Přednáška 6

Derivace a diferenciály vyšších řádů

Budeme pokračovat v nahrazování funkce $f(x)$ v okolí bodu a polynomy, tj. hledat vhodné konstanty c_n tak, aby bylo pro malá $|x-a|$

$$f(x) \approx c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots .$$

V minulé přednášce jsme zjistili, že $c_0 = f(a)$ a

$$c_1 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)\,,$$

tj. že hledaná aproximace je

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots .$$

Abychom našli koeficient c_2, zderivujeme tento vztah a získáme

$$f'(x) = f'(a) + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots .$$

Koeficient c_2 lze pak najít ze vztahu

$$2c_2 = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = \frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}x}(a)\,,$$

tj. jako derivaci derivace funkce $f(x)$ v bodě a. Je přirozené nazvat tento výraz druhá derivace funkce $f(x)$ v bodě a.

Obecně definujeme n–tou derivaci jako derivaci $(n-1)$–ní derivace.

Definice. Nechť existuje $(n-1)$–ní derivace $f^{(n-1)}(x)$ v okolí bodu a (definujeme $f^{(0)}(x) = f(x)$). Pokud existuje konečná limita

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}\,, \tag{1}$$

nazýváme ji *n–tou derivací* funkce $f(x)$ v bodě a.

S n–tou derivací funkce $f(x)$ v bodě a souvisí n–tý diferenciál funkce $f(x)$ v bodě a. Je to vlastně funkce proměnné $h = \mathrm{d}x$ stupně n.

Definice. Nechť má funkce $f(x)$ v bodě a n–tou derivaci $f^{(n)}(a)$. Pak funkci proměnné h (nebo $\mathrm{d}x$)

$$\mathrm{d}^n f(a;h) = f^{(n)}(a)\,h^n \qquad \big(\text{nebo}\;\; \mathrm{d}^n f = f^{(n)}(a)\,\mathrm{d}x^n\big), \tag{2}$$

nazýváme *n–tý diferenciál* funkce $f(x)$ v bodě a.

Ze vztahem (2) souvisí značení pro n–tou derivaci

$$f^{(n)}(a) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)\,.$$

`Poznámka:` Pro funkci jedné reálné proměnné jsou pojmy n–tý diferenciál a n–tá derivace v podstatě totožné. A protože diferenciály počítáme pomocí derivací, mohlo by se zdát, že derivace je důležitější pojem než diferenciál. Ale pro funkce více proměnných už tak jednoduchá souvislost mezi diferenciály a derivacemi není. Základem je nahrazení funkce polynomy a to se dělá pomocí diferenciálů. Proto je pojem diferenciálu funkce v matematice důležitější než pojem derivace, které slouží pouze k výpočtu diferenciálů (pokud existují).

Definice. Jestliže existuje n-tá derivace funkce $f(x)$ v každém bodě $x \in M$, nazýváme funkci $f^{(n)}(x)$ *n–tou derivací* funkce $f(x)$ na množině M.

Z předchozí přednášky víme, že pokud má funkce $f(x)$ na množině M derivaci, je na množině M spojitá. Z toho plyne následující věta:

Věta. Má-li funkce $f(x)$ na množině M n–tou derivaci, jsou na M spojité všechny derivace $f^{(k)}(x)$, kde $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1$.

Definice. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *třídy* $C_n(M)$, jestliže má na M spojitou n–tou derivaci.
Má-li derivace $f(x)$ na množině M spojité všechny derivace $f^{(n)}(x)$, kde $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že funkce $f(x)$ je *třídy* $C_\infty(M)$ (čte se třídy C nekonečno na množině M).

Z předchozí věty plyne následující řetězec inkluzí

$$C_0(M) \supset C_1(M) \supset C_2(M) \supset \ldots \supset C_n(M) \supset \ldots \supset C_\infty(M)\,.$$

Někdy je užitečný vztah pro n–tou derivaci součinu dvou funkcí.

Věta (*Leibnizovo pravidlo*). Jestliže mají funkce $f(x)$ a $g(x)$ n–tou derivaci, platí

$$\Big(f(x)\,g(x)\Big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\,g^{(n-k)}(x)\,. \tag{3}$$

Poznamenejme, že vztah (3) je podobný tzv. binomické větě

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,,$$

kde $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ je tzv. binomický koeficient.

Důkaz: Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ je (3) vztah pro derivaci součinu $(fg)' = f'g + fg'$.

