = f_1(\mathbf{x})$, $y_2 = f_2(\mathbf{x})$, …, $y_s = f_s(\mathbf{x})$ takové, že pro každé $k = 1, 2, \ldots, s$ platí

$$F_k\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big) = F_k\big(x_1, x_2, \ldots, x_r, f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_s(\mathbf{x})\big) = 0$$

a jak najít jejich diferenciály, resp. parciální derivace.

Jak se obecně postupuje při řešení tohoto problému, ukážeme na nejjednodušším příkladě $r = s = 1$.

Příklad. Uvažujme rovnici

$$F(x, y) = 2y^3 - xy^2 + 2x^2 - 5xy + y^2 + 2x - y = (2y - x - 1)(y^2 - 2x + y) = 0. \qquad (1)$$

Naším úkolem je najít spojité funkce $y = y(x)$ takové, že

$$F\big(x, y(x)\big) = 2y^3(x) - xy^2(x) + 2x^2 - 5xy(x) + y^2(x) + 2x - y(x) = 0.$$

Je zřejmé, že body, které odpovídají řešení rovnice (1) leží na přímce $2y - x - 1 = 0$ nebo na parabole $y^2 - 2x + y = 0$. Proto má rovnice (1) pro y řešení

$$\begin{array}{llll} y_1 = \frac{1}{2}(x+1) & \text{pro} & x \in \mathbb{R} & \text{nebo} \\ y_2 = \frac{1}{2}\big(-1 + \sqrt{8x+1}\big) & \text{pro} & x \geq -\frac{1}{8} & \text{nebo} \\ y_3 = \frac{1}{2}\big(-1 - \sqrt{8x+1}\big) & \text{pro} & x \geq -\frac{1}{8}. & \end{array}$$

Obecně bychom za hodnotu $y(x)$ pro každé $x \geq -\frac{1}{8}$ mohli zvolit zcela libovolně jedno z těchto tří čísel. Například funkce $y(x)$ definovaná předpisem

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & \text{pro} \quad x \leq 0, \\ \frac{1}{2}\big(-1 + \sqrt{8x+1}\big) & \text{pro} \quad x > 0, \quad x \text{ je racionální}, \\ \frac{1}{2}\big(-1 - \sqrt{8x+1}\big) & \text{pro} \quad x > 0, \quad x \text{ je iracionální}, \end{cases}$$

je řešením rovnice (1).

Nás ale nebudou zajímat obecná řešení rovnic, ale pouze řešení, která jsou spojitá v okolí daného x_0. Pro takové x_0 vybereme jedno z řešení rovnice (1). Například pro $x_0 = 6$ musí mít y jednu z hodnot $y_1(6) = \frac{7}{2}$ nebo $y_2(6) = 3$ nebo $y_3(6) = -4$. Zvolme například řešení $y(6) = 3$, které odpovídá bodu $X_0 = [x_0; y_0] = [6; 3]$, který leží na horní části paraboly $y^2 + y = 2x$.

Budeme tedy hledat funkci $y = y(x)$, která splňuje rovnici (1), pro kterou platí $y(6) = 3$ a která je v bodě $x_0 = 6$ spojitá. Protože hledáme spojitou funkci, musíme nějakým způsobem zaručit, že pro dostatečně malá $\delta > 0$ nepřejde řešení pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (6 - \delta, 6 + \delta)$ z horní části paraboly na její dolní čast nebo na přímku. Proto budeme pro tato x hledat řešení rovnice (1) pouze v dostatečně malém okolí bodu bodu y_0, tj. pouze pro $y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta) = (3 - \Delta, 3 + \Delta)$, kde $\Delta > 0$ je dostatečně malé na to, aby se obdélník $\langle 6 - \delta, 6 + \delta\rangle \times \langle 3 - \Delta, 3 + \Delta\rangle$ protínal křivkou danou rovnicí (1) pouze v horní části paraboly, ale dostatečně velké na to, aby měla rovnice (1) pro každé $x \in (3-\delta, 3+\delta)$ řešení v intervalu $(3-\Delta, 3+\Delta)$. Toto řešení je pak jediné a rovné funkci $y = y(x) = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{8x+1}\right)$.

