Přednáška 12

Extrémy funkcí více proměnných

Definice. Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$, $M \subset X$ a $\mathbf{a} \in M$. Řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$

1. *ostré lokální maximum vzhledem k množině* M, jestliže existuje okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \cap M$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, je $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$;
2. *ostré lokální minimum vzhledem k množině* M, jestliže existuje okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \cap M$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, je $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$;
3. *neostré lokální maximum vzhledem k množině* M, jestliže existuje okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \cap M$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$;
4. *neostré lokální minimum vzhledem k množině* M, jestliže existuje okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \cap M$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$.

Lokální maxima a minima funkce se nazývají lokální extrémy.
Jestliže je $M = X = D_f$, často se sousloví vzhledem k množině M vynechává.

Přímo z definice lokálních extrémů vzhledem k množině M plynou následující dvě věty.

Věta. Jestli6e funkce $f(\mathbf{x})$ nabývá na množině M svou největší (nejmenší) hodnotu v bodě $\mathbf{a}$, má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum (minimum) vzhledem k množině M.

Věta. Nechť je $\mathbf{a} \in M \subset N$. Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum (minimum) vzhledem k množině N, má v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum (minimum) vzhledem k množině M.

Lokální extrémy ve vnitřních bodech množiny M

Následující věta dává nutnou podmínku pro to, aby měla funkce $f(\mathbf{x})$ ve vnitřním bodě $\mathbf{a} \in M$ lokální extrém.

Věta. Nechť je $\mathbf{a}$ vnitřní bod množiny M. Jestliže existuje vektor $\mathbf{v}$ takový, že derivace $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) \neq 0$, nemá funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ vzhledem množině M lokální extrém.

DŮKAZ: Uvažujme funkce jedné proměnné $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$. Protože $F'(0) \neq 0$, nemá funkce $F(t)$ v bodě $t = 0$ lokální extrém. Pak pro každé $\tau > 0$ existují t_1 a t_2, $|t_1|$, $|t_2| < \tau$ takové, že $F(t_1) > F(0) > F(t_2)$. To ale znamená, že pro libovolné okolí $(\mathbf{a})$ bodu $\mathbf{a}$ existují body $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a} + t_1\mathbf{v}$ $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a} + t_2\mathbf{v} \in U(\mathbf{a})$ takové, že $f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x}_2)$, a tedy funkce $f(\mathbf{x})$ nemá v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém.

Tedy aby funkce $f(\mathbf{x})$ mohla mít v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, musí být její derivace v bodě $\mathbf{a}$ podle libovolného vektoru rovna nule nebo nesmí existovat. Proto nás při hledání extrémů funkce budou zajímat vnitřní body $\mathbf{a} \in M$, ve kterých je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = 0 \tag{1}$$

nebo vnitřní body M, ve kterých některá parciální derivace neexistuje.

Speciálně pro diferencovatelnou funkci na množině M je podmínka (1) ekvivalentní podmínce

$$\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = 0\,. \tag{2}$$

Podmínka (1) nebo spíše (2) odpovídá pro funkci jedné proměnné podmínce $f'(a) = 0$, tj. stacionárnímu bodu. V případě funkce jedné proměnné jsme o tom, zda má funkce $y = f(x)$ ve stacionárním bodě lokální extrém a jakého je typu, mohli rozhodnout pomocí druhé derivace. V principu jde o to, že Taylorův polynom druhého řádu funkce $y = f(x)$ se středem v bodě a je

$$T_2(f, a+h) = f(a) + f'(a)\,h + \tfrac{1}{2}\,f''(a)\,h^2 = f(a) + \tfrac{1}{2}\,f''(a)\,h^2 = f(a) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}^2f(a,h)\,,$$

protože $f'(a) = 0$. Tedy pokud bylo $\mathrm{d}^2f(a,h) > 0$, tj. $f''(a) > 0$, dostali jsme

$$f(a+h) \sim f(a) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}^2f(a,h) > f(a)\,.$$

Proto měla funkce v bodě $x = a$ lokální minimum. Pro $\mathrm{d}^2f(a,h) < 0$, tj. $f''(a) < 0$, jsme z podobného důvodu zjistili, že v bodě $x = a$ je lokální maximum.

Pro funkci více proměnných je situace analogická. Taylorův polynom druhého stupně se středem ve stacionárním bodě $\mathbf{a}$ je

$$T_2(f, \mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}^2f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}^2f(\mathbf{a},\mathbf{h})\,.$$

Proto bude o typu extrému funkce $y = f(\mathbf{x})$ ve stacionárním bodě $\mathbf{a}$ rozhodovat znaménko druhého diferenciálu. Ale pro funkce více proměnných je druhý diferenciál kvadratická forma v proměnné $\mathbf{h}$, a proto je analýza složitější.

Z předchozí analýzy by mohlo být aspoň intuitivně jasné, že platí následující věta, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta. Nechť má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál druhého řádu a platí $\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = 0$. Uvažujme kvadratickou formu

$$\Phi(\mathbf{h}) = \Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) = \mathrm{d}^2f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{a})\, h_i h_k\,. \tag{3}$$

Pak platí:

1. Je-li kvadratická forma (3) pozitivně definitní, má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální minimum;
2. Je-li kvadratická forma (3) negativně definitní, má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum;
3. Je-li kvadratická forma (3) indefinitní, nemá funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém.

Zde bude asi nutné zopakovat nějaké pojmy, které by měly být známy z algebry.
Nechť jsou $a_{ik} = a_{ki}$, kde i, $k = 1, 2, \dots, n$, reálná čísla. Pak funkci

$$\Phi(\mathbf{h}) = \Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} h_i h_k \tag{4}$$

nazýváme *kvadratická forma*.

