Přednáška 5

Diferencovatelné funkce

Jak jsme se zmínili v minulé přednášce, je hlavní myšlenkou diferenciálního počtu nahradit danou funkci $y = f(x)$ v okolí bodu a polynomem. V této přednášce se budeme podrobně zabývat tím, jak nejlépe nahradit funkci polynomem prvního stupně, tj. lineární funkcí nebo geometricky, jak nahradit graf funkce v okolí bodu přímkou.

Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a bod a, který je vnitřním bodem definičního oboru. Uvažujme přímku $y = Ax + q$. Jestliže chceme, aby přímka procházela bodem $\bigl[a; f(a)\bigr]$, musí mít rovnice této přímky tvar $y = A(x - a) + f(a)$. Rozdíl mezi hodnotou funkce $y = f(x)$ a přímkou $y = A(x - a) + f(a)$ v bodě x je roven

$$f(x) - f(a) - A(x - a) = Z(x)\,. \tag{1}$$

Když zavedeme odchylku bodu x od daného bodu a, $\Delta x = x - a = h$, dostaneme z (1)

$$f(a + h) - f(a) - Ah = Z(h)\,. \tag{2}$$

Funkce $Z(h)$ je pro dané a funkce proměnné h a závisí samozřejmě na tom, jak zvolíme směrnicí přímky, tj. A. Snaha je, aby byla hodnota absolutní zbytku $Z(h)$ pro malá h co nejmenší. To se vyjadřuje tím, že požadujeme, aby

$$\lim_{h\to 0} \frac{Z(h)}{h} = 0\,.$$

Z těchto úvah dostaneme následující definici.

Definice. Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a bod a, který je vnitřním bodem D_f. Jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{Z(h)}{h} = 0\,, \quad \text{kde} \quad Z(h) = f(a + h) - f(a) - Ah\,, \tag{3}$$

nazývá se funkce $y = f(x)$ *diferencovatelná v bodě* a a lineární funkce

$$\mathrm{d}f(a; h) = Ah$$

proměnné h se nazývá *diferenciál funkce* $f(x)$ v bodě a.

Je-li funkce $y = f(x)$ diferencovatelná v bodě a plyne z (3)

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{Z(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - Ah}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - A\,,$$

tj.

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}\,.$$

Definice. Jestliže existuje konečná limita

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}\,, \tag{4}$$

nazývá se *derivace funkce* $f(x)$ v bodě a.

Je zřejmé, že platí

Věta. Funkce $f(x)$ je diferencovatelná v bodě a právě tehdy, když má v bodě a derivaci a její diferenciál v bodě a je

$$\mathrm{d}f(a;h) = f'(a)\,h\,. \tag{5}$$

Je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná v bodě a, nazývá se přímka

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a) \tag{6}$$

tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\bigl[a; f(a)\bigr]$. Tedy derivace $f'(a)$ funkce $f(x)$ v bodě a je geometricky směrnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\bigl[a; f(a)\bigr]$.

Protože směrnice přímky kolmé k tečně je $-\dfrac{1}{f'(a)}$, je přímka

$$y - f(a) = -\frac{x-a}{f'(a)}\,, \quad \text{tj.} \quad x - a + f'(a)\bigl(y - f(a)\bigr) = 0 \tag{7}$$

normála ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\bigl[a; f(a)\bigr]$.

Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\bigl[a, f(a)\bigr]$ je v rovině xy dána vztahem (6). Jestliže přesuneme počátek souřadnic do bodu $\bigl[a, f(a)\bigr]$ a nové osy označíme h a $\mathrm{d}f$, přejde rovnice tečny na rovnici (5). Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě a je tedy vlastně rovnice tečny v takto posunutých souřadnicích.

Při výpočtech se ukazuje výhodné používat místo proměnné h značku $\mathrm{d}x$ a psát diferenciál funkce $y = f(x)$ ve tvaru

$$\mathrm{d}f(a) = f'(a)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

a derivaci jako

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)\,.$$

Zatím jsme zavedli pouze derivace funkce $y = f(x)$ v bodě a, který je vnitřní bod definičního oboru D_f. Na množině všech bodů, ve kterých existuje derivace lze definovat funkci f', která přiřazuje každému bodu této množiny derivaci funkce f v tomto bodě, tj. $x \mapsto f'(x)$. Taková funkce se nazývá derivace funkce $f(x)$.