Tyto úvahy selhávají ve vrcholu paraboly, tj. v bodě $V = \left[-\frac{1}{8}; -\frac{1}{2}\right]$, kde nemůžeme rozhodnou, zda řešení $y = y(x)$ bereme z dolní nebo horní části paraboly, a v průsečících paraboly s přímkou, tj. v bodech $P_+ = \left[3; 2\right]$ a $P_- = [1; 1]$, ve kterých nevíme, zda se máme pohybovat po parabole nebo po přímce. Pro takové body $[x_1; y_1]$ je charakteristické, že pro ně platí nejen rovnice (1), ale také

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1) = 6y_1^2 - 2x_1y_1 - 5x_1 + 2y_1 - 1 = 0\,.$$

Mimo těchto bodů je možné pro každý bod $[x_0; y_0]$, pro který platí rovnice (1) najít $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ má rovnice (1) právě jedno řešení, které leží v intervalu $(y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$. Toto řešení definuje v okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ funkci $y = y(x)$ takovou, že $F\big(x, y(x)\big) = 0$.

Tato funkce je diferencovatelná a pro její diferenciál platí rovnost

$$\mathrm{d}F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0\,. \tag{2}$$

A protože $F'_y(x, y) \neq 0$, plyne z této rovnosti

$$\mathrm{d}y(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\,\mathrm{d}x = y'(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{neboli} \quad y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\,. \tag{3}$$

V našem případě je rovnost (2)

$$\big(-y^2 + 4x - 5y + 2\big)\mathrm{d}x + \big(6y^2 - 2xy - 5x + 2y - 1\big)\mathrm{d}y = 0\,.$$

Pomocí derivace funkce $y(x)$ lze tuto rovnici psát jako

$$-y^2+4x-5y+2+\big(6y^2-2xy-5x+2y-1\big)y' = 0\,, \quad \text{tj.} \quad y'(x) = \frac{y^2 - 4x + 5y - 2}{6y^2 - 2xy - 5x + 2y - 1}\,.$$

Speciálně v bodě $[x_0; y_0] = [6; 3]$ je

$$2\,\mathrm{d}x - 7\,\mathrm{d}y = 0\,, \quad \text{neboli} \quad \mathrm{d}y = \tfrac{2}{7}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{tj.} \quad y'(6) = \tfrac{2}{7}\,.$$

O správnosti tohoto výsledku se můžete přesvědčit přímo derivací funkce $y = y(x) = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{8x+1}\right)$ v bodě $x = 6$.

Mnohem složitější úvahy vedou k tzv. větě o implicitních funkcích. Uvedeme ji nejprve pro jednu rovnici $(n+1)$ proměnných $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$.

Věta. Nechť je $A = [\mathbf{a}, b] = [a_1, a_2, \dots, a_n; b]$. Nechť je funkce $F(\mathbf{x}, y) = F(x_1, \dots, x_n, y)$ spojitá v jistém okolí bodu A a má v tomto okolí parciální derivaci $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, y)$, která je spojitá v bodě A. Nechť platí $F(\mathbf{a}, b) = 0$ a $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$.
Pak existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že ke každému $\mathbf{x} \in \mathcal{I} = \big\{\mathbf{x}\,;\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta\big\}$ odpovídá právě jedno $y \in \mathcal{J} = \big\{y\,;\ |y - b| < \Delta\big\}$ takové, že $F(\mathbf{x}, y) = 0$.
Tím je definována funkce

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,$$

která je spojitá na množině $\mathcal{I}$.
Jestliže má funkce $F(\mathbf{x}, y)$ na množině $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ diferenciál k–tého řádu, má funkce $y = \varphi(\mathbf{x})$ diferenciál k–tého řádu na množině $\mathcal{I}$.
Jestliže je funkce $F(\mathbf{x}, y) \in C_k(\mathcal{I} \times \mathcal{J})$, je i funkce $y = \varphi(\mathbf{x}) \in C_k(\mathcal{I})$.