Je zřejmé, že $\Phi(\mathbf{0}) = 0$. Kvadratickou formu $\Phi(\mathbf{h})$ nazýváme

1. *pozitivně definitní*, jestliže pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je $\Phi(\mathbf{h}) > 0$;
2. *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je $\Phi(\mathbf{h}) \geq 0$;
3. *negativně definitní*, jestliže pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je $\Phi(\mathbf{h}) < 0$;
4. *negativně semidefinitní*, jestliže pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je $\Phi(\mathbf{h}) \leq 0$;
5. *indefinitní*, jestliže existují $\mathbf{h}_1$ a $\mathbf{h}_2$, taková, že $\Phi(\mathbf{h}_1) > 0$ a $\Phi(\mathbf{h}_2) < 0$.

Naším úkolem bude rozhodnout, jakého typu je kvadratická forma (4). Obecně mohou nastat tři možnosti:

A. Pro všechna i, k je $a_{ik} = 0$. V takovém případě je $\Phi(\mathbf{h}) = 0$ pro každé $\mathbf{h}$ a kvadratická forma (4) je pozitivně i negativně semidefinitní.

B. Existuje dvojice indexů i, k taková, že $a_{ii} = a_{kk} = 0$ a $a_{ik} \neq 0$. Jestliže v tomto případě zvolíme $\mathbf{h}_1$, pro které je $h_r = 0$ pro $r \neq i, k$ a $h_i = h_k = 1$, a $\mathbf{h}_2$, pro které je $h_r = 0$ pro $r \neq i, k$ a $h_i = 1$, $h_k = -1$, dostaneme $\Phi(\mathbf{h}_1) = 2a_{ik} \neq 0$ a $\Phi(\mathbf{h}_2) = -2a_{ik} \neq 0$. Tedy kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ nabývá jak kladných tak záporných hodnot a je proto indefinitní.

C. Existuje index i takový, že $a_{ii} \neq 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $i = 1$ a $a_{11} \neq 0$. Pak platí rovnost

$$\Phi(\mathbf{h}) = a_{11}\Big(h_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,h_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}\,h_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\,h_n\Big)^2 + \Phi_1(h_2, h_3, \ldots, h_n)\,, \tag{5}$$

kde $\Phi_1(h_2, h_3, \ldots, h_n) = \sum\limits_{i,k=2}^{n} A_{ik} h_i h_k$ je kvadratická forma $(n-1)$ proměnných h_2, h_3, …, h_n.

Je-li kvadratická forma Φ_1 v (5) typu **B.**, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ indefinitní. To plyne z toho, že pro

$$h_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\,h_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}\,h_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\,h_n$$

je $\Phi(\mathbf{h}) = \Phi_1(h_2, h_3, \ldots, h_n)$ a kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ je indefinitní.

Podobná úvaha vede k tomu, že pokud je kvadratická forma Φ_1 typu **A.**, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ pozitivně nebo negativně semidefinitní v závislosti na tom, zda je $a_{11} > 0$ nebo $a_{11} < 0$.

Je-li kvadratická forma Φ_1 typu **C.**, použijeme podobný postup jako dříve a dostaneme rovnost

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{h}) \;=\; & a_{11}\Big(h_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,h_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}\,h_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\,h_n\Big)^2 + \\ & + A_{22}\Big(h_2 + \frac{A_{23}}{A_{22}}\,h_3 + \frac{A_{24}}{A_{22}}\,h_4 + \ldots + \frac{A_{2n}}{A_{22}}\,h_n\Big)^2 + \Phi_2(h_3, h_4, \ldots, h_n)\,,\end{aligned}$$

kde $\Phi_2(h_3, h_4, \ldots, h_n)$ je kvadratická forma $(n-2)$ proměnných h_3, …, h_n.

V tomto postupu budeme stále pokračovat. Pokud v r–tém kroku dostaneme formu Φ_r, která je typu **B.**, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ indefinitní. Jestliže v žádném kroku nedostaneme kvadratickou formu typu **B.**, zjistíme, že kvadratickou formu $\Phi(\mathbf{h})$ lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{h}) \;=\; & A_1\big(h_1 + c_{12}h_2 + \ldots + c_{1n}h_n\big)^2 + A_2\big(h_2 + c_{23}h_3 + \ldots + c_{2n}h_n\big)^2 + \ldots + \\ & + A_k\big(h_k + c_{k,k+1}h_{k+1} + \ldots + c_{rn}h_n\big)^2 + \ldots + A_n h_n^2\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Ze zápisu kvadratické formy $\Phi(\mathbf{h})$ ve tvaru (6) snadno zjistíme její typ:

1. Je-li $A_k > 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ pozitivně definitní;
2. Je-li $A_k \geq 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ pozitivně semidefinitní;
3. Je-li $A_k < 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ negativně definitní;
4. Je-li $A_k \leq 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ negativně semidefinitní;
5. Jestliže existují indexy i a k takové, že $A_i > 0$ a $A_k < 0$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ indefinitní.

V algebře se snad dokazovala následující věta:

Věta (*Sylvesterovo kritérium*) Nechť je $\Phi(\mathbf{h})$ kvadratická forma (4). Označme

$$D_k = \det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1k} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2k} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & \ldots, & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k}, & a_{2k}, & a_{3k}, & \ldots, & a_{kk} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n\,. \tag{7}$$

Nechť je $D_k \neq 0$ pro každé k. Pak platí

1. Je-li $D_k > 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ pozitivně definitní;
2. Je-li $(-1)^k D_k > 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, tj. $D_1 < 0$ a determinanty D_k z (7) střídají znaménka, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ negativně definitní;
3. Jestliže nenastane ani jedna z uvedených možností, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ indefinitní.

`Poznámka.` Lze ukázat, že determinanty D_k v (7) souvisí s čísly A_k z (6) tak, že

$$A_1 = D_1 \quad \text{a} \quad A_k = \frac{D_k}{D_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \ldots, n\,.$$

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^3 + \tfrac{3}{2}\, y^2 + z^2 - 3xy + 2yz + 4y + 2z\,. \tag{8}$$

Řešení: Nutné podmínky pro lokální extrém funkce (8) jsou

$$\begin{aligned} f'_{,x} &= 3x^2 - 3y = 0\,, \\ f'_{,y} &= 3y - 3x + 2z + 4 = 0\,, \\ f'_{,z} &= 2z + 2y + 2 = 0\,. \end{aligned}$$

Tato soustava má dvě řešení $\mathbf{a}_1 = [1, 1, -2]$ a $\mathbf{a}_2 = [2, 4, -5]$. Jedině v těchto bodech může mít funkce (8) lokální extrém.

