Přednáška 7

Analytická geometrie v n–rozměrném euklidovském prostoru E_n

Většina matematických konstrukcí, které budeme dělat, velmi úzce souvisí s geometrickými konstrukcemi. V podstatě budeme popisovat body n–rozměrného prostoru pomocí uspořádaných n–tic reálných čísel, tj. prvky $\mathbb{R}^n$, a přepisovat geometrické konstrukce pomocí těchto n–tic. Tento postup se nazývá analytická geometrie.

V mnohých oborech se potřebují takové konstrukce v abstraktním n–rozměrném prostoru. Proto budu na přednášce používat n–rozměrný prostor. Abstraktní matematické konstrukce, které budeme dělat, jsou zobecněním většinou geometrických konstrukcí v dvou, resp. třírozměrném euklidovském prostoru E_2, resp. E_3. Proto doporučuji, abyste si všechno představovali v obvyklém třírozměrném prostoru.

Geometrické vlastnosti euklidovského prostoru E_n

Pro každé dva body A, B euklidovského prostoru E_n je definována jejich vzdálenost $d(A,B) \in \langle 0,\infty)$, kterou v dvou nebo tří rozměrém prostoru můžeme změřit například pravítkem. Vzdálenost bodů A, $B \in E_n$ má následující vlastnosti:

1. Pro každé A, $B \in E_n$ je $d(A,B) = d(B,A)$;
2. $d(A,B) = 0$ právě tehdy, když $A = B$;
3. Pro každé tři body A, B, $C \in E)n$ platí *trojúhelníková nerovnost*

$$d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B)\,.$$

Poznámka: V matematice se pojem vzdálenosti zobecňuje na pojem *metriky*. Metrika na množině M je funkce $d : M \times M \to \langle 0,\infty)$, která má vlastnosti 1, 2 a 3. Množina M, na které je definována metrika, se nazývá *metrický prostor*.

Pro dva body A, $B \in E_n$ definujeme orientovanou úsečku z bodu A do bodu B, kterou označíme $\overrightarrow{AB}$. Pro orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ definujeme její délku jako vzdálenost bodů A, B, tj. jako $d(A,B)$.

Je-li $\overrightarrow{AB}$ orientovaná úsečka z bodu A do bodu B a $\overrightarrow{BC}$ orientovaná úsečka z bodu B do bodu C, definujeme jejich součet $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ jako orientovanou úsečku z bodu A do bodu C.

Pro orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ a $c \in \mathbb{R}$ označíme $c\big(\overrightarrow{AB}\big) = \overrightarrow{AC}$ orientovanou úsečku z bodu A do bodu C, který leží na přímce dané body A a B a jehož vzdálenost od bodu A je $|c|\, d(A,B)$. Přitom je-li $c > 0$ leží bod C na polopřímce s počátečním bodem A, na které leží bod B, kdežto pro $c < 0$ leží na opačné polopřímce.

`Poznámka`: Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ se často nazývají vázané vektory. Protože není definován součet libovolných vázaných vektorů, není tato množina vektorový prostor.

Další geometrický pojem, který je definován v prostoru E_n, je úhel mezi orientovanými úsečkami, které začínají ve stejném bodě. Každé tři navzájem různé body A, B a C

tvoří trojúhelník $\triangle ABC$ nebo leží na jedné přímce. Jestliže označíme délky jeho stran $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ a $c = d(A, B)$ a $\gamma \in \langle 0, \pi \rangle$ úhel při vrcholu C, platí v E_n kosinová věta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \, .$$

Tento úhel γ se nazývá úhel mezi orientovanými úsečkami $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{CB}$.

V euklidovském prostoru je podstatné, že takové orientované úsečky lze paralelně (rovnoběžně) posouvat z bodu do bodu, tj. že pro každý bod C umíme orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ s počátečním bodem A posunout tak, abychom získali právě jednu orientovanou úsečku $\overrightarrow{CD}$ s počátečním bodem C, která odpovídá orientované úsečce $\overrightarrow{AB}$. Navíc paralelní posunutí nemění délku vázaného vektoru ani úhel, který svírají dva vázané vektory, které začínají ve stejném bodě.

Nejdůležitější vlastnost euklidovského prostoru E_n je, že paralelní posunutí vektoru nezávisí na tom, po jakým způsobem přenášíme vektor $\overrightarrow{AB}$ z bodu A do bodu C. Konkrétně, pokud přeneseme vektor $\overrightarrow{AB}$ do bodu C přímo (po nejkratší dráze) nebo ho nejprve přeneseme do bodu $\widehat{C}$ a pak z bodu $\widehat{C}$ do bodu C, dostaneme v bodě C stejný vektor. Tato zdánlivě samozřejmá vlastnost paralelního přenosu neplatí například na kulové ploše a vede k tzv. neeuklidovské geometrii.

Paralelní posunutí umožňuje zavést pojem volného vektoru $\mathbf{v}$. To je v podstatě vektor, který odpovídá celé množině vázaných vektorů, které získáme paralelním posunutím z jednoho daného vázaného vektoru $\overrightarrow{AB}$. Množinu všech volných vektorů budeme značit V_n.