Pro funkce definované implicitně lze najít jejich derivace nebo diferenciály, i když samotné funkce explicitně vyjádřit neumíme. V praxi postupujeme tak, že najdeme první diferenciál funkce $F(\mathbf{x}, y)$,

$$\mathrm{d}F(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}x_i + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}y = 0 \tag{4}$$

a z ní diferenciál $\mathrm{d}(y)$ funkce $y = y(\mathbf{x}$. Řešení této lineární rovnice pro neznámou $\mathrm{d}y$ existuje v bodech, kde parciální derivace $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, y) \neq 0$ a je

$$\mathrm{d}y = -\sum_{i=1}^{n} \frac{F'_{x_i}}{F'_y}(\mathbf{x}, y)\,\mathrm{d}x_i\,. \tag{5}$$

Protože $\mathrm{d}y = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial y}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}x_i$, dostaneme z (5) pro parciální derivace funkce $y = y(\mathbf{x})$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{F'_{x_i}(\mathbf{x}, y)}{F'_y(\mathbf{x}, y)}\,. \tag{6}$$

Lze ovšem postupovat i tak, že derivujeme rovnici $F\big(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})\big) = 0$ podle proměnné x_i. Když použijeme větu o parciálních derivacích složené funkce, získáme soustavu

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, y)\,\frac{\partial y}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0\,, \tag{7}$$

ze které opět plyne (6).

Abychom našli druhý diferenciál $\mathrm{d}^2 y$, respektive druhé parciální derivace $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$, spočítáme druhý diferenciál funkce $F(\mathbf{x}, y)$, respektive její druhou derivaci podle proměnných x_i a x_j. Tímto způsobem získáme lineární rovnici pro $\mathrm{d}^2 y$, respektive $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$, která má opět za podmínky $F'_y(\mathbf{x}, y) \neq 0$ jediné řešení.

Příklad. Najděte všechny druhé parciální derivace funkce $z = z(x,y)$ v bodě $[1;2]$, která je v okolí bodu $A = [1,2,0]$ definována jako řešení rovnice

$$F(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + z^3 + 6xyz + 2x = 0\,. \tag{8}$$

Řešení: Nejprve ověříme předpoklady věty o implicitních funkcích. Dosazením snadno zjistíme, že $F(1,2,0) = 0$. Funkce $F(x,y,z) \in C_\infty(\mathbb{R}^3)$ a protože $F'_{,z}(x,y,z) = 3z^2 + 6xy$, je $F'_{,z}(1,2,0) = 12 \neq 0$.

Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o implicitních funkcích, definuje rovnice (8) na nějakém okolí bodu $[1,2]$ funkci $z = z(x,y)$, jejíž hodnoty leží v jistém okolí bodu $z = 0$.

Abychom našli parciální derivace této funkce, derivujeme rovnici

$$2x^2 - y^2 + z^3(x,y) + 6xyz(x,y) + 2x = 0$$

podle proměnných x a y. Tyto derivace dávají

$$\begin{aligned} &4x + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad 6yz + 4x + 2 + \big(6xy + 3z^2\big)\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,, \\ &-2y + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \text{tj.} \quad 6xz - 2y + \big(6xy + 3z^2\big)\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Toto jsou rovnice, ze kterých můžeme za podmínky $F'_{,z}(x,y,z) = 6xy + 3z^2 \neq 0$ najít parciální derivace $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Speciálně pro $x = 1$, $y = 2$ a $z = 0$ dostaneme

$$6 + 12\frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = 0\,, \quad -4 + 12\frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = -\frac{1}{2}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{3}\,.$$

Abychom našli druhé parciální derivace, derivujeme rovnice (9). Jestliže derivujeme první rovnici podle proměnné x, dostaneme

$$6y\frac{\partial z}{\partial x} + 4 + \left(6y + 6z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \big(6xy + 3z^2\big)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,.$$

Protože pro $x = 1$, $y = 2$ a $z = 0$ je $z'_{,x} = -\frac{1}{2}$, dostaneme z této rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,2) = \dfrac{2}{3}$.