Protože má funkce (8) spojité parciální derivace všech řádů existuje druhý druhý diferenciál funkce $f(\mathbf{x})$ v celém $\mathbb{R}^3$. Ten je

$$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = 6x h_1^2 - 6h_1 h_2 + 3h_2^2 + 4h_2 h_3 + 2h_3^2\,. \tag{9}$$

V bodě $\mathbf{a}_1 = [1, 1, -2]$ je druhý diferenciál kvadratická forma

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}) &= 6h_1^2 - 6h_1h_2 + 3h_2^2 + 4h_2h_3 + 2h_3^2 = 6\big(h_1 - \tfrac{1}{2}\,h_2\big)^2 + \tfrac{3}{2}\,h_2^2 + 4h_2h_3 + 2h_3^2 = \\ &= 6\big(h_1 - \tfrac{1}{2}\,h_2\big)^2 + \tfrac{3}{2}\,\big(h_2 + \tfrac{4}{3}\,h_3\big)^2 - \tfrac{2}{3}\,h_3^2\,. \end{aligned}$$

Tedy kvadratická forma $d^2 f(\mathbf{a}_1, \mathbf{h})$ je indefinitní a v bodě $\mathbf{a}_1 = [1, 1, -2]$ není extrém.

V bodě $\mathbf{a}_2 = [2, 4, -5]$ je druhý diferenciál kvadratická forma

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}) &= 12h_1^2 - 6h_1h_2 + 3h_2^2 + 4h_2h_3 + 2h_3^2 = 12\big(h_1 - \tfrac{1}{4}h_2\big)^2 + \tfrac{9}{4}h_2^2 + 4h_2h_3 + 2h_3^2 = \\ &= 12\big(h_1 - \tfrac{1}{4}\,h_2\big)^2 + \tfrac{9}{4}\,\big(h_2 + \tfrac{8}{9}\,h_3\big)^2 + \tfrac{2}{9}\,h_3^2. \end{aligned}$$

Je vidět, že nyní $d^2 f(\mathbf{a}_2, \mathbf{h})$ je pozitivně definitní forma a v bodě $\mathbf{a}_2 = [2, 4, -5]$ má funkce $f(\mathbf{x})$ lokální minimum.

Ukážeme ještě použití Sylvesterova kritéria. Matice $\mathbf{A}$, která odpovídá kvadratické formě (9), je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6x, & -3, & 0 \\ -3, & 3, & 2 \\ 0, & 2, & 2 \end{pmatrix}.$$

V bodě $\mathbf{a}_1$ je $x = 1$ a

$$D_1 = 6 > 0\,, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} 6, & -3 \\ -3, & 3 \end{pmatrix} = 9 > 0\,, \quad D_3 = \det \begin{pmatrix} 6, & -3, & 0 \\ -3, & 3, & 2 \\ 0, & 2, & 2 \end{pmatrix} = -6 < 0\,.$$

Tedy kvadratická forma je v bodě $\mathbf{a}_1$ indefinitní a funkce tam nemá extrém.

V bodě $\mathbf{a}_2$ je $x = 2$ a

$$D_1 = 12 > 0\,, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} 12, & -3 \\ -3, & 3 \end{pmatrix} = 27 > 0\,, \quad D_3 = \det \begin{pmatrix} 12, & -3, & 0 \\ -3, & 3, & 2 \\ 0, & 2, & 2 \end{pmatrix} = 6 > 0\,.$$

Tedy kvadratická forma je v bodě $\mathbf{a}_2$ pozitivně definitní a funkce má v tomto bodě lokální minimum.

`Poznámka.` V Sylvesterově kritériu je předpoklad, že $D_k \neq 0$. Je-li nějaké $D_k = 0$ není odpovídající kvadratická forma ani pozitivně ani negativně definitní. Může být indefinitní nebo pozitivně nebo negativně semidefinitní. Je-li kvadratická forma indefinitní, vede někdy k cíli přeuspořádání indexů. Ale jedná-li se pouze o semidefinitní formu, neříká věta vůbec nic o tom, zda má funkce v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém. Takové případy vyžadují podrobnější zkoumání funkce $f(\mathbf{x})$ v okolí bodu $\mathbf{a}$.

Příklad. Uvažujme funkce

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + x^4 + y^4 \quad \text{a} \quad g(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x^4 - y^4\,.$$

Protože

$$\begin{aligned} f'_{,x}(x, y) &= 2x + 2y + 4x^3\,, \qquad & f'_{,y}(x, y) &= 2x + 2y + 4y^3\,, \\ g'_{,x}(x, y) &= 2x + 2y - 4x^3\,, \qquad & g'_{,y}(x, y) &= 2x + 2y - 4y^3\,, \end{aligned}$$

mají obě funkce stacionární bod $x = y = 0$. Druhý diferenciál obou funkcí ve stacionární bodě $\mathbf{a} = [0, 0]$ je

$$\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}^2 g = 2h_1^2 + 4h_1h_2 + 2h_2^2 = 2(h_1 + h_2)^2 \,.$$

Tato kvadratická forma je pouze pozitivně semidefinitní. Proto mohou mít obě funkce v bodě $[0, 0]$ lokální minimum. Protože druhý diferenciál je roven nule na přímce $h_1 + h_2 = 0$, bude podezřelá množina přímka $x + y = 0$. Na této přímce je $f(x, -x) = 2x^4 \geq 0$ a $g(x, -x) = -2x^4 \leq 0$. Proto funkce $g(x, y)$ nemá v bodě $x = y = 0$ lokální extrém. Naopak funkce $f(x, y)$ má v tomto bodě lokální minimum $f(0, 0) = 0$, protože $f(x, y) = (x + y)^2 + x^4 + y^4 \geq 0$.