Definice. Funkce $y = f(x)$ se nazývá diferencovatelná na množině M, je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M.

Je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná na množině M, nazývá se funkce $f' : M \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $x \mapsto f'(x)$ *derivace funkce na množině* M.

`Poznámka:` Pro zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y$ množiny $X \subset \mathbb{R}$ do množiny $Y \subset \mathbb{R}^k$, tj. $x \mapsto \mathbf{f}(x) = \bigl(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\bigr)$, je derivace

$$\mathbf{f}'(x) = \bigl(f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_k'(x)\bigr)\,,$$

tj. derivuje se každá složka zobrazení $\mathbf{f}(x)$ zvlášť, a diferenciál

$$\mathrm{d}\mathbf{f}(x,h) = \mathbf{f}'(x)h = \bigl(f_1'(x)h, f_2'(x)h, \dots, f_k'(x)h\bigr) = \bigl(\mathrm{d}f_1(x,h), \mathrm{d}f_2(x,h), \dots, \mathrm{d}f_k(x,h)\bigr)$$

se počítá jako diferenciály jednotlivých složek.
Definici a geometrický význam diferenciálu a derivace zobrazení $\mathbf{f}(x)$ uvedeme později, až uvedeme geometrickou, resp. fyzikální, interpretaci zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^k$.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná na množině M, je na množině M spojitá.
DůKAZ: Je-li $a \in M$ je funkce $f(x)$ diferencovatelná v bodě a. Proto je $a \in D_f$ hromadný bod D_f. Musíme tedy dokázat, že $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. To ale dostaneme limitou $h \to 0$ ve vztahu (3).

Derivace funkcí se počítají tak, že známe derivace některých základních funkcí nazpaměť a pro derivace složitějších funkcí používáme vztahy, které jsou obsahem následujících vět. Je věcí každého, jaké derivace považuje za základní a jaké za složitější. Rozhodně byste měli znát všechny derivace funkcí uvedené ve skriptech a používat vztahy uvedené v následujících dvou větách.

Věta. Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné na množině M a α, $\beta \in \mathbb{R}$. Pak

1. je funkce $\alpha f(x) + \beta g(x)$ diferencovatelná na množině M a
$$\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)\,; \tag{9}$$
2. je funkce $f(x) \cdot g(x)$ diferencovatelná na množině M a
$$\big(f(x) \cdot g(x)\big) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\,; \tag{10}$$
3. je-li $g(x) \neq 0$, je funkce $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ diferencovatelná na množině M a
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}\,. \tag{11}$$

Věta. Nechť je funkce $f : X \to Y$ diferencovatelná na množině X a funkce $g : Y \to Z$ diferencovatelná na množině Y. Pak je na množině X diferencovatelná složená funkce $h = g \circ f$, tj. $h(x) = g\big(f(x)\big)$, a platí
$$h'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)\,. \tag{12}$$

Vztah (12) se často píše ve tvaru, který se lépe pamatuje. Označme $z = z(y)$ a $y = y(x)$. Pak lze formálně napsat
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,, \tag{13}$$
kde ale musíme dosadit za $y = y(x)$.

Příklad. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sin\sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}$.
ŘEŠENÍ: Nejprve jde o to, jak budeme chápat funkce $f(x)$. Například když chápeme funkci $f(x)$ jako složenou z funkcí $z = \sin y$ a $y = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}$, dostaneme z (13)
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos\sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,.$$

Funkci y můžeme chápat jako složenou funkci z funkcí $y = \sqrt{u}$ a $u = 1 + \mathrm{e}^{2x}$. Pak je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \,.$$

I funkci u lze chápat jako složenou z funkcí $u = 1 + \mathrm{e}^{v}$ a $v = 2x$. Proto je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{v} \cdot 2 = 2\mathrm{e}^{2x} \,.$$

Když to všechno složíme, dostaneme

$$f'(x) = \cos\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} \,.$$

Příklad: Najděte definiční obor a derivaci funkce $f(x) = (\sin x)^x$.
Řešení: Funkce $f(x)$ je definována vztahem

$$f(x) = (\sin x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} \,.$$

Proto je její definiční obor množina

$$D_f = \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ \sin x > 0\big\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$$

a její derivace

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)}\left(\ln(\sin x) + x\,\frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x\,\big(\ln(\sin x) + x\cot x\big) \,.$$

