Přednáška 4

Limita a spojitost funkce a zobrazení jedné reálné proměnné

V několika následujících přednáškách budeme studovat zobrazení jedné reálné proměnné $\mathbf{f} : X \to Y$, kde $X \subset \mathbb{R}$ a $Y \subset \mathbb{R}^k$. Protože pro každé $x \in X$ je $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^k$, neboli $(y_1, y_2, \dots, y_k) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\big)$, kde f_i jsou pro $i = 1, 2, \dots, k$ funkce na množině X, tj. nabývají reálné hodnoty, budeme se nejprve zabývat funkcemi $f : X \to Y$, kde X a Y jsou podmnožiny reálných čísel.

Diferenciální počet se v podstatě zabývá "lokálním" chováním funkce v daném bodě, tj. chováním funkce v nějakém "nekonečně" malém okolí tohoto bodu. Pomocí lokálního chování funkce v každém bodě množiny M pak usuzujeme na chování funkce na celé množině M, tzv. "globální" chování, které nás většinou zajímá.

Je-li dána funkce $y = f(x)$ a bod a, který je vnitřní bod definičního oboru, snažíme se tuto funkci v bezprostředním okolí bodu a přibližně nahradit nějakou jednodušší funkcí, u které jsme schopni zkoumat její vlastnosti. V diferenciálním počtu budeme nahrazovat dané funkce polynomy, tj. budeme se snažit napsat

$$f(x) \approx c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots\,, \tag{1}$$

kde $c_0, c_1, \dots$ jsou nějaké konstanty. Ty se snažíme vybrat tak, aby chyba, kterou uděláme, když nahradíme funkci polynomem daného stupně byla v okolí bodu a, tj. pro malá $|x-a|$, co nejmenší. Například, pokud se snažíme nahradit funkci $y = f(x)$ a okolí budu $x = a$ lineární funkcí, tj. přímkou, je z grafického názoru přirozené vybrat tuto přímku tak, aby byla tečnou ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big[a; f(a)\big]$.

Jestliže do vztahu (1) dosadíme $x = a$, dostaneme $c_0 = f(a)$. Vztah (1) pak můžeme pro $x \neq a$ napsat jako

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx c_1 + c_2(x-a) + \dots\,.$$

Konstantu c_1 dostaneme tak, že do pravé strany tohoto vztahu "dosadíme" $x = a$. Bohužel na levé straně je neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Přitom je pro každé x z okolí bodu a na levé straně definovaný výraz, který je pro malá $|x-a|$ může "skoro" rovnat nějakému číslu c_1.

Nejprve budeme přesně definovat, co máme na mysli tvrzením "funkce $y = f(x)$ se v bezprostředním okolí bodu a skoro rovna A", tj. limitu funkce.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$, bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadný bod definičního oboru D_f, a $A \in \mathbb{R}$. Jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in D_f\,;\ 0 < |x-a| < \delta \ \text{ je } \ \big|A - f(x)\big| < \varepsilon \tag{2}$$

(ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé x z definičního oboru funkce $f(x)$, které se nerovná a a jehož vzdálenost od bodu a je menší než δ, je vzdálenost bodu $f(x)$ od bodu A menší než ε), řekneme, že *funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A*. Tento výrok budeme zapisovat jako

$$\lim_{x\to a} f(x) = A\,.$$

Limitě z této definice, tj. když bod a i limita A jsou konečná reálná čísla, se říká vlastní limita ve vlastním bodě. Budeme ještě definovat limity pro $a = \pm\infty$, tj. limity v nevlastním bodě, a limity, které jsou rovny $\pm\infty$, tzv. nevlastní limity.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem D_f. Jestliže

$$\forall K \; \exists \delta > 0\,; \; \forall x \in D_f\,; \; 0 < |x - a| < \delta \;\text{ je }\; f(x) > K\,, \tag{3}$$

říkáme, že má funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $+\infty$. Tento výrok zapisujeme jako

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty\,.$$

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a $A \in \mathbb{R}$. Jestliže je $+\infty$ hromadným bodem D_f a