Příklad. Uvažujme funkci

$$f(x, y) = y^2 - 4x^2 y + 3x^4 = \big(y - x^2\big)\big(y - 3x^2\big) \,. \tag{10}$$

Protože

$$f'_{,x} = -8xy + 12x^3 \,, \qquad f'_{,y} = 2y - 4x^2 \,,$$

je $x = y = 0$ stacionární bod funkce (10). Druhý diferenciál této funkce v bodě $\mathbf{a} = [0, 0]$

$$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = 2h_2^2$$

je pozitivně semidefinitní forma, a proto má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, jedná se o minimum $f(0, 0) = 0$.

Na přímce $y = 0$ je $f(x, 0) = 3x^4$ má funkce $f(x, y)$ minimum. Protože $f(0, y) = y^2$ má tato funkce v bodě $[0, 0]$ minimum i na této přímce. Všechny ostatní přímky, které procházejí počátkem mají rovnici $y = kx$, kde $k \neq 0$. Na této přímce dostaneme

$$f(x, kx) = F(x) = k^2x^2 - 4kx^3 + 3x^4 \,.$$

Protože $F'(0) = 0$ a $F''(0) = 2k^2 > 0$, má funkce (10) v bodě $x = y = 0$ lokální minimum $f(0, 0) = 0$ na každé přímce, která prochází tímto bodem. Ale přesto nemá v bodě $\mathbf{a}$ lokální minimum, protože na parabole $y = 2x^2$ je $f(x, 2x^2) = -x^4$.

Vázané lokální extrémy

V předchozí části přednášky jsme se zabývali lokálními extrémy funkce $f(\mathbf{x})$ ve vnitřních bodech množiny M. Jestliže je $\mathbf{a}$ vnitřní bod množiny M, existuje pro každý vektor $\mathbf{v}$ číslo $\delta > 0$ takové, že úsečka $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t$, kde $|t| < \delta$, leží v M. Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, má funkce $F(t) = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t)$, kde $|t| < \delta$, extrém v bodě $t = 0$. Proto muselo být $f'_{,\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = 0$ pro každý vektor $\mathbf{v}$. Z těchto podmínek pak plynuly nutné podmínky pro lokální extrém (1) nebo (2).

Není-li $\mathbf{a}$ vnitřní bod množiny M, může existovat vektor $\mathbf{v}$ takový, že bod $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t \notin M$ pro žádné $t \neq 0$. Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a} \in M$ lokální extrém vzhledem k množině M, nemusí již být $f'_{,\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = 0$, protože už nesrovnáváme hodnotu $f(\mathbf{a})$ s hodnotou $f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t)$. V takovém případě postupujeme trochu jinak.

Pro nás budou důležité množiny $M \subset X = D_f$, které lze popsat jako řešení soustavy rovnic

$$g_k(\mathbf{x}) = 0 \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, r \,. \tag{11}$$

Rovnosti (11) se obvykle nazývají vazby a proto se lokální extrémy funkce $f(\mathbf{x})$ na množině

$$M = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,;\ g_k(\mathbf{x}) = 0 \ \text{ pro } \ k = 1, 2, \ldots, r\big\}$$

nazývají *vázané extrémy.*

Nejprve ukážeme na nejjednodušším příkladě $n = 2$ a $r = 1$ různé metody řešení této úlohy.

Když máme najít extrém funkce $f(x, y)$ na množině M dané rovnicí $g(x, y) = 0$, lze nejprve najít řešení rovnice $g(x, y) = 0$, tj. funkce $y = y(x)$, pro které platí $g\big(x, y(x)\big) = 0$, a tato řešení dosadit do funkce $f(x, y)$. Tím převedeme úlohu na vázaný extrém na úlohu najít lokální extrémy funkce jedné proměnné $F(x) = f\big(x, y(x)\big)$, který již umíme řešit.

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na množině $x + y = 2$.

Řešení: Z rovnice $x + y = 2$ plyne, že $y = 2 - x$. Když toto y dosadíme do funkce $f(x, y)$, dostaneme funkci

$$F(x) = f(x, 2 - x) = x(2 - x) = 2x - x^2\,,$$

jedné proměnné x. Protože je funkce $F(x)$ diferencovatelná, může mít lokální extrémy pouze v bodech, kde $F'(x) = 2 - 2x = 0$, tj. v bodě $x = 1$. A protože $F''(1) = -2 < 0$, má funkce $F(x)$ v bodě $x = 1$ lokální maximum. Proto má funkce $f(x, y) = xy$ na množině M definované rovnicí $x + y = 2$ lokální maximum v bodě $x = y = 1$.

Rovnice vazby $g(x, y) = 0$ můžeme vyřešit také pomocí parametru, tj. ve tvaru $x = x(t)$ a $y = y(t)$, kde $t \in \mathcal{T}$. Pak dostaneme po dosazení do funkce $f(x, y)$ funkci $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ jedné proměnné t, pro kterou hledáme lokální extrémy známým způsobem.

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na množině $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení: Místo abychom použili dvě řešení rovnice vazby $y_\pm(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$, lze použít parametrické rovnice kružnice $x = \cos t$, $y = \sin t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Po dosazení do funkce $f(x, y)$ pak dostaneme funkci

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t\,, \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,.$$