Nechť je funkce $f(x)$ vzájemně jednoznačná a $g(x)$ je její inverzní funkce. Pak pro každé $x \in D_f$ podle definice platí

$$g\big(f(x)\big) = x \,.$$

Označme $y = f(x)$. Podle věty o derivaci složené funkce plyne z tohoto vztahu

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 1 \,.$$

Z definice inverzní funkce plyne, že $x = g(y)$. Tedy je-li $f'(x) \neq 0$, je

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)} \,. \tag{14}$$

Obecně platí následující věta o derivaci inverzní funkce:

Věta: Nechť je $f : X \to Y$ vzájemně jednoznačná funkce. Nechť je $f'(x) \neq 0$ pro každé $x \in X$ a inverzní funkce $g : Y \to X$ je spojitá na množině Y. Pak je funkce g diferencovatelná na množině Y a platí (14).

Příklad: Najděte derivaci funkce $y = \arcsin x$.

Řešení: Funkce $g(y) = \arcsin y$ je inverzní k funkci $f(x) = \sin x$ zúžené na interval $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$. Protože $f'(x) = \cos x$ je na intervalu $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ nenulová a funkce $\arcsin y$ je spojitá na intervalu $(-1, 1)$, je funkce $\arcsin y$ diferencovatelná na intervalu $(-1, 1)$. Její derivaci lze získat derivací vztahu $\arcsin(\sin x) = x$, který platí pro $x \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$. Jestliže označíme $y = \sin x$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}(\arcsin y)}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\arcsin y)}{\mathrm{d}y} \cdot \cos x = 1\,.$$

Pro $\cos x \neq 0$, tj. $x \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ je

$$\frac{\mathrm{d}(\arcsin y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\cos x}\,.$$

Do tohoto vztahu musíme ještě dosadit za proměnnou x. Ale protože pro $x \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ je $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$, dostaneme pro $y \in (-1, 1)$

$$\big(\arcsin y\big)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,.$$

Derivaci jsme definovali pro vnitřní body definičního oboru funkce $f(x)$ oboustrannou limitou (4). Jestliže v definici budeme uvažovat pouze jednostranné limity, dostaneme jednostranné derivace funkce. Takovým způsobem se definují derivace v krajních bodech D_f (patří-li krajní bod do D_f).

Definice. Jestliže existuje limita

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,, \quad \text{resp.} \quad f'_-(a) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,,$$

nazýváme ji *derivací zprava*, resp. *derivací zleva* funkce $f(x)$ v bodě a.

Podobně jako pro limity platí následující věta.

Věta. Derivace funkce $f(x)$ v bodě a existuje právě tehdy, když existují obě jednostranné derivace a jsou si rovny.

Příklad: Najděte derivaci funkce $f(x) = \mathrm{e}^{|x+1|}$.

Řešení: Funkce $f(x)$ je definována jako

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x+1} & \text{pro } \ x \geq -1\,, \\ \mathrm{e}^{-x-1} & \text{pro } \ x \leq -1\,. \end{cases}$$

Tedy pro $x > -1$ je $f'(x) = \mathrm{e}^{x+1}$ a pro $x < -1$ je $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x-1}$. Protože podle definice je

$$f'_+(-1) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\mathrm{e}^{|h|} - 1}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\mathrm{e}^{h} - 1}{h} = 1\,,$$

$$f'_-(-1) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0_-} \frac{\mathrm{e}^{|h|} - 1}{h} = \lim_{h \to 0_-} \frac{\mathrm{e}^{-h} - 1}{h} = -1\,,$$

derivace funkce $f(x)$ v bodě $x = -1$ neexistuje.

`Poznámka.` Obecně nelze najít derivaci funkce $f(x)$ v bodě a tak, že spočítáte derivaci funkce $f(x)$ a pak dosadíte $x = 0$. Například pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0\,, \end{cases}$$

je pro $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\,,$$

do které bod $x = 0$ dosadit nelze. Mohlo by se zdát, že derivaci $f'(0)$ neexistuje. Ale podle definice je

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0\,,$$

a tedy $f'(0) = 0$. Problém je v tom, že derivace funkce nemusí být spojitá, což většinou mlčky předpokládáte.