Jestliže derivujeme první rovnici v (9) podle proměnné y, dostaneme vztah

$$6z + 6y\frac{\partial z}{\partial y} + \left(6x + 6z\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \big(6xy + 3y^2\big)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0\,,$$

ze kterého pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $z'_{,x} = -\frac{1}{2}$ a $z'_{,y} = \frac{1}{3}$ plyne $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,2) = -\dfrac{1}{12}$. Když bychom derivovali druhou rovnici v (9) podle proměnné x, dostali bychom opět $z''_{,xy}$.

Derivací druhé rovnice podle proměnné y, získáme rovnici

$$6x\frac{\partial z}{\partial y} - 2 + \left(6x + 6z\frac{\partial z}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \big(6xy + 3z^2\big)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,,$$

ze které v daném bodě plyne $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,2) = -\dfrac{1}{6}$.

Ukážeme ještě postup, který používá diferenciálů funkce $F(x,y,z)$. Pro její diferenciál platí

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(x,y,z) &= 4x\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y + 3z^2\,\mathrm{d}z + 6yz\,\mathrm{d}x + 6xz\,\mathrm{d}y + 6xy\,\mathrm{d}z + 2\,\mathrm{d}x = \\ &= (6yz + 4x + 2)\,\mathrm{d}x + (6xz - 2y)\,\mathrm{d}y + (6xy + 3z^2)\,\mathrm{d}z = 0\,. \end{aligned}$$

Všimněte si, že tento vztah je součet první rovnice v (9) vynásobené $\mathrm{d}x$ a druhé vynásobené $\mathrm{d}y$, a tedy obsahuje obě tyto rovnice zároveň. Pro $x=1$, $y=2$ a $z=0$ dostaneme

$$6\,\mathrm{d}x - 4\,\mathrm{d}y + 12\,\mathrm{d}z = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}z = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{d}y\,.$$

A protože $\mathrm{d}z = z'_{,x}\,\mathrm{d}x + z'_{,y}\,\mathrm{d}y$, dostaneme opět $z'_{,x}(1,2) = -\frac{1}{2}$ a $z'_{,y}(1,2) = \frac{1}{3}$.

Při výpočtu druhého diferenciálu si musíme uvědomit, že proměnné x a y jsou nezávislé, a proto je $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = 0$. Naopak z je závislá na proměnných x a y, a proto nemusí platit $\mathrm{d}^2z = 0$. Druhý diferenciál funkce $F(x,y,z)$ dává

$$\begin{aligned} &(6z\,\mathrm{d}y + 6y\,\mathrm{d}z + 4\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x + (6z\,\mathrm{d}x + 6x\,\mathrm{d}z - 2\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y + \\ &\qquad + (6y\,\mathrm{d}x + 6x\,\mathrm{d}y + 6z\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}z + (6xy + 3z^2)\mathrm{d}^2z = 0\,. \end{aligned}$$

Protože pro $x=1$, $y=2$, $z=0$ je $\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y$, plyne z této rovnice

$$-8\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\,\mathrm{d}y^2 + 12\,\mathrm{d}^2z = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}^2z = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{d}x^2 - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{d}y^2\,.$$

A protože $\mathrm{d}^2z = z''_{,xx}\,\mathrm{d}x^2 + 2z''_{,xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + z''_{,yy}\,\mathrm{d}y^2$, dostaneme srovnáním těchto vztahů opět

$$z''_{,xx}(1,2) = \tfrac{2}{3}\,, \qquad z''_{,xy}(1,2) = -\tfrac{1}{12}\,, \qquad z''_{,yy}(1,2) = -\tfrac{1}{6}\,.$$