Protože $F'(t) = \cos 2t$, mohou být extrémy v bodech $t_k = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, kde $k = 0, 1, 2, 3$. Protože $F''(t_k) = -2\sin 2t_k$, snadno zjistíme, že v bodech $t_0 = \frac{1}{4}\pi$ a $t_2 = \frac{5}{4}\pi$ má funkce $F(t)$ lokální maxima a v bodech $t_1 = \frac{3}{4}\pi$ a $t_3 = \frac{7}{4}\pi$ lokální minima. Když se vrátíme k proměnným x a y, zjistíme, že funkce $f(x, y) = xy$ má na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ lokální maxima v bodech $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ a lokální minima v bodech $x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Když neumíme, nebo z nějakých důvodů nechceme, vyřešit rovnice vazeb $g(x, y) = 0$, postupujeme trochu jinak. Jestliže předpokládáme, že funkce $g(x, y)$ je spojitá na nějaké otevřené množině $N \supset M$, má na ni spojité obě první parciální derivace a $g'_{,y}(x, y) \neq 0$ pro $[x, y] \in M$, lze podle věty o implicitních funkcích najít aspoň lokálně funkci $y = y(x)$, pro kterou platí $g\big(x, y(x)\big) = 0$. Když tuto funkci formálně dosadíme do $f(x, y)$, dostaneme opět funkci jedné proměnné $F(x) = f\big(x, y(x)\big)$. Tato funkce může mít lokální extrémy pouze v bodech, kde

$$F'(x) = f'_{,x}(x, y) + f'_{,y}(x, y)\, y' = 0\,.$$

To je spolu s rovnicí $g(x, y) = 0$ soustava dvou rovnic pro tři neznámé x, y a y'. Protože nyní neznáme explicitně funkci $y = y(x)$, neznáme ani funkci $y'(x)$. Ale z věty o implicitních funkcí plyne pro $y'(x)$ rovnice

$$g'_{,x}(x, y) + g'_{,y}(x, y)\, y' = 0\,.$$

Proto bod $[a, b]$, ve kterém může mít funkce $f(x, y)$ na množině $g(x, y) = 0$ lokální extrém, musí splňovat soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
&f'_{,x}(a,b) + f'_{,y}(a,b)\, y'(a) = 0\,,\\
&g'_{,x}(a,b) + g'_{,y}(a,b)\, y'(a) = 0\,,\\
&g(a,b) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

To je soustava tří rovnic pro neznámé a, b a $y'(a)$, kterou jsme v principu schopni vyřešit.

Většinou se soustava (12) neřeší přímo, ale k jejímu řešení se používá následující postup. Protože jsme předpokládali, že $g'_{,y}(a, b) \neq 0$, existuje právě jedno reálné číslo λ takové, že

$$f'_{,y}(a,b) + \lambda g'_{,y}(a,b) = 0\,.$$

Jestliže vynásobíme druhou rovnici v (12) tímto λ a přičteme k první rovnici, dostaneme kvůli volbě λ vztah

$$f'_{,x}(a,b) + \lambda g'_{,x}(a,b) = 0\,.$$

Tedy jestliže má funkce $f(x, y)$ na množině $g(x, y) = 0$ v bodě $[a, b]$ lokální extrém, musí existovat číslo λ takové, že

$$
\begin{aligned}
&f'_{,x}(a,b) + \lambda g'_{,x}(a,b) = 0\,,\\
&f'_{,y}(a,b) + \lambda g'_{,y}(a,b) = 0\,,\\
&g(a,b) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

První dvě rovnice v (13) lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial L}{\partial y}(a,b) = 0\,, \quad \text{kde} \quad L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)\,.$$

Abychom rozhodli o typu lokálního extrému funkce $f(x, y)$ na množině $g(x, y) = 0$ v bodě $[a, b]$, musíme ještě v bodě $x = a$ najít druhou derivaci $F''(a)$, respektive druhý diferenciál funkce $F(x)$, tj. $\mathrm{d}^2F(a) = F''(a)\,\mathrm{d}x^2$. Protože $F(x) = f\big(x, y(x)\big)$, je podle věty o diferenciálu složené funkce

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}F(x) &= f'_{,x}\big(x,y(x)\big)\,\mathrm{d}x + f'_{,y}\big(x,y(x)\big)\,\mathrm{d}y\,,\\
\mathrm{d}^2F(a) &= f''_{,xx}(a,b)\,\mathrm{d}x^2 + 2f''_{,xy}(a,b)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + f''_{,yy}(a,b)\,\mathrm{d}y^2 + f'_{,y}(a,b)\,\mathrm{d}^2y\,.
\end{aligned}
$$

Ale z vazbové podmínky $g\big(x, y(x)\big) = 0$ plynou vztahy

$$\mathrm{d}g(a,b) = g'_{,x}(a,b)\,\mathrm{d}x + g'_{,y}(a,b)\,\mathrm{d}y = 0\,, \tag{14}$$

$$\mathrm{d}^2g(a,b) = g''_{,xx}(a,b)\,\mathrm{d}x^2 + 2g''_{,xy}(a,b)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + g''_{,yy}(a,b)\,\mathrm{d}y^2 + g'_{,y}(a,b)\,\mathrm{d}^2y = 0\,. \tag{15}$$

Jestliže přičteme rovnici (15) vynásobenou λ k $\mathrm{d}^2F(a)$ a použijeme druhou rovnici v (13), dostaneme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2F(a) = {}& \big(f''_{,xx}(a,b) + \lambda g''_{,xx}(a,b)\big)\,\mathrm{d}x^2 + 2\big(f''_{,xy}(a,b) + \lambda g''_{,xy}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, +\\
&+ \big(f''_{,yy}(a,b) + \lambda g''_{,yy}(a,b)\big)\,\mathrm{d}y^2\,.
\end{aligned}
$$

Proměnné $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ v tomto vztahu nejsou vzájemně nezávislé, ale splňují vztah (14). Proto musíme jednu z nich vypočítat z (14) a dosadit. Protože jsme předpokládali, že $g'_{,y}(a,b) \neq 0$, lze z (14) určitě najít $\mathrm{d}y$. Po dosazení do $\mathrm{d}^2F(a)$ pak dostaneme

$$\mathrm{d}^2F(a) = \Phi(a,b)\,\mathrm{d}x^2$$

a typ extrému pak určuje znaménko $\Phi(a,b)$.

Z uvedeného postupu lze nahlédnout, že číslo $\Phi(a,b)$ můžeme najít také tak, že spočítáme druhý diferenciál funkce $L(x,y)$ dvou nezávislých proměnných pro $x = a$, $y = b$ a λ, které jsou řešením soustavy (13), tj.

$$\mathrm{d}^2L(a,b) = L''_{,xx}(a,b)\,\mathrm{d}x^2 + 2L''_{,xy}(a,b) + L''_{,yy}(a,b)\,\mathrm{d}y^2\,,$$

a pak za $\mathrm{d}y$ dosadíme z rovnice (14).