Věty o střední hodnotě diferenciálního počtu

Následující tři věty, zejména Lagrangeova věta, hrají v diferenciálním počtu velmi důležitou roli, protože z nich plyne velmi mnoho vlastností diferencovatelných funkcí. Proto je uvedeme i s jejich důkazem. Souhrnně se tyto věty nazývají *věty o střední hodnotě diferenciálního počtu.*

Věta (*Rolleova věta o střední hodnotě*). Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) a platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f'(c) = 0$.

Důkaz: Protože je funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$, existují podle Weierstrassovy věty body $x_m\,, x_M \in \langle a, b \rangle$ takové, že pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.

Jsou-li oba tyto body krajní body intervalu, plyne z podmínky $f(a) = f(b)$, že je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ konstantní, a proto je její derivace rovna nule v každém bodě $c \in (a, b)$.

Nechť je alespoň jeden z bodů x_m nebo x_M vnitřní bod intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť je to například bod x_M. Protože je $x_M \in (a, b)$, existuje v něm podle předpokladů derivace $f'(x_M)$. Nechť je $f'(x_M) > 0$. Podle definice limity existuje k $\varepsilon = \frac{1}{2} f'(x_M) > 0$ číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a, b)$, pro které je $0 < |x - x_M| < \delta$, platí nerovnost

$$0 < \tfrac{1}{2} f'(x_M) < \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M}\,.$$

Ale pro $x > x_M$ plyne z této nerovnosti, že $f(x) - f(x_M) > 0$, tj. $f(x) > f(x_M)$, což je ve sporu s výběrem bodu x_M.

Podobně se ukáže, že předpoklad $f'(x_M) < 0$ vede k tomu, že pro $x < x_M$ je $f(x) > f(x_M)$, což není možné.

Protože $f'(x_M)$ existuje a není ani kladné ani záporná, musí být $f'(x_M) = 0$.

Další dvě věty o střední hodnotě jsou v podstatě důsledky Rolleovy věty.

Věta (*Lagrangeova věta o střední hodnotě*). Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v otevřeném intervalu (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)\,. \tag{15}$$

Důkaz: Sestrojíme funkci $F(x) = (b - a)\big(f(x) - f(a)\big) - (x - a)\big(f(b) - f(a)\big)$. Z předpokladů o funkci $f(x)$ plyne, že je funkce $F(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) a platí $F(a) = F(b) = 0$. Proto splňuje funkce $F(x)$ předpoklady Rolleovy věty, a tedy existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$F'(c) = (b - a)\, f'(c) - \big(f(b) - f(a)\big) = 0\,,$$

což je rovnost (15).

Uvedeme některé důsledky Lagrangeovy věty.

Víme, že derivace funkce $f(x) = c =$ konst. je rovna nule. Z Lagrangeovy věty plyne, že konstantní funkce jsou na intervalu jediné funkce, jejíž derivace je rovna nule.

Nechť je $\mathcal{I} = (a, b)$ interval, $f'(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$ a $x_0 \in \mathcal{I}$. Pro každé $x \in \mathcal{I}$ je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle x_0, x\rangle$ spojitá a má derivaci v každém bodě intervalu (x_0, x). Podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (x_0, x)$ takové, že

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)\,(x - x_0) = 0\,,$$

protože $f'(c) = 0$. Tedy pro každé $x \in \mathcal{I}$ je $f(x) = f(x_0)$, tj. $f(x)$ je konstantní.

Příklad: Najděte intervaly, na kterých je funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1} \tag{16}$$

konstantní a určete její hodnotu na těchto intervalech.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Protože funkce $f(x)$ je na intervalu $\mathcal{I}$ konstantní právě tehdy, když je její derivace $f'(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$, budeme hledat intervaly, na kterých je $f'(x) = 0$. Derivací vztahu (16) dostaneme

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-2(x-1)^2}{\big((x-1)^2 + (x+1)^2\big)(x-1)^2} = 0\,.$$

Protože $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (-\infty, 1) = \mathcal{I}_-$ a $x \in (1, +\infty) = \mathcal{I}_+$, je funkce na těchto intervalech konstantní. Její hodnotu dostaneme tak, že dosadíme jednu, libovolnou, hodnotu $x_- \in \mathcal{I}_-$ a $x_+ \in \mathcal{I}_+$.