Příklad. Nechť je funkce $F(\mathbf{x},y) = F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$ spojitá v nějakém okolí bodu $[\mathbf{a},b] = [a_1,a_2,\ldots,a_n,b]$, má v okolí tohoto bodu diferenciál prvního řádu a $F'_{,y}(\mathbf{a},b) \neq 0$. Pak je podle věty o implicitních funkcích rovnicí $F(\mathbf{x},y) = F(\mathbf{a},b) = C$ definována v okolí bodu $\mathbf{a}$ právě jedna funkce $y = f(\mathbf{x})$, jejíž hodnoty jsou v okolí bodu b a platí $f(\mathbf{a}) = b$. Tato funkce má v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál prvního řádu, a proto k jejímu grafu existuje v bodě $[\mathbf{a},b]$ tečná rovina. Její rovnice jsou

$$y - b = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\,(x - a_i)\,. \tag{10}$$

Podle vztahu (6) jsou ale parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = -\frac{F'_{x_i}(\mathbf{a},b)}{F'_{,y}(\mathbf{a},b)}\,.$$

Jestliže tento vztah dosadíme do (10) v vynásobíme $F'_{,y}(\mathbf{a},b)$, dostaneme rovnici tečné roviny ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} F'_{,x_i}(\mathbf{a},b)\,(x_i - a_i) + F'_{,y}(\mathbf{a},b)\,(y - b) = 0\,.$$

V tomto vyjádření tečné roviny nehraje proměnná y speciální roli jako dříve a můžeme ji považovat za další souřadnici x_{n+1}.

Obecně platí, že pokud je funkce $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spojitá v okolí bodu $\mathbf{a} = [a_1; a_2; \ldots; a_n]$, má v okolí tohoto bodu diferenciál prvního řádu a $\|\operatorname{grad} F(\mathbf{a})\| \neq 0$, definuje rovnice $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a})$ v okolí bodu $\mathbf{a}$ jistou plochu v $\mathbb{R}^n$. Tato plocha má v bodě $\mathbf{a}$ tečnou rovinu, jejíž rovnice jsou

$$\sum_{i=1}^{n} F'_{,i}(\mathbf{a})\,(x_i - a_i) = 0\,, \quad \text{neboli} \quad \big(\operatorname{grad} F(\mathbf{a})\big) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0\,. \tag{11}$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že vektor $\operatorname{grad} F(\mathbf{a})$ je normálový vektor k ploše definované rovnici $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Uvedeme ještě obecnou větu pro větší počet rovnic, tj. pro řešení problému uvedeného na začátku přednašky.

Věta (*o implicitních funkcích*). Nechť je $A = [\mathbf{a}; \mathbf{b}] = [a_1, a_2, \ldots, a_r; b_1, b_2, \ldots, b_s]$. Nechť jsou funkce $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_k(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$, $k = 1, 2, \ldots, s$, spojité v jistém okolí bodu A a mají v tomto okolí všechny parciální derivace $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, které jsou spojité v bodě A. Nechť platí

1. $F_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, pro každé $k = 1, 2, \ldots, s$;
2. $\det \mathbf{C} \neq 0$, kde $\mathbf{C}$ je matice se složkami $C_{k\ell} = \dfrac{\partial F_k}{\partial y_\ell}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Pak existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že ke každému $\mathbf{x} \in \mathcal{I} = \big\{\mathbf{x};\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta\big\}$ odpovídá právě jedno $\mathbf{y} \in \mathcal{J} = \big\{\mathbf{y};\ \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\| < \Delta\big\}$ takové, že pro všechna $k = 1, 2, \ldots, s$ platí $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.
Souřadnice y_k tohoto bodu definují funkce

$$y_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_r)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, s\,,$$

které jsou spojité na množině $\mathcal{I}$.
Jestliže mají všechny funkce $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ na množině $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ diferenciál n–tého řádu, mají všechny funkce $y_k = \varphi_k(\mathbf{x})$ diferenciál n–tého řádu na množině $\mathcal{I}$.
Jestliže jsou všechny funkce $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C_n(\mathcal{I} \times \mathcal{J})$, jsou i všechny funkce $\varphi_k(\mathbf{x}) \in C_n(\mathcal{I})$.