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{R}\,; \; \forall x \in D_f\,; \; x > K \;\text{ je }\; \big|A - f(x)\big| < \varepsilon\,, \tag{4}$$

říkáme, že má funkce v bodě $+\infty$ vlastní limitu A. Tento výrok zapisujeme jako

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A\,.$$

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a $+\infty$ je hromadným bodem D_f. Jestliže

$$\forall K \; \exists L\,; \; \forall x \in D_f\,; \; x > L \;\text{ je }\; f(x) > K\,, \tag{5}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $+\infty$ limitu $+\infty$ a píšeme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

`Poznámka:` Podobně se definují limity v bodě $-\infty$ a limity rovné $-\infty$.

Všechny definice limity lze jediným způsobem zapsat pomocí okolí bodů.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$, bod $a \in \mathbb{R}^*$, který je hromadný bod D_f a $A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže ke každému okolí $U(A)$ bodu A existuje okolí $V(a)$ bodu a takové, že pro každé x z definičního oboru funkce $f(x)$, které je prvkem okolí $V(a)$ a $x \neq a$ patří hodnota funkce $f(x)$ do okolí $U(A)$ bodu A, tj.

$$\forall U(A) \; \exists V(a)\,; \; \forall x \in D_f \cap V(a)\,; \; x \neq a \;\text{ je }\; f(x) \in U(A)\,, \tag{6}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A.

Limitu zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y$, kde $X \subset \mathbb{R}$ a $Y \subset \mathbb{R}^k$ budeme definovat pomocí okolí bodu.

Definice. Nechť je $\mathbf{f} : X \to Y$ zobrazení množiny $X \subset \mathbb{R}$ do množiny $Y \subset \mathbb{R}^k$ a a je hromadný bod množiny X a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$. Jestliže

$$\forall U(\mathbf{A}) \; \exists V(a)\,; \; \forall x \in D_{\mathbf{f}} \cap V(a)\,, \; x \neq a \text{ je } \mathbf{f}(x) \in U(\mathbf{A}) \tag{7}$$

řekneme, že zobrazení $\mathbf{f}$ má v bodě a limitu $\mathbf{A}$.

Pokud existuje limita funkce nebo zobrazení, je jediná. To je tvrzení následující věty.

Věta. Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$ je tato limita jediná.

DŮKAZ: Nechť existují $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$ a $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{B}$ a platí $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$. Protože $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, existují okolí $U(\mathbf{A})$ a $U(\mathbf{B})$ takové, že $U(\mathbf{A}) \cap U(\mathbf{B}) = \emptyset$. Podle definice limity (7) existují okolí $V_{\mathbf{A}}(a)$ a $V_{\mathbf{B}}(a)$ bodu a takové, že pro každé $x \in D_{\mathbf{f}} \cap V_{\mathbf{A}}(a)$, $x \neq a$, je $\mathbf{f}(x) \in U(\mathbf{A})$ a pro každé $x \in D_{\mathbf{f}} \cap V_{\mathbf{B}}(a)$, $x \neq a$, je $\mathbf{f}(x) \in U(\mathbf{B})$. Protože je bod a hromadný bod $D_{\mathbf{f}}$, obsahuje množina $D_{\mathbf{f}} \cap V_{\mathbf{A}}(a) \cap V_{\mathbf{B}}(a)$ alespoň jeden bod $x \neq a$. Pak ale je $\mathbf{f}(x) \in U(\mathbf{A}) \cap U(\mathbf{B}) = \emptyset$. To je nemůže být pravda (= spor).

Proto není pravda tvrzení: Existují $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$ a $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{B}$ a platí $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, a tedy platí jeho negace. To je právě tvrzení uvedené věty.

`Poznámka:` Důkaz tohoto typu se v matematice nazývá *důkaz sporem.* Jeho logická podstata spočívá $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní výroku $\overline{A} \vee B$. Jeho negace je $A \wedge \overline{B}$. Při důkazu sporem dokážeme, že tento výrok, tj. $A \wedge \overline{B}$, neplatí. Proto musí platit jeho negace, tj. výrok $\overline{A} \vee B$, což je ekvivalentní výroku $A \Rightarrow B$.

Zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y \subset \mathbb{R}^k$ lze popsat pomocí k funkcí $\mathbf{f}(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\big)$. Vyvstává otázka, jak souvisí limita zobrazení $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A} = \big(A_1, A_2, \dots, A_k\big)$ s limitami funkcí $\lim\limits_{x\to a} f_i(x)$. Odpověď dává následující věta.

Věta. Limita zobrazení $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A} = \big(A_1, A_2, \dots, A_k\big)$ existuje právě tehdy, když pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ existují konečné limity $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = A_i$.

`Poznámka:` Z přechozí věty je zřejmé, že při výpočtu limity zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y \subset \mathbb{R}^k$ vystačíme s výpočtem limity funkcí $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$. Proto se v dalším omezíme na výpočet limit reálné funkce jedné reálné proměnné.
Je ale třeba poznamenat, že pokud aspoň jedna limita $\lim\limits_{x\to a} f_i(x)$ neexistuje nebo není konečná, limita zobrazení $\mathbf{f}(x)$ v bodě a neexistuje.

Limity funkcí počítáme většinou tak, že známe základní limity a ostatní limity počítáme pomocí základních limit a určitých vět. Je věcí každého, jaké limity bude považovat za základní. Uvedeme některé limity, které byste měli umět zpaměti

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}\,, \\
&\lim_{x\to +\infty} \frac{x^p}{\mathrm{e}^{qx}} = 0\,, \qquad p \in \mathbb{R}\,, \quad q > 0\,, \\
&\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^p x}{x^q} = 0\,, \qquad p \in \mathbb{R}\,, \quad q > 0\,, \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1\,, \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1
\end{aligned}
$$

a vlastně všechny limity typu

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\,,$$

které se nazývají derivace funkce $f(x)$.

Pro algebraické operace s limitami platí

Věta. Jestliže existují limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\in\mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B\in\mathbb{R}^*$ a α, $\beta\in\mathbb{R}$, a je-li a hromadný bod $D_f\cap D_g$ (pro podíl $D_{f/g}$) pak platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\bigl(\alpha f(x)+\beta g(x)\bigr)=\alpha A+\beta B\,,\\
&\lim_{x\to a}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)=AB\,,\\
&\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\,,
\end{aligned}$$

za předpokladu, že jsou výrazy vpravo definovány v $\mathbb{R}^*$.

Připomeňme, že nejsou definovány výrazy typu $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$.

Definici limity funkce můžeme ještě rozšířit tak, že nebudeme při limitě uvažovat všechna $x\in D_f$, ale pouze $x\in M\subset D_f$. V podstatě se jedná o limitu zúžené funkce $f_{|M}$.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$, množina $M\subset D_f$, bod a, který je hromadný bod množiny M a $A\in\mathbb{R}^*$. Jestliže

$$\forall U(A)\ \exists V(a)\,;\ \forall x\in M\cap V(a)\,;\ x\neq a\ \text{ je }\ f(x)\in U(A)\,, \tag{8}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a vzhledem k množině M limitu A. Toto tvrzení zapisujeme jako

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x)=A\,.$$

Pro takové limity platí věta:

Věta. Nechť existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Nechť je $M\subset D_f$ a bod a je hromadný bod množiny M. Pak platí

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)=A\,.$$

Limity funkcí vzhledem k množinám budeme pro funkci jedné reálné proměnné používat pro $M=(a,+\infty)$ nebo $M=(-\infty,a)$. Jestliže je $a\in\mathbb{R}$ a $M=(a,+\infty)$, resp. $M=(-\infty,a)$, mluvíme o limitě funkce v bodě a zprava, resp. zleva.

Definice. Nechť je $a\in\mathbb{R}$ hromadný bod množiny $D_f\cap(a,+\infty)$ a $A\in\mathbb{R}^*$. Jestliže

$$\forall U(A)\ \exists\delta>0\,;\ \forall x\in D_f\,;\ 0<x-a<\delta\ \text{ je }\ f(x)\in U(A)\,, \tag{9}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu zprava rovnou A a píšeme $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)=A$.