Protože $x_- = 0 \in \mathcal{I}_-$ a $f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{1}{4}\pi$, je $f(x) = -\frac{1}{4}\pi$ pro $x < 1$.

Hodnotu funkce na intervalu $\mathcal{I}_+$ lze najít například tak, že "dosadíme"$x_+ = +\infty$. Pak dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x + \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1} = \tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{arctg} 1 = \tfrac{3}{4}\pi\,.$$

Další použití Lagrangeovy věty je při důkazu některých nerovností.

Příklad: Ukažte, že když je $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$, kde $\mathcal{I}$ je interval, je funkce $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ rostoucí.

Řešení: Nechť jsou $x_1 < x_2$ dva libovolné body z intervalu $\mathcal{I}$. Protože je funkce $f(x)$ splňuje na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ předpoklady Lagrangeovy věty, existuje $c \in (x_1, x_2)$ takové, že

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1) > 0\,,$$

protože $f'(c) > 0$ a $x_1 < x_2$.

Podobně se ukáže, že když má funkce $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ derivaci $f'(x) < 0$, je na intervalu $\mathcal{I}$ klesající.

`Poznámka`: Diferenciál funkce $f(x)$ v bodě a, který je vnitřní bod definičního oboru funkce $f(x)$, je v podstatě rovnice tečny ke grafu funkce a derivace směrnice tečny. Směrnice přímky rozhoduje o tom, zda je lineární funkce rostoucí nebo klesající. Proto rozhoduje znaménko derivace o monotonii funkce $f(x)$. V předchozím případě jsme vlastně dokázali následující větu.

Věta. Jestliže má funkce $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ kladnou (zápornou) derivaci, je na intervalu $\mathcal{I}$ rostoucí (klesající).

Definice. Vnitřní body definičního oboru funkce $f(x)$, ve kterých je $f'(x) = 0$, se nazývají *stacionární body* funkce $f(x)$.

Je zřejmé, že ve stacionárních bodech je tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ rovnoběžná s osou x.

Tvrzení následující věty, která se používá při hledání lokálních extrémů funkce $f(x)$, je snad zřejmá.

Věta. Nechť je x_0 stacionární bod funkce $f(x)$. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

1. pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) > 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) > 0$, nemá funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrémů a funkce $f(x)$ je na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ rostoucí;
2. pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) > 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) < 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum;
3. pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) < 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) > 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum;
4. pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) < 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) < 0$, nemá funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrémů a funkce $f(x)$ je na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ klesající.

Trochu jinak postupujeme při hledání globálních extrémů, tj. největší a nejmenší hodnoty, spojité funkce na kompaktní množině M, například na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Základem je následující jednoduchá věta.

Věta. Je-li x_0 vnitřní bod množiny M a $f'(x_0) \neq 0$, nemá funkce $f(x)$ v bodě x_0 na množině M globální extrém.

Důkaz: Je-li $f'(x_0) > 0$, existuje k $\varepsilon = \frac{1}{2}f'(x_0) > 0$ podle definice derivace $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in M$, pro které je $0 < |x - x_0|$, platí

$$0 < \frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,.$$

Protože je x_0 vnitřní bod množiny M existují $x_1 < x_0$ a $x_2 > x_0$ taková, že

$$0 < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \text{a} \qquad 0 < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \,.$$

Tedy platí $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ a funkce $f(x)$ nemá v bodě x_0 globální extrém.

Je-li $f'(x_0) < 0$, vybereme $\varepsilon = -\frac{1}{2}f(x_0) > 0$ a dostaneme nerovnost

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f'(x_0)}{2} < 0 \,,$$

ze které plyne, že existují x_1, $x_2 \in M$, $x_1 < x_0 < x_2$, pro které platí $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$. Proto nemá ani v tomto případě funkce $f(x)$ v bodě x_0 globální extrém.

Máme-li najít extrémy spojité funkce $f(x)$ na kompaktní množině, víme z Weierstrassovy věty, že existují body x_m, $x_M \in M$, ve kterých funkce dosahuje maxima a minima, a z předchozí věty víme, že je-li bod x_m nebo x_M vnitřním bodem M, není v něm derivace funkce $f(x)$ různá od nuly.