Nechť (3) platí pro n. Derivací tohoto vztahu dostaneme

$$\begin{aligned}
\Big(fg\Big)^{(n+1)} &= \Big(\big(fg\big)^{(n)}\Big)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \\
&= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \binom{n}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \\
&= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n-k+1)}\,.
\end{aligned}$$

A protože

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!\,\big(k+n-k+1\big)}{k!\,(n-k+1)!}=$$
$$=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k},$$

je

$$\Big(fg\Big)^{(n+1)}=f^{(n+1)}g+fg^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)}\,.$$

Příklad: Nechť je $f(x)=x\sin x$. Najděte $f^{(77)}(x)$.
Řešení: Protože $x'=1$ a $x^{(k)}=0$ pro $k\ge 2$, je podle Leibnizova vzorce (3)

$$\big(x\sin x\big)^{(77)}=\sum_{k=0}^{77}\binom{77}{k}x^{(k)}\big(\sin x\big)^{(77-k)}=x(\sin x\big)^{(77)}+77(\sin x\big)^{(76)}\,.$$

A protože $(\sin x\big)^{(76)}=\sin x$ a $(\sin x\big)^{(77)}=\big(\sin x\big)'=\cos x$ je

$$\big(x\sin x\big)^{(77)}=x\cos x+77\sin x\,.$$

Podobně jako první derivace rozhodovaly o tom, zda funkce na intervalu roste nebo klesá, rozhodují druhé derivace o tom, zda na intervalu roste nebo klesá první derivace, tj. směrnice tečny. To byla právě vlastnost konvexních a konkávních funkcí. Proto by nemělo být příliš překvapující, že platí následující věta.

Věta. Nechť má funkce na intervalu $\mathcal{I}$ druhou derivaci.

1. Je-li $f''(x)>0$ pro každé $x\in\mathcal{I}$, je funkce $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ konvexní.
2. Je-li $f''(x)<0$ pro každé $x\in\mathcal{I}$, je funkce $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ konkávní.

Důkaz: Nechť jsou x_1, x_2, $x_3\in\mathcal{I}$ a platí $x_1<x_2<x_3$. Z Lagrangeovy věty plyne, že existují $c_1\in(x_1,x_2)$ a $c_2\in(x_2,x_3)$ taková, že

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c_1)\quad \text{a}\quad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(c_2)\,.$$

Předpokládejme, že je na intervalu $\mathcal{I}$ druhá derivace $f''(x)>0$. Pak je první derivace $f'(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ rostoucí funkce a protože $c_1<c_2$ je $f'(c_1)<f'(c_2)$, tj.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\,.$$

To ale znamená, že je funkce $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ konvexní.
Důkaz pro $f''(x)<0$ je obdobný.

Má-li funkce $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ druhou derivaci, mohou být *inflexní body* pouze body, ve kterých je $f''(x)=0$. O tom, zda je bod a, ve kterém je $f''(a)=0$ inflexní bod, rozhodneme buď pomocí chování funkce $f(x)$ v okolí bodu a nebo pomocí vyšších derivací jako v případě stacionárních bodů (viz dále). Například, je-li v bodě $f''(a)=0$ a $f'''(a)\neq 0$, má funkce $f(x)$ v bodě a inflexní bod.

Taylorův polynom a Taylorova řada

Nyní budeme řešit následující úlohu: Je dána funkce $f(x)$, která má n-tou derivaci a bod a. Najděte polynom stupně n

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k\,, \tag{4}$$

který má v bodě a stejných prvních n derivací jako funkce $f(x)$, tj. pro každé $k = 0, 1, \ldots, n$ platí $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

Když do (4) dosadíme $x = a$, dostaneme z podmínky $P(a) = f(a)$ vztah $c_0 = f(a)$.

Když derivujeme $P(x)$ dostaneme

$$P'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kc_k(x-a)^{k-1}$$

a podmínka $P'(a) = f'(a)$ dává $c_1 = f'(a)$.

Druhá derivace polynomu $P(x)$ je

$$P''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)(x-a)^{k-2}$$

a z podmínky $P''(a) = f''(a)$ plyne $2c_2 = f''(a)$, tj. $c_2 = \frac{1}{2} f''(a)$.

Pro r–tou derivaci polynomu $P(x)$ získáme

$$P^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{n} k(k-1)\ldots(k-r+1)c_k(x-a)^{k-r} = \sum_{k=r}^{n} \frac{k!}{(k-r)!}\, c_k(x-a)^{k-r}\,.$$

Jestliže do tohoto vztahu dosadíme $x = a$, jsou nulové všechny členy součtu s výjimkou členu, kde $k = r$. Z podmínky $P^{(r)}(a) = f^{(r)}(a)$ dostaneme

$$r!c_r = f^{(r)}(a) \implies c_r = \frac{f^{(r)}(a)}{r!}\,.$$

Definice. Nechť má funkce $f(x)$ v bodě a n–tou derivaci. Pak polynom n–tého stupně

$$T_n(x;a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \tag{5}$$

nazýváme *Taylorův polynom* stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě a.