Podobně, nechť je $a\in\mathbb{R}$ hromadný bod množiny $D_f\cap(-\infty,a)$ a $A\in\mathbb{R}^*$. Jestliže

$$\forall U(A)\ \exists\delta>0\,;\ \forall x\in D_f\,;\ 0<a-x<\delta\ \text{ je }\ f(x)\in U(A)\,, \tag{10}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu zleva rovnou A a píšeme $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = A$.

Limity zprava a zleva se nazývají jednostranné limity a limitu $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ budeme nazývat oboustranná limita funkce $f(x)$ v bodě a.

Věta. Pokud je bod a hromadným bodem množin $D_f \cap (a, +\infty)$ a $D_f \cap (-\infty, a)$ existuje oboustranná limita funkce $f(x)$ v bodě a právě tehdy, když existují obě jednostranné limity funkce $f(x)$ v bodě a a jsou si rovny.

Tato věta se často používá k tomu, abychom ukázali, že limita funkce neexistuje.

Příklad. Ukažte, že neexistuje limita $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3}$.

Řešení: Jestliže dosadíme $x = 1$, vidíme, že se jedná o limitu typu $\dfrac{4}{0}$, tj. tato limita rovna $\pm\infty$. Protože pro $x > 1$ je $x - 1 > 0$, platí $\lim\limits_{x\to 1_+} \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3} = +\infty$, a protože pro $x < 1$ je $x - 1 < 0$, je $\lim\limits_{x\to 1_-} \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3} = -\infty$. A protože jsou tyto limity různé, oboustranná limita neexistuje.

Jestliže předpokládáme, že bod a je hromadným bodem definičních oborů průniku všech funkcí, jsou následující věty bezprostředním důsledkem definice limity.

Věta. Jestliže na nějakém okolí bodu a platí $f(x) \le g(x)$, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Věta. Jestliže na nějakém okolí bodu a platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$, a existují $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, pak je $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Příklad: Dokažte, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Řešení: Protože funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ je sudá, stačí ukázat, že $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Úhel x v obloukové míře budeme měřit délkou oblouku na jednotkové kružnici se středem v počátku $O = [0; 0]$ od kladné vodorovné polopřímky, na které leží bod $P = [1; 0]$. Bod M, který odpovídá velikosti úhlu $x \ge 0$ pak má souřadnice $M = [\cos x; \sin x]$. Obsah pravoúhlého trojúhelníka s přeponou OM a odvěsnou na polopřímce OP je roven $P_1 = \frac{1}{2} \cos x \sin x$ a je menší než obsah kruhové výseče OPM, která je $P_2 = \frac{1}{2} x$. Tedy pro $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ platí nerovnost

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \le \frac{x}{2} \implies \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}\,.$$

Na druhé straně je obsah výseče OPM menší než obsah pravoúhlého trojúhelníka a odvěsnou OP, jehož přepona leží na polopřímce OM, který je $P_3 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. Z toho dostaneme pro $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ nerovnost

$$\frac{x}{2} \le \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x} \implies \cos x \le \frac{\sin x}{x}\,.$$

Celkově tedy pro $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ platí

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}\,.$$

A protože $\lim\limits_{x\to 0_+} \cos x = 1$, je podle předchozí věty $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Věta. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to a} \bigl|f(x)\bigr| = 0$.

Věta. Jestliže je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a existuje okolí bodu a, ve kterém je funkce $g(x)$ omezená, je $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

Příklad: Protože $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ a platí nerovnost $\left|\sin \dfrac{1}{x}\right| \le 1$, je $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Nyní uvedeme větu, které se týká limity složené funkce $h = g \circ f$. Jde o to, kdy můžeme počítat limitu složené funkce počítat jako dvě limity, nejprve limitu funkce f a následně limitu funkce g.

Přesněji, jsou dány funkce $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$. Nechť a je hromadný bod množiny X a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Nechť je A hromadný bod množiny Y a existuje $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$. Otázka je, kdy je $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = B$?