Při výpočtech postupujeme podobně jako v případě jedné rovnice. Nejprve najdeme první diferenciály funkcí $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}$,

$$\mathrm{d}F_k = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}x_i + \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial F_k}{\partial y_\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}y_\ell = 0\,, \tag{12}$$

a dostaneme soustavu rovnic pro $\mathrm{d}y_k$. Řešení této soustavy lineárních rovnic pro neznámé $\mathrm{d}y_\ell$ existuje v bodech, kde je determinant

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det\Big(\frac{\partial F_k}{\partial y_\ell}\Big)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_s)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0\,. \tag{13}$$

A protože $\mathrm{d}y_k = \sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}x_i$, najdeme velmi snadno z prvního diferenciálu také parciální derivace.

Opět lze postupovat i tak, že derivujeme rovnice $F_k\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big) = 0$ podle proměnné x_i. Když použijeme větu o parciálních derivacích složené funkce, získáme soustavu

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial F_k}{\partial y_\ell}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0\,. \tag{14}$$

Tuto soustavu pro $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$ můžeme za podmínky (13) jednoznačně vyřešit.

Abychom našli druhé diferenciály $\mathrm{d}^2 y_\ell$, respektive druhé parciální derivace $\dfrac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$, spočítáme druhý diferenciál funkcí $F_k(\mathbf{x},\mathbf{y})$, respektive její druhou derivaci podle proměnných x_i a x_j. Tímto způsobem získáme soustavu rovnic pro $\mathrm{d}^2 y_\ell$, respektive $\dfrac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$, která má opět za podmínky (13) jediné řešení.

Příklad. Nechť jsou funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ řešením soustavy rovnic

$$x^2 - y^2 + z^3 = 1\,, \qquad xy + xz + yz = 3 \tag{15}$$

v okolí bodu $[1,1,1]$. Najděte Taylorovy polynomy stupně 2 funkcí $y = y(x)$ a $z = z(x)$ se středem v bodě $x = 1$.

Řešení: Taylorův polynom stupně dva funkce $f(x)$ se středem v bodě $x = 1$ je

$$T_2(f;x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \tfrac{1}{2}\,f''(1)\,(x-1)^2\,.$$

Proto musíme najít první dvě derivace funkcí $y = y(x)$ a $z = z(x)$ v bodě $x = 1$.

Pro $x = y = z = 1$ jsou obě rovnice splněny a obě funkce v rovnicích jsou třídy $C_\infty(\mathbb{R}^3)$. Podmínka na determinant z věty o implicitních funkcích zaručuje jednoznačnou řešitelnost následující soustavy a ověříme ji během výpočtu.

Jestliže derivujeme obě rovnice v (15) podle x (protože $y = y(x)$ a $z = z(x)$ tam jiná nezávislá proměnná vlastně ani není), dostaneme vztahy

$$2x - 2yy' + 3z^2 z' = 0\,, \qquad y + z + (x+z)y' + (x+y)z' = 0\,. \tag{16}$$

V bodě $x = y = z = 1$ je to soustava

$$2 - 2y' + 3z' = 0\,, \qquad 2 + 2y' + 2z' = 0\,,$$

která má jediné řešení $y'(1) = -\frac{1}{5}$, $z'(1) = -\frac{4}{5}$. Protože má uvedená rovnice právě jedno řešení, je podmínka na determinant ve větě o implicitních funkcí splněna.

Druhé derivace funkcí $y = y(x)$ a $z = z(x)$ dostaneme tak, že derivujeme obě rovnice v (16). To dává

$$\begin{aligned} &2 - 2(y')^2 + 6z(z')^2 - 2yy'' + 3z^2 z'' = 0\,,\\ &y' + z' + (1+z')y' + (1+y')z' + (x+z)y'' + (x+y)z'' = 0\,. \end{aligned}$$

Když dosadíme $x = y = z = 1$ a $y' = -\frac{1}{5}$, $z' = -\frac{4}{5}$, dostaneme soustavu

$$-2y'' + 3z'' = -\tfrac{54}{25}\,, \qquad 2y'' + 2z'' = \tfrac{42}{25}\,.$$

Její řešení je $y'' = \frac{117}{125}$ a $z''(1) = -\frac{12}{125}$.