Proto nás při hledání největší a nejmenší hodnoty spojité funkce na kompaktní množině (uzavřeném a omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$) budou zajímat tyto body:

1. hraniční body množiny M; speciálně v případě intervalu $\langle a, b\rangle$ body a a b;
2. vnitřní body x množiny M, pro které je $f'(x) = 0$;
3. vnitřní body x množiny M, pro které derivace neexistuje. Do této skupiny lze zařadit i body, v nichž derivaci z nějakého důvodu nepočítáme.

Takto dostaneme jistou podmnožinu $M_0 \subset M$, v jejichž bodech může nabývat spojitá funkce $f(x)$ na kompaktní množině M největší a nejmenší hodnotu. Je-li množina M_0 konečná, lze největší a nejmenší hodnotu funkce na množině M najít jako nejmenší a největší hodnotu z konečné množiny $f(M_0)$.

Příklad: Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = |x| - 2\sin x$ na intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$.

Řešení: Protože je funkce $f(x)$ spojitá na kompaktním intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, existují v tomto intervalu body, ve kterých nabývá funkce $f(x)$ nejmenší a největší hodnotu.

Do první skupiny patří krajní body intervalu, tj. $x_1 = -\frac{1}{2}\pi$ a $x_2 = \frac{1}{2}\pi$.

Pro $x > 0$ je $f(x) = x - 2\sin x$ a pro $x < 0$ dostaneme $f(x) = -x - 2\sin x$.

Protože pro $x > 0$ je $f'(x) = 1 - 2\cos x$, je $f'(x) = 0$ na intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ pouze v bodě $x_3 = \frac{1}{3}\pi$.

Na intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, 0)$ nemá rovnice $f'(x) = -1 - 2\cos x = 0$ řešení. Proto do druhé skupiny patří pouze bod x_3.

Protože jsme v bodě $x = 0$ nepočítali derivaci, ostatně tam ani neexistuje, zařadíme jej do třetí skupiny, tj. $x_4 = 0$.

Funkce $f(x)$ může nabývat nejmenší a největší pouze v jednom z bodů x_1, x_2, x_3 nebo x_4. Protože

$$f(x_1) = \tfrac{1}{2}\pi + 2\,, \qquad f(x_2) = \tfrac{1}{2}\pi - 2\,, \qquad f(x_3) = \tfrac{1}{3}\pi - \sqrt{3}\,, \qquad f(x_4) = 0\,,$$

nabývá funkce $f(x) = |x| - 2\sin x$ na intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ největší hodnotu $\frac{1}{2}\pi + 2$ v bodě $x = -\frac{1}{2}\,\pi$ a nejmenší hodnotu $\frac{1}{3}\pi - \sqrt{3}$ v bodě $x = \frac{1}{3}\,\pi$.

Často budete při výpočtech limit používat jeden důsledek tzv. Cauchyovy věty o střední hodnotě.

Věta (*Cauchyova věta o střední hodnotě*) Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$. Jestliže $g'(x) \neq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,. \tag{17}$$

DŮKAZ: Uvažujme funkci $F(x) = \bigl(f(x) - f(a)\bigr)\bigl(g(b) - g(a)\bigr) - \bigl(f(b) - f(a)\bigr)\bigl(g(x) - g(a)\bigr)$. Z předpokladů plyne, že je funkce $F(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b). A protože $F(a) = F(b) = 0$ splňuje funkce $F(x)$ předpoklady Rolleovy věty. Tedy existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c)\,\bigl(g(b) - g(a)\bigr) - g'(c)\bigl(f(b) - f(a)\bigr) = 0\,.$$

Abychom dokázali vztah (17), musíme tuto rovnost vydělit $g'(c)\,\bigl(g(b) - g(a)\bigr)$. Podle předpokladů je $g'(c) \neq 0$ a stačí dokázat, že $g(b) \neq g(a)$. Nechť platí $g(b) = g(a)$. Pak ale funkce $g(x)$ splňuje na intervalu $\langle a, b\rangle$ předpoklady Rolleovy věty, a tedy existuje $c \in (a, b)$, pro který je $g'(c) = 0$. To je ale spor, a tedy $g(b) \neq g(a)$.

Jedním z důsledků Cauchyovy věty o střední hodnotě je tzv. l'Hospitalovo pravidlo.