Funkce $L(x,y)$ v uvedené metodě se nazývá *Lagrangeova funkce*, číslo λ *Lagrangeův multiplikátor* a celá metoda pak *metoda Lagrangeových multiplikátorů*.

Shrňme ještě postup v našem případě hledání lokálního extrému funkce $f(x,y)$ za podmínky $g(x,y) = 0$ (vynecháváme předpoklady).

Nejprve sestrojíme Lagrangeovu funkci $L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$. Body, ve kterých může být lokální extrém, jsou řešením soustavy rovnic

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0\,, \qquad g(x,y) = 0\,.$$

Nechť je $x = a$, $y = b$ a λ řešení této soustavy. Najdeme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $\mathrm{d}^2L(a,b)$ v bodě $[a,b]$ a z rovnice (14) dosadíme do $\mathrm{d}^2L(a,b)$ jednu z proměnných $\mathrm{d}x$ nebo $\mathrm{d}y$. Tak dostaneme kvadratickou formu $\Psi(h) = \Phi(a,b)h^2$. Je-li kvadratická forma $\Psi(h)$ pozitivně definitní, tj. $\Phi(a,b) > 0$, má funkce $f(x,y)$ na množině $g(x,y) = 0$ v bodě $[a,b]$ lokální minimum a je-li kvadratická forma $\Psi(h)$ negativně definitní, tj. $\Phi(a,b) < 0$, má funkce $f(x,y)$ na množině $g(x,y) = 0$ v bodě $[a,b]$ lokální maximum.

Platí následující věta, která popisuje metodu Lagrangeových multiplikátorů v obecném případě.

Věta. Nechť mají funkce $f(\mathbf{x})$ a $g_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots, s$, spojité parciální derivace prvního řádu na otevřené množině $X \subset \mathbb{R}^n$ a nechť je v každém bodě $\mathbf{x} \in X$ hodnost matice

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_r}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial g_r}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial g_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}(\mathbf{x})$$

rovna r a nechť je M množina všech bodů $\mathbf{x} \in X$, pro které je

$$g_k(\mathbf{x}) = g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, r\,.$$

Pak platí následující tvrzení:

Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém vzhledem k množině M, existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ taková, že

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0 \qquad \text{pro každé} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &g_k(\mathbf{a}) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; \text{pro každé} \quad k = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned} \tag{16}$$

Nechť pro $\mathbf{a}$ a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ platí (16) a nechť mají všechny funkce $f(\mathbf{x})$ a $g_k(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál druhého řádu. Sestrojíme kvadratickou formu

$$\Psi(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_r \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right) \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_j \,. \tag{17}$$

Protože má matice $\mathbf{W}(\mathbf{a})$ hodnost r, lze ze soustavy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \, \mathrm{d}x_i = 0 \tag{18}$$

vyjádřit r proměnných z $\mathrm{d}x_k$ jako lineární formy ostatních. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že ze soustavy (18) vyjádříme $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, …, $\mathrm{d}x_r$ pomocí $\mathrm{d}x_{r+1}$, $\mathrm{d}x_{r+2}$, …, $\mathrm{d}x_n$. Jestliže toto vyjádření dosadíme do kvadratické formy Ψ, získáme kvadratickou formu $\Phi(\mathrm{d}x_{r+1}, \ldots, \mathrm{d}x_n)$ proměnných $\mathrm{d}x_{r+1}$, $\mathrm{d}x_{r+2}$, …, $\mathrm{d}x_n$.

Jestliže je tato kvadratická forma Φ pozitivně definitní, má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ ostré lokální minimum vzhledem k množině M.

Jestliže je tato kvadratická forma Φ negativně definitní, má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ ostré lokální maximum vzhledem k množině M.

Jestliže je tato kvadratická forma Φ indefinitní, nemá funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ vzhledem k množině M lokální extrém.

`Poznámka:` Uvedená věta je poměrně dlouhá na zapamatování, ale její použití lze popsat velmi jednoduše. Nejprve sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k g_k(\mathbf{x}) \,,$$

kde λ_k jsou zatím neznámé konstanty. Nutné podmínky pro to, aby měla funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, jsou

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial L}{\partial x_2}(\mathbf{a}) = \ldots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = 0 \quad \text{a} \quad g_1(\mathbf{a}) = g_2(\mathbf{a}) = \ldots = g_r(\mathbf{a}) = 0 \,. \tag{19}$$

Z této soustavy $(n + r)$ rovnic pro $(n + r)$ neznámých nalezneme $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a λ_1, λ_2, …, λ_r.

Pro tyto hodnoty sestrojíme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $L(\mathbf{x})$, tj.

$$\mathrm{d}^2 L(\mathbf{a}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \, \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_j \,. \tag{20}$$

Z rovnic
$$\mathrm{d}g_k(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{a})\,\mathrm{d}x_i = 0\,, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, r\,,$$
vyjádříme r z hodnot $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, …, $\mathrm{d}x_n$ pomocí $(n-r)$ ostatních a dosadíme do (20). Tím získáme kvadratickou formu $(n-r)$ proměnných Φ, která rozhoduje o typu extrému lokálního vázaného extrému funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x+y+z$ na množině M, která je dána rovnicí $g(x,y,z) = xyz - 1 = 0$.