`Poznámka:` Pomocí diferenciálů (2) lze zapsat Taylorův polynom ve tvaru

$$T_n(a+h;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k f(a;h) \quad \text{nebo} \quad T_n(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k f(a;x-a)\,,$$

který platí i pro funkce více proměnných.

Taylorovým polynomem aproximujeme funkci $f(x)$ v okolí bodu $x = a$. Pokud nahradíme funkci $f(x)$ Taylorovým polynomem (5) uděláme chybu

$$R_n(x;a) = f(x) - T_n(x;a)\,. \tag{6}$$

Výraz (6) se nazývá *zbytek v Taylorově polynomu* stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě a. Je důležité aspoň odhadnout velikost tohoto zbytku, tj. chybu, které se dopustíme, když nahradíme funkci $f(x)$ Taylorovým polynomem.

Věta. Nechť má funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace až do řádu n včetně. Nechť je $x \in (a, b)$ a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n(x;a)\,.$$

Pak pro zbytek $R_n(x;a)$ platí

$$\lim_{x\to a_+} \frac{R_n(x;a)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

Podobně lze tvrzení modifikovat pro interval $\langle b, a\rangle$.

Důkaz: Máme najít limitu

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x) - T_n(x,a)}{(x-a)^n}\,.$$

To je limita typu $\frac{0}{0}$. Předpoklady věty zaručují, že na tento výraz lze n–krát použít l'Hospitalovo pravidlo. Tak dostaneme

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x) - T_n(x,a)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x) - T_n'(x,a)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to a_+} \frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x,a)}{n!} =$$

$$= \lim_{x\to a_+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0\,,$$

protože jsme předpokládali, že funkce $f(x)$ má v bodě a spojitou n–tu derivaci, tj. že platí $\lim\limits_{x\to a} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$.

Jak jsme se již zmínili, nahrazujeme Taylorovým polynomem funkci $f(x)$ v jistém okolí bodu a. Zajímavý je případ, kdy je $f^{(k)}(a) = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ a $f^{(n)}(a) \neq 0$. Pak je Taylorův polynom stupně n roven

$$T_n(x;a) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

a pro funkci $f(x)$ platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n(x;a)\,. \tag{7}$$

Speciálně, je-li a stacionární bod funkce $f(x)$, tj. $f'(a) = 0$, je

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}\,(x-a)^2 + R_2(x;a)\,.$$

Má-li funkce $f(x)$ v jistém okolí bodu a spojité druhé derivace, je

$$\lim_{x\to a} \frac{R_2(x,a)}{(x-a)^2} = 0\,.$$

Proto například k $\varepsilon = \frac{1}{4}\bigl|f''(a)\bigr| > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé x, $0 < |x-a| < \delta$, má výraz $\frac{1}{2}\, f''(a)(x-a)^2 + R_2(x;a)$ stejné znaménko jako $f''(a)$. Je-li $f''(a) > 0$ je pro taková x

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(a)}{2}\,(x-a)^2 + R_2(x;a) > 0$$

a funkce $f(x)$ má v bodě a lokální minimum. Naopak je-li $f''(a) < 0$, je $f(x) - f(a) < 0$, tedy funkce $f(x)$ má v bodě a lokální maximum.

Dokázali jsme tedy následující větu:

Věta. Nechť má funkce $f(x)$ v jistém okolí bodu a druhou derivaci, která je spojitá v bodě a a $f'(a) = 0$. Pak platí:

1. Je-li $f''(a) > 0$ má funkce $f(x)$ v bodě a lokální minimum.
2. Je-li $f''(a) < 0$ má funkce $f(x)$ v bodě a lokální maximum.

Jestliže je ve stacionárním bodě $f''(a) = 0$, můžeme o tom, zda má funkce $f(x)$ v bodě a lokální extrém rozhodnout pomocí první nenulové derivace funkce $f(x)$ v bodě a.

Je-li tato derivace lichého řádu, tj. je-li $f^{(k)}(a) = 0$ pro $k = 1, \ldots, 2n$ a $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$, nemá funkce $f(x)$ v bodě a lokální extrém, protože první nenulový člen má vlevo a vpravo od bodu a různá znaménka.

Je-li tato derivace sudého řádu, tj. je-li $f^{(k)}(a) = 0$ pro $k = 1, \ldots, 2n{-}1$ a $f^{(2n)}(a) \neq 0$, má funkce $f(x)$ v bodě a lokální extrém; je-li $f^{(2n)}(a) > 0$ je v bodě a lokální minimum a je-li $f^{(2n)}(a) < 0$ je v bodě a lokální maximum.

Když budeme předpokládat, že funkce $f(x)$ má navíc na intervalu $\langle a,b\rangle$ derivaci řádu $(n+1)$, existuje pro zbytek $R_n(x;a)$ několik vyjádření. Uvedeme pouze tzv. *Lagrangeův tvar* zbytku, který má skoro stejný tvar jako $(n+1)$–ní člen Taylorova polynomu.