Příklad: Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována předpisem $f(x) = 0$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována jako $g(y) = 0$ pro $y \ne 0$ a $g(0) = 1$. Pak je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Ale pro složenou funkci $h(x) = g\bigl(f(x)\bigr) = g(0) = 1 \ne 0$.

Tento příklad ukazuje, že obecně nelze limitu složené funkce počítat jako dvě limity. Problém spočívá v tom, že při definici limity $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$ nebereme v úvahu samotný bod $y = A$. Proto musíme vyloučit případ, kdy v každém okolí bodu a existuje bod $x \ne a$ takový, že $f(x) = A$, nebo do definice "limity"funkce $g(y)$ zahrnout i bod A.

Věta: Nechť jsou dány funkce $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $h = g \circ f : X \to Z$. Nechť a je hromadný bod množiny X a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Nechť je A hromadný bod množiny Y a existuje $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$. Nechť existuje prstencové okolí $P(a)$ bodu a takové, že pro každé $x \in P(a)$ je $f(x) \ne A$. Pak je $\lim\limits_{x\to a} h(x) = B$.

Jestliže do definice "limity"funkce $f(x)$ v bodě a zahrneme i samotný bod a dostaneme tzv. funkci spojitou v bodě a.

Definice. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě* $a \in D_f$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\,;\; \forall x \in D_f\,;\; |x - a| < \delta \;\text{ je }\; \bigl|f(a) - f(x)\bigr| < \varepsilon\,. \tag{11}$$

Podobně definujeme zobrazení spojité v bodě a. Pouze musíme použít vzdálenost $d(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ v $\mathbb{R}^k$.

Definice. Řekneme, že zobrazení $\mathbf{f}(x)$ je *spojité v bodě* $a \in D_f$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\,;\; \forall x \in D_f\,;\; |x - a| < \delta \;\text{ je }\; d\bigl(\mathbf{f}(x), \mathbf{f}(a)\bigr) < \varepsilon\,. \tag{12}$$

Podobně jako pro limity platí následující věta:

Věta. Zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y \subset \mathbb{R}^k$ je spojité v bodě a právě tehdy, když jsou v bodě a spojité všechny funkce $y_i = f_i(x)$.

`Poznámka`: Body $a \in D_f$, ve kterých je funkce $f(x)$ spojitá, jsou dvojího druhu:

1. a je izolovaný bod D_f;
2. a je hromadný bod D_f a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Příklad: Dodefinujte funkci $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ v bodě $x = 0$ tak, aby byla v tomto bodě spojitá.

Řešení: Aby byla funkce $f(x)$ v bodě $x = a$ spojitá, musí platit $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Proto musíme položit

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,.$$

Věta. Nechť jsou dány funkce $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $h = g \circ f : X \to Z$. Nechť a je hromadný bod množiny X, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a nechť je funkce $g(y)$ spojitá v bodě A. Pak je

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big) = g(A)\,.$$

Definice. Nechť je dáno zobrazení $\mathbf{f}(x)$ a $M \subset D_{\mathbf{f}}$. Říkáme, že zobrazení $\mathbf{f}(x)$ je *spojité na množině* M, je-li spojité v každém bodě množiny M.
Zobrazení $\mathbf{f}(x)$ spojité na $D_{\mathbf{f}}$ nazýváme *spojité*.

Všechny elementární funkce, které jsme definovali v minulé přednášce jsou spojité. Například funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je spojitá, protože $x = 0$ není prvkem D_f. Proto se předcházející věta používá velmi často.

Jako příklad ukážeme použití této věty při výpočtu limit typu 1^∞.