Řešení: Na tomto příkladě ukážeme použití metody Lagrangeových multiplikátorů. Nejprve sestrojíme Lagrangeovu funkci
$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = x+y+z+\lambda(xyz-1)\,.$$
Podle (19) jsou nutné podmínky pro extrém
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda yz = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda xz = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 1 + \lambda xy = 0\,, \quad xyz = 1\,.$$
Jestliže první rovnici vynásobíme x, druhou y a třetí z a použijeme toho, že $xyz = 1$, dostaneme vztah
$$x = y = z = -\lambda\,.$$
Po dosazení do podmínky $xyz = 1$, pak získáme bod $\mathbf{a} = [1,1,1]$ a hodnotu $\lambda = -1$. Jedině pro tyto hodnoty může mít funkce lokální extrém. Abychom určili jeho typ, najdeme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $L(x,y,z)$, ve které je $\lambda = -1$ v bodě $\mathbf{a}$. Ten je
$$\mathrm{d}^2L(\mathbf{a}) = -2(\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\,. \tag{21}$$
Tato forma je indefinitní. Ale z toho ještě neplyne, že funkce $f(\mathbf{x})$ nemá v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém. Z diferenciálu rovnice vazby v bodě $\mathbf{a}$ totiž plyne, že proměnné $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ splňují vztah
$$\mathrm{d}g(\mathbf{a}) = \,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y + \,\mathrm{d}z = 0\,.$$
Jestliže odtud vyjádříme $\mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}x - \,\mathrm{d}y$ a dosadíme do (21), dostaneme kvadratickou formu
$$\Phi(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 2\big(\,\mathrm{d}x^2 + \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \,\mathrm{d}y^2\big)\,,$$
o které se lze snadno přesvědčit (například pomocí Sylvesterova kritéria), že je pozitivně definitní.

Tedy funkce $f(x,y,z)$ má na množině dané rovnicí $xyz = 1$ lokální minimum 3, v bodě $\mathbf{a} = [1,1,1]$.

Mohli jsme samozřejmě postupovat také jinak. Z rovnice vazby $xyz = 1$ plyne, že $z = \dfrac{1}{xy}$. Jestliže dosadíme tuto hodnotu z do funkce $f(x,y,z)$, dostaneme funkci dvou proměnných
$$F(x,y) = f\Big(x, y, \frac{1}{xy}\Big) = x + y + \frac{1}{xy}\,.$$

Nyní můžeme hledat lokální extrémy funkce $F(x,y)$ bez vazbové podmínky, tj. na otevřené množině. Podle první části přednášky jsou nutné podmínky pro lokální extrém funkce $F(x,y)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2 y} = 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{xy^2} = 0\,.$$

tato soustava má jediné řešení $x = y = 1$. Abychom rozhodli o typu extrému funkce $F(x,y)$ v bodě $\mathbf{a} = [1,1]$, budeme zkoumat kvadratickou formu, která odpovídá druhému diferenciálu $\mathrm{d}^2F(\mathbf{a})$. Protože

$$F''_{,xx} = \frac{2}{x^3y}\,, \qquad F''_{,xy} = \frac{1}{x^2y^2}\,, \qquad F''_{,yy} = \frac{2}{xy^3}\,,$$

Odpovídá druhému diferenciálu $\mathrm{d}^2F(\mathbf{a})$ matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}.$$

A protože $D_1 = 2 > 0$ a $D_2 = 3 > 0$, je kvadratická forma $\mathrm{d}^2F(\mathbf{a})$ pozitivně definitní, tedy v bodě $x = y = 1$ má funkce $F(x,y)$ lokální minimum $F(1,1) = 3$. Proto má funkce $f(x,y,z)$ za podmínky $xyz = 1$ lokální minimum v bodě $x = y = 1$, $z = \dfrac{1}{xy} = 1$, které je $f(1,1,1) = 3$.

`Poznámka.` Jak jsme viděli v předcházejícím příkladě, lze mnohé příklady na vázané extrémy řešit tak, že vyřešíme rovnice vazeb a budeme hledat lokální extrémy funkce méně proměnných bez vazeb nebo pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. Obecně platí, že je z technického hlediska lepší vyřešit, co největší počet vazeb a Lagrangeovy multiplikátory použít jen pro vazby, které vyřešit neumíme. Každá nevyřešená vazba nám totiž přidá do soustavy pro nalezení stacionárního bodu **a** dvě rovnice, jednu pro nevyřešenou souřadnici vazby a druhou pro Lagrangeův multiplikátor, který vazbě odpovídá.

Příklad. Uvedeme ještě jeden příklad. Jedná se o nalezení lokálního extrému funkce $y = y(\mathbf{x})$ dané implicitně rovnicí $F(\mathbf{x},y) = 0$. Jeden z možných postupů jeho řešení je najít podle věty o implicitních funkcích parciální derivace funkce $y(\mathbf{x})$ a použít podmínky pro extrémy ve tvaru $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$.

Jiná možnost spočívá v použití metody Lagrangeových multiplikátorů. Máme totiž najít lokální extrémy funkce $f(\mathbf{x},y) = y$ na množině dané rovnicí $F(\mathbf{x},y) = 0$. Lagrangeova funkce je v tomto případě

$$L(\mathbf{x}) = y + \lambda F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)\,.$$

Tedy nutné podmínky pro lokální extrém v bodě $[\mathbf{a}, b]$ jsou

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{a},b) = \lambda\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a},b) = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(\mathbf{a},b) = 1 + \lambda\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a},b) = 0\,, \qquad F(\mathbf{a},b) = 0\,.$$

Z druhé plyne $\lambda \neq 0$, a tedy musí platit

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a},b) = 0\,, \qquad F(\mathbf{a},b) = 0\,, \qquad \lambda^{-1} = -\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a},b) \neq 0\,. \tag{22}$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je v bodě $[\mathbf{a}, b]$ je

$$\mathrm{d}^2 L = \lambda\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}, b)\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y}(\mathbf{a}, b)\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{a}, b)\,\mathrm{d}y^2\Big)\,.$$

Z diferenciálu rovnice vazby $F(\mathbf{x}, y) = 0$ dostaneme v bodě $[\mathbf{a}, b]$ vztah

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}, b)\,\mathrm{d}x_i + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Ale protože v bodě $[\mathbf{a}, b]$ platí $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}, b) = 0$ a $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$, musí být $\mathrm{d}y = 0$. Po dosazení do $\mathrm{d}^2 L$, pak dostaneme kvadratickou formu

$$\Phi = \lambda \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}, b)\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j\,, \qquad \text{kde} \quad \lambda^{-1} = -\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0\,,$$

která rozhoduje o typu lokálního extrému implicitně definované funkce $y = y(\mathbf{a})$, pro kterou platí $y(\mathbf{a}) = b$.