Hledané Taylorovy polynomy tedy jsou

$$y(x) \sim 1 - \tfrac{1}{5}\,(x-1) + \tfrac{117}{250}\,(x-1)^2\,, \qquad z(x) \sim 1 - \tfrac{4}{5}\,(x-1) - \tfrac{6}{125}\,(x-1)^2\,.$$

Regulární zobrazení

Nyní budeme podrobněji zkoumat zobrazení $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Obraz bodu $\mathbf{x} \in M$ budeme značit $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ nebo pomocí jeho složek

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)\,, \quad \text{kde} \quad k = 1, 2, \dots, n\,.$$

Definice. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že zobrazení $\mathbf{f}$ je *regulární zobrazení* množiny M, jestliže $\mathbf{f} \in C_1(M)$ a pro každé $\mathbf{x} \in M$ je

$$J(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dots, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \dots, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \dots, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) \neq 0\,. \qquad (17)$$

Derivace zobrazení $\mathbf{f}$, tj. matice

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dots, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \dots, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \dots, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x})$$

se nazývá *Jacobiho matice* a její determinant (17) nazýváme *Jacobiho determinant* neboli *jakobián* zobrazení $\mathbf{f}$.

Nejprve dokážeme jednu jednoduchou větu o jakobiánu složeného zobrazení.

Věta. Nechť jsou M a N otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{f} : M \to N$ a $\mathbf{g} : N \to \mathbb{R}^n$ jsou zobrazení třídy $C_1(M)$ a $C_1(N)$. Pak pro jakobián složeného zobrazení $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$ platí

$$\frac{D(h_1, h_2, \dots, h_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \frac{D(g_1, g_2, \dots, g_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)\, \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x})\,.$$

Důkaz: Podle věty o parciálních derivací složené funkce platí pro Jacobiho matice

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x})\,.$$

Tvrzení věty pak plyne z věty o determinantu součinu matic.

Důsledek. Nechť jsou $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{g} : N \to \mathbb{R}^n$ regulární zobrazení a $\mathbf{f}(M) \subset N$. Pak je složené zobrazení $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$ regulární.

Důkaz: Podle věty o derivaci složeného zobrazení je složené zobrazení $\mathbf{h} \in C_1(M)$ a z předchozí věty plyne, že jakobián zobrazení $\mathbf{h}$ je roven součinu jakobiánů zobrazení $\mathbf{g}$ a $\mathbf{f}$, a tedy je nenulový.

`Poznámka.` Uvedeme souvislost regulárního zobrazení s větou o implicitně definované funkci. Napíšeme-li totiž rovnice $y_k = f_k(\mathbf{x})$ ve tvaru $F_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) - y_k = 0$, splňuje soustava rovnic $F_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$, všechny předpoklady věty o implicitních funkcích (pouze je zaměněna role $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$). Proto ke každému bodu $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, kde $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ existují okolí bodu $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, ve kterém lze tuto soustavu vyřešit, tj. psát $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$. To znamená, že pro regulární zobrazení existuje vždy aspoň lokálně inverzní zobrazení.

Přesně vyjadřuje tyto úvahy následující důležitá věta, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta. Nechť je $\mathbf{f}$ regulární zobrazení otevřené množiny $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak platí:

1. ke každému bodu $\mathbf{a} \in M$ existuje jeho okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že zúžení zobrazení $\mathbf{f}$ na $U(\mathbf{a})$ je prosté;
2. je-li $A \subset M$ otevřená množina, je $\mathbf{f}(A)$ otevřená množina v $\mathbb{R}^n$;
3. je-li $\mathbf{f}$ prosté regulární zobrazení, je jeho inverzní zobrazení $\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{f}(M) \to M$ také regulární.

`Poznámka.` Prostá regulární zobrazení slouží k zavedení různých křivočarých souřadnic a setkáme se s nimi později v integrálním počtu.