Příklad: Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, pak platí

$$\lim_{x\to a}\big(1 + f(x)\big)^{g(x)} = \exp\Big(\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)\Big). \tag{13}$$

Řešení: Protože podle předpokladu je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, existuje okolí $U(a)$ bodu $a$takové, že pro každé $x \in U(a) \setminus \{a\}$ je $1 + f(x) > 0$. Tedy podle definice platí v tomto okolí

$$\big(1 + f(x)\big)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln\left(1+f(x)\right)}\,.$$

Protože je funkce e^x spojitá v $\mathbb{R}$, platí

$$\lim_{x\to a}\big(1 + f(x)\big)^{g(x)} = \exp\Big(\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln\big(1 + f(x)\big)\Big)\,.$$

Protože je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, je funkce $F(x)$ definovaná pro $x\in(-1,+\infty)$ předpisem

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{pro } \ x\neq 0\,,\\ 1 & \text{pro } \ x=0\end{cases}$$

spojitá. Podle věty o limitě součinu a uvedené věty o limitě složené funkce je tedy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} g(x)\ln\bigl(1+f(x)\bigr) &= \lim_{x\to a}\Bigl(g(x)f(x)\cdot F\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) = \\ &= \lim_{x\to a}\bigl(\lim_{x\to a}\bigl(g(x)\cdot f(x)\bigr)\cdot\lim_{x\to a}F\bigl(f(x)\bigr) = \lim_{x\to a}\bigl(g(x)\cdot f(x)\bigr)\,,\end{aligned}$$

protože $\lim\limits_{x\to a}F\bigl(f(x)\bigr)=F(0)=1$.

Pro spojité funkce platí následující věta.

Věta. Nechť jsou funkce $f:X\to Y$ a $g:Y\to Z$ spojité. Pak je složená funkce $h=g\circ f:X\to Z$ spojitá.

Pomocí limit se počítají tzv. asymptoty ke grafu funkce $y=f(x)$. Asymptoty jsou v podstatě přímky, ke kterým se blíží graf funkce v krajním bodě definičního oboru nebo v bodě nespojitosti funkce $f(x)$.

Definice. Přímka $x=a$ se nazývá *svislou asymptotou* ke grafu funkce $y=f(x)$, jestliže v bodě a existuje aspoň jedna nevlastní jednostranná limita funkce $f(x)$, tj. když

$$\lim_{x\to a_+}f(x)=\pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to a_-}f(x)=\pm\infty\,.$$

Příklad: Funkce

$$y=\frac{x+1}{\sqrt{x^3+2x^2-x-2}}=\frac{x+1}{\sqrt{(x+2)(x+1)(x-1)}}$$

má definiční obor $(-2,-1)\cup(1,+\infty)$. Protože

$$\lim_{x\to -2_+}f(x)=-\infty\,,\qquad \lim_{x\to 1_+}f(x)=+\infty\,,$$

jsou přímky $x=-2$ a $x=1$ svislé asymptoty ke grafu funkce $y=f(x)$. Ale protože

$$\lim_{x\to -1_-}f(x)=0\,,$$

není přímka $x=-1$ asymptota.

Definice. Přímka $y=kx+q$ se nazývá *asymptota* ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. v bodě $-\infty$, jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(f(x)-kx-q\bigr)=0\,,\quad \text{resp.}\quad \lim_{x\to-\infty}\bigl(f(x)-kx-q\bigr)=0\,. \tag{14}$$

Je-li $k=0$ nazývá se asymptota *vodorovná* a je-li $k\neq 0$ mluvíme o *šikmé asymptotě.*

Je zřejmé, že pokud existuje limita $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = q$, resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = q$, je přímka $y = q$ vodorovná asymptota ke grafu funkce v bodě $+\infty$, resp. v bodě $-\infty$.

Je-li přímka $y = kx + q$ asymptota ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\pm\infty$, je

$$0 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - k\,, \quad \text{tj.} \quad k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}\,.$$

Jestliže známe k, lze najít hodnotu q jako limitu

$$q = \lim_{x\to\pm}\bigl(f(x) - kx\bigr)\,.$$

Příklad: V bodech $\pm\infty$ najděte asymptoty funkce $y = \sqrt{x^2+2x} + x$.

Řešení: Pro $x \to -\infty$ jde o výraz typu $+\infty - \infty$. Protože je

$$\lim_{x\to-\infty}\bigl(\sqrt{x^2+2x} + x\bigr) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\bigl(\sqrt{x^2+2x} + x\bigr)\bigl(\sqrt{x^2+2x} - x\bigr)}{\sqrt{x^2+2x} - x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} - x} = -1\,,$$

je přímka $y = -1$ vodorovná asymptota ke grafu funkce v bodě $-\infty$.