Věta (*l'Hospitalovo pravidlo*). Nechť je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$. Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné v nějakém prstencovém okolí $P(a)$ bodu a a pro všechna $x \in P(a)$ je $g'(x) \neq 0$. Pokud existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, existuje také limita $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{18}$$

V případě $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ se l'Hospitalovo pravidlo dokazuje použití Cauchyovy věty o střední hodnotě na výraz

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,, \quad \text{kde} \quad c \in (a, x)\,,$$

a proto jsou podmínky $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ podstatné. V případě $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ není důkaz l'Hospitalova pravidla tak jednoduchý.

Příklad: Najděte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}\,. \tag{19}$$

Řešení: Jedná se o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Protože funkce $f(x) = \sin x - x$ a $g(x) = x^3$ splňují předpoklady uvedené věty, je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}\,,$$

pokud existuje limita vpravo. Protože se opět jedná o limitu typu $\dfrac{0}{0}$, použijeme ještě jednou l'Hospitalovo pravidlo a dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}\,.$$

Mohlo by se zdát, že není třeba umět počítat limity bez použití l'Hospitalova pravidla. Ale znalost některých limit nám často velmi usnadní výpočet. Například když máme počítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\ln(1+x)\cdot(\mathrm{e}^x - 1)\cdot \arcsin x}\,,$$

je přímé použití l'Hospitalova pravidla pracné, protože jmenovatel je poměrně složitá funkce. Při výpočtu této limity je jednodušší psát

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\ln(1+x)\cdot(\mathrm{e}^x - 1)\cdot \arcsin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\cdot\frac{x}{\arcsin x} = \\
= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x} &= -\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = -\frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Navíc, například limity jako $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$ a podobně jsou vlastně definice derivace v bodě nula.

Jsou i jiné případy, kdy pomocí l'Hospitalova pravidla nedostaneme limitu. Například podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,,$$

což je sice pravda, ale nevede to k nalezení limity.

Přímo škodlivé je používat l'Hospitalovo pravidlo automaticky bez ověření předpokladů. Například nelze psát

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-4}{x^2+x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+3}{2x+1}\,,$$

protože se nejedná o limitu typu $\dfrac{0}{0}$ nebo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}$$

protože limita vpravo neexistuje.

Abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo na limitu typu $0\cdot\infty$, musíme jej nejprve převést na podíl. Obvykle se používá obratu $0 = \dfrac{1}{\infty}$ nebo $\infty = \dfrac{1}{0}$.

Postup budeme ilustrovat na jednom příkladu.

Příklad: Najděte limitu $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\Big(\pi - 2\arccos\frac{1}{x}\Big)$.

Řešení: Protože $\arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$, jedná se o limitu typu $\infty\cdot 0$. Abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo, převedeme výraz na zlomek. Toho lze dosáhnout tak, že pro $x \neq 0$ napíšeme $x = \dfrac{1}{x^{-1}}$. Pak dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} x\Big(\pi - 2\arccos\frac{1}{x}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arccos x^{-1}}{x^{-1}}\,,$$

což je limita typu $\dfrac{0}{0}$, na kterou již můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

Abychom se vyhnuli složitějšímu derivovaní, je při výpočtu této limity výhodné položit $y = x^{-1}$. Protože $x^{-1} \neq 0$ lze použít větu o limitě složené funkce a psát

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arccos x^{-1}}{x^{-1}} = \lim_{y\to 0_+} \frac{\pi - 2\arccos y}{y} = \lim_{y\to 0_+} \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} = 2\,.$$

Také limity typu $\infty - \infty$ lze často převést na podíl a následně k jejich výpočtu použít l'Hospitalovo pravidlo.

Příklad: Najděte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{cotg} x}{x}\Big)$.

Řešení: Jedná se zřejmě o limitu typu $\infty - \infty$. Abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo budeme snažit přepsat výraz v limitě jako podíl. To lze udělat například takto:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{cotg} x}{x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{x\sin x} = \frac{x - \sin x\cos x}{x\sin^2 x}\,.$$

To je pro $x \to 0$ výraz typu $\dfrac{0}{0}$. Proto je

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{cotg} x}{x}\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x\cos x}{x\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x\cos x}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x}\,.$$

Protože druhá limita je rovna 1, dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{cotg} x}{x}\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{2}{3}\,.$$