Věta. Jestliže na intervalu $\langle a,b\rangle$ existuje $f^{(n+1)}(x)$, pak pro každé $x \in (a,b)$ existuje $c \in (a,x)$ takové, že

$$R_n(x;a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,. \tag{8}$$

Příklad: Najděte Taylorův polynom stupně n pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ se středem v bodě $a = 0$ a odhadněte zbytek.

Řešení: Protože pro každé n je $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, je $f^{(n)}(0) = 1$ a Taylorův polynom stupně n je podle (5)

$$T_n(x;0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Pro zbytek $R_n(x;0)$ dostaneme z (8)

$$R_n(x;0) = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}\, x^{n+1}\,,$$

kde pro $x > 0$ je $c \in (0,x)$ a pro $x < 0$ je $c \in (x,0)$.

Nechť je nyní $x > 0$ pevné. Protože pro $c \in (0,x)$ je $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^x$, dostaneme

$$\Big|R_n(x;0)\Big| = \Big|\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}\, x^{n+1}\Big| < \frac{\mathrm{e}^x}{(n+1)!}\, x^{n+1}\,.$$

Z toho plyne, že každé $x > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x;0) = 0$ a

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\Big(T_n(x;0) + R_n(x;0)\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \lim_{n\to\infty} R_n(x;0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Podobně pro $x < 0$ je $c \in (x,0)$ a dostaneme $\mathrm{e}^c < 1$. Proto i pro $x < 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x;0) = 0$.

Z toho plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,. \tag{9}$$

Tento vztah lze použít pro definici e^x i pokud je x komplexní číslo. Speciálně pro ix, kde $x \in \mathbb{R}$, dostaneme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\,.$$

Podobným způsobem lze ukázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}\,, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\,.$$

Když srovnáme poslední tři vztahy, dostaneme tzv. *Eulerův vzorec*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Z něj například plynou vztahy

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\,, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\,.$$

Příklad: Najděte Taylorův polynom stupně n pro funkci $f(x) = \ln(1+x)$ se středem v bodě $a = 0$ a odhadněte zbytek.

Řešení: Funkce $f(x)$ definována pro $x > -1$. Proto budeme předpokládat, že $x > -1$. Indukcí se snadno ukáže, že pro každé $n \geq 1$ je

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\,.$$

Pro koeficienty v Taylorově polynomu pak dostaneme

$$c_0 = \ln 1 = 0\,, \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,, \quad n \ge 1\,.$$

Tedy Taylorův polynom stupně n pro funkci $f(x) = \ln(1+x)$ se středem v bodě $a = 0$ je

$$T_n(x;0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k\,.$$

Z (8) dostaneme pro zbytek

$$R_n(x;0) = \frac{(-1)^n}{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}\,, \quad \text{kde} \quad \begin{cases} 0 < c < x & \text{pro} \quad 0 < x\,, \\ x < c < 0 & \text{pro} \quad -1 < x < 0\,. \end{cases}$$

Pro $x > 0$ platí nerovnost

$$\big|R_n(x;0)\big| \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,$$

ze které pro $x \le 1$ plyne $\lim\limits_{n\to\infty}\big|R_n(x;0)\big| = 0$.

Pro $-1 < x < 0$ dostaneme nerovnost

$$\Big|R_n(x;0)\Big| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\big(1-|x|\big)^{n+1}}\,.$$

ze níž pro $|x| \le \frac{1}{2}$ snadno ukážeme, že opět je $\lim\limits_{n\to\infty}\big|R_n(x;0)\big| = 0$.

Protože pro $x \in \big\langle -\frac{1}{2}, 1\big\rangle$ je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x;0) = 0$, dostaneme pro tato x stejně jako předchozím příkladě vztah

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n\,. \tag{10}$$

Speciálně, pro $x = 1$ dostaneme

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\,.$$

`Poznámka.` Lze ukázat, že vztah (10) platí pro všchna $x \in (-1, 1\rangle$.

Existují nenulové funkce, které mají derivace všech řádů a pro které je $f^{(n)}(a) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Příkladem takové funkce je $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ pro $x \ne 0$ a $f(0) = 0$. Tato funkce má všechny derivace v bodě $x = 0$ rovny nule, a tedy její Taylorův polynom libovolného stupně je roven nule. Pro takové funkce je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x;a) \ne 0$ pro každé $x \ne a$. Zajímavější jsou funkce, pro které existuje okolí bodu a takové, že pro každé x z tohoto okolí je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x;a) = 0$. Tyto funkce lze v okolí bodu a vyjádřit pomocí nekonečné řady, tzv. *Taylorovy řady*, jako

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\,, \quad \text{kde} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,.$$

Takové funkce se nazývají analytické v bodě a a budeme se jimi zabývat později.