Globální extrémy spojité funkce na kompaktní množině

Mnohé příklady na hledání extrémů vedou právě k úlohám tohoto typu. Připomeňme, že množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená. Pro spojité funkce na kompaktní množině M platí tzv. *Weierstrassova věta*:

Věta. Nechť je $f(\mathbf{x})$ spojitá funkce na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak existují v M body $\mathbf{x}_{\min}$ a $\mathbf{x}_{\max}$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in M$ je $f\big(\mathbf{x}_{\min}\big) \leq f(\mathbf{x}) \leq f\big(\mathbf{x}_{\max}\big)$.

Jestliže diferencovatelná funkce $f(\mathbf{x})$ nabývá extrém v bodě $\mathbf{a}$, který je vnitřní bod množiny M, musí mít v tomto bodě lokální extrém, a tedy musí být $\mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = 0$.

Jestliže funkce nabývá extrémní hodnoty v bodě $\mathbf{a}$, který leží na hranici M, musí funkce $f(\mathbf{x})$ v tomto bodě lokální extrém vzhledem k hranici množiny M a jde tedy o vázaný extrém, který najdeme například metodou Lagrangeových multiplikátorů nebo jiným postupem, o kterém jsme se zmínili v předcházející části.

Těmito dvěma postupy najdeme množinu bodů N, ve kterých může funkce $f(\mathbf{x})$ nabývat na množině M globální extrém. Ten pak najdeme jako

$$f_{\min}(M) = \min\big\{f(\mathbf{a})\,;\ \mathbf{a} \in N\big\}\,, \qquad f_{\max}(M) = \max\big\{f(\mathbf{a})\,;\ \mathbf{a} \in N\big\}\,.$$

Poznamenejme, že v tomto případě nemusíme zkoumat typ lokálního extrému v bodech $\mathbf{a} \in N$ pomocí druhého diferenciálu.

Příklad. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $M \subset \mathbb{R}^2$ dané nerovnostmi $0 \leq x \leq 3$ a $0 \leq y \leq 2x^2$.

Řešení: Protože je funkce $f(x, y)$ spojitá v $\mathbb{R}^2$ a množina M je kompaktní, v M existují body, ve kterých dosahuje funkce $f(x, y)$ své nejmenší a největší hodnoty.

Z vnitřních bodů množiny M, tj. množiny $0 < x < 3$ a $0 < y < 2x^2$, to mohou být pouze body, ve kterých je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0\,.$$

Tato soustava má řešení $x = y = 0$ a $x = y = 1$. Protože bod $[0,0]$ není vnitřním bodem množiny M, bude nás zajímat pouze bod $\mathbf{a}_1 = [1,1]$.

Hranice množiny M je tvořena třemi křivkami:

1. úsečkou $y = 0$, $0 \le x \le 3$;
2. úsečkou $x = 3$, $0 \le y \le 18$;
3. částí paraboly $y = 2x^2$, $0 \le x \le 3$.

Na první úsečce budeme lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ s podmínkou $y = 0$, $0 \le x \le 3$. Jestliže dosadíme $y = 0$, zjistíme, že máme najít extrémy funkce $F_1(x) = f(x,0) = x^3$ na uzavřeném intervalu $x \in \langle 0,3 \rangle$. Protože $F_1'(x) = 3x^2 \neq 0$ pro $0 < x < 3$, může mít funkce $F_1(x)$ pro $\langle 0,3 \rangle$ extrém pouze v krajních bodech intervalu. Tak dostaneme body $\mathbf{a}_2 = [0,0]$ a $\mathbf{a}_3 = [3,0]$.

Podobně na druhé úsečce budeme hledat extrém funkce $F_2(y) = f(3,y) = y^3 - 9y + 27$ pro $y \in \langle 0,18 \rangle$. Protože $F_2'(y) = 3y^2 - 9$, mohou být extrémy pouze v bodech $\mathbf{a}_4 = \left[3, \sqrt{3}\right]$, $\mathbf{a}_3 = [3,0]$ (to už víme) a v bodě $\mathbf{a}_5 = [3,18]$.

Na třetí křivce budeme hledat extrémy funkce $F_3(x) = f(x,2x^2) = 8x^6 - 5x^3$ pro $x \in \langle 0,3 \rangle$. Krajní body tohoto intervalu jsou body $\mathbf{a}_2 = [0,0]$ a $\mathbf{a}_5 = [3,18]$. Protože $F_3'(x) = 48x^5 - 15x^2 = 0$ pro $x = \sqrt[3]{\frac{5}{16}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \in (0,3)$, dostaneme bod $\mathbf{a}_6 = \left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{25}{4}}\right]$.

Funkce $f(x,y)$ může na množině M nabývat největší a nejmenší hodnoty pouze v bodě z množiny $N = \left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6\right\}$. A protože

$$f(\mathbf{a}_1) = -1, \quad f(\mathbf{a}_2) = 0, \quad f(\mathbf{a}_3) = 27, \quad f(\mathbf{a}_4) = 27 - 9\sqrt{3}, \quad f(\mathbf{a}_5) = 5697, \quad f(\mathbf{a}_6) = -\tfrac{25}{32}$$

a

$$\min\left\{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3), f(\mathbf{a}_4), f(\mathbf{a}_5), f(\mathbf{a}_6)\right\} = f(\mathbf{a}_1) = -1\,,$$
$$\max\left\{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3), f(\mathbf{a}_4), f(\mathbf{a}_5), f(\mathbf{a}_6)\right\} = f(\mathbf{a}_5) = 5697\,,$$

nabývá funkce $f(x,y)$ na množině M nejmenší hodnotu -1 v bodě $[1,1]$ a největší hodnotu 5697 v bodě $[3,18]$.