`Poznámka.` Matematicky se takové ztotožnění formuluje tak, že na množině vázaných vektorů definujeme relaci $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ právě tehdy, když vázaný vektor $\overrightarrow{CD}$ vznikne z vázaného vektoru $\overrightarrow{AB}$ paralelním posunutím. Ukazuje se, že tato relace je reflexivní, tj. pro každý vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$, symetrická, tj. pokud je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, pak je $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, a tranzitivní, tj. pokud je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$, je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$. Taková relace se v matematice nazývá *relace ekvivalence*. Relace ekvivalence rozděluje množinu všech vázaných vektorů na množinu *tříd ekvivalence*, tj. podmnožin vzájemně ekvivalentních prvků. Tyto třídy ekvivalence jsou navzájem disjunktní, tj. pro dvě třídy ekvivalence T_1 a T_2 buď platí $T_1 = T_2$ nebo $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. To nám umožňuje definovat množinu V_n, jejíž prvky jsou třídy ekvivalence, tzv. volné vektory $\mathbf{v}$.

Mezi prvky prostoru V_n lze definovat operaci sčítání a násobení reálným číslem. Přesněji, jsou-li $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ prvky V_n, vybereme vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$, který patří do třídy $\mathbf{v}_1$ a vázaný vektor $\overrightarrow{BC}$, který je prvkem třídy $\mathbf{v}_2$. Součet těchto vektorů $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ je pak třída, která obsahuje vázaný vektor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Podobně definujeme násobení reálným číslem. Lze ukázat, že tato definice nezávisí na výběru reprezentantů $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$. Navíc je zřejmé, že vázaný vektor $\overrightarrow{AA}$ reprezentuje nulový vektor $\mathbf{0}$. S těmito operacemi tvoří V_n vektorový prostor.

Pro euklidovský prostor E_n je dimenze prostoru V_n, tj. počet lineárně nezávislých vektorů, které generují V_n, rovna n.

Protože paralelní posunutí nemění délku vázaného vektoru, mají všechny vázané vektory třídy $\mathbf{v}$ stejnou délku. Tuto délku označíme $\|\mathbf{v}\|$ a budeme ji nazývat délkou vektoru $\mathbf{v}$. Z vlastností 1, 2 a 3 vzdálenosti bodů plyne, že pro délku vektor $\|\mathbf{v}\|$ platí

1. Pro každé $\mathbf{v} \in V_n$ je $\|\mathbf{v}\| \geq 0$. Přitom z rovnosti $\|\mathbf{v}\| = 0$ plyne $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
2. Pro každé $\mathbf{v} \in V_n$ a $c \in \mathbb{R}$ je $\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|$;
3. Pro každé $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V_n$ platí trojúhelníková nerovnost

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|\,.$$

`Poznámka.` Funkce ν na vektorovém prostoru V, pro kterou platí 1, 2 a 3, se nazývá norma a vektorový prostor V, na kterém je definována norma, se nazývá *normovaný vektorový prostor*. Jestliže je V normovaný vektorový prostor v normou ν, můžeme na V definovat metriku $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \nu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$.

Protože paralelní posunutí nemění úhel, který svírají dva vázané vektory $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{CB}$, lze tento úhel najít mezi volnými vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ z V_n, které těmto vektorům odpovídají. Pro určení úhlu mezi vektory ve vektorovém prostoru V_n slouží operace, která se nazývá skalární součin. *Skalární součin* přiřazuje každým dvěma vektorům $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V_n$ reálné číslo, které budeme značit $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$. Pro toto zobrazení $V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ platí:

1. Pro každé $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 \in V_n$ a c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ je

$$\big(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2\big) \cdot \mathbf{v}_3 = c_1\big(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3\big) + c_2\big(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3\big)\,;$$

2. Pro každé $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V_n$ je $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1$;
3. Pro každé $\mathbf{v} \in V_n$ je $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$;
4. Z rovnosti $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ plyne $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

V euklidovském prostoru E_n je vztahem $\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\|$ definována délka vektoru $\mathbf{v}$ v prostoru V_n, a tedy i délka vázaného vektoru $\overrightarrow{AB}$, který vektor $\mathbf{v}$ reprezentuje.

`Poznámka.` V obecném vektorovém prostoru V, ve kterém je definován skalární součin, platí následující tzv. *Schwarzova*, nerovnost.

Věta (*Schwarzova nerovnost*). Pro každé dva vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V$ platí nerovnost

$$\big|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\big| \leq \|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\|\,.$$

Přitom rovnost nastává pouze tehdy, když jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ lineárně závislé.

DŮKAZ: Jestliže jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ lineárně závislé, je buď $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ nebo $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2$, kde $c \in \mathbb{R}$. Přímým výpočtem se snadno přesvědčíme, že v tomto případě platí v uvedeném vztahu rovnost.

Nechť jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ lineárně nezávislé. Z toho plyne, že $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ a tedy $\|\mathbf{v}_2\| > 0$. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ vektor $\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2$ nenulový. Proto je pro každé $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) = \big(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2\big) \cdot \big(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2\big) = \|\mathbf{v}_1\|^2 - 2t\big(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\big) + t^2\|\mathbf{v}_2\|^2 > 0\,.$$

Pro dané $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ je $F(t)$ kladná kvadratická funkce proměnné t, která nabývá minimum v bodě t_0, pro který platí

$$F'(t_0) = -2\big(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\big) + 2t_