Pro $x \to +\infty$ se jedná o výraz $+\infty + \infty$ a vodorovná asymptota v bodě $x = +\infty$ neexistuje. Abychom našli šikmou asymptotu, najdeme nejprve

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x} + x}{x} = 2\,.$$

Člen q je pak

$$q = \lim_{x\to+\infty}\bigl(\sqrt{x^2+2x} - x\bigr) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\bigl(\sqrt{x^2+2x} - x\bigr)\bigl(\sqrt{x^2+2x} + x\bigr)}{\sqrt{x^2+2x} + x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x} = 1\,.$$

Tedy v bodě $+\infty$ šikmá asymptota přímka $y = 2x + 1$.

Pro spojité funkce platí mnoho důležitých vět, z nichž některé lze najít ve skriptech. Zde uvedeme pouze jednu větu, kterou budeme potřebovat při výpočtu globálních extrémů spojité funkce na kompaktní, tj. omezené a uzavřené, množině $M \subset \mathbb{R}$.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na kompaktní množině M, existují body $x_{\min}$, $x_{\max} \in M$ takové, že pro každé $x \in M$ je $f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max})$.

Tvrzení této, tzv. *Weierstrassovy věty*, lze vyjádřit tak, že každá funkce spojitá na kompaktní množině M má v množině M minimum a maximum.

Důkaz: Aby bylo vidět, jak se v matematice dokazují věty a proč se většinou důkazům v přednášce vyhýbám, uvedeme pro zajímavost důkaz této věty. Zároveň na důkazu budeme demonstrovat důležitou vlastnost kompaktních množin, že pro každou posloupnost x_n

prvků kompaktní množiny M existuje z ní vybraná podposloupnost, která má limitu v M.

Nejprve ukážeme, že každá funkce $f(x)$, která je spojitá na kompaktní množině M je na M omezená. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ na množině M omezená není. Pak je každému $n \in \mathbb{N}$ je množina $M_n = \big\{x \in M\,;\ f(x) > n\big\}$ neprázdná. Z každé množiny M_n vybereme prvek x_n. Takto dostaneme posloupnost $x_n \in M$. Protože je množina M kompaktní, existuje posloupnost y_n vybraná z posloupnosti x_n, která konverguje k prvku $y \in M$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in M$. Podle definice vybrané posloupnosti je $y_n \in M_n$, a tedy $f(y_n) > n$. Protože je funkce $f(x)$ spojitá na množině M, je

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = +\infty\,,$$

což je spor se spojitostí funkce $f(x)$ v bodě $y \in M$.

Podobně se ukáže, že funkce $f(x)$ je na množině M omezená zdola.

Označme $A = \big\{f(x) \in \mathbb{R}\,;\ x \in M\big\}$. Protože je funkce $f(x)$ na množině M omezená, je omezená i množina A, a proto existují $S = \sup A \in \mathbb{R}$ a $s = \inf A \in \mathbb{R}$. Podle definice suprema a infima platí pro každé $x \in M$ nerovnosti $s \le f(x) \le S$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $A_n = \left\{x \in M\,;\ f(x) > S - \dfrac{1}{n}\right\}$. Podle definice suprema, je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina A_n neprázdná. Z každé množiny A_n vybereme prvek $x_n \in A_n$. Tím dostaneme posloupnost $x_n \in M$. Protože M je kompaktní, lze z ní vybrat posloupnost y_n, která konverguje k prvku $y \in M$. Protože je $y_n \in A_n$, platí nerovnost

$$S - \frac{1}{n} \le f(y_n) \le S\,.$$

Jestliže označíme $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in M$, dostaneme ze spojitosti funkce $f(x)$ v bodě y

$$\lim_{n\to\infty}\left(S - \frac{1}{n}\right) = S \le \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y) \le S\,,$$

tj. $f(y) = S$. Tedy existuje $y = x_{\max} \in M$, pro které platí

$$S = f(x_{\max}) \ge f(x) \qquad \forall x \in M\,.$$

Důkaz existence prvku $x_{\min} \in M$ je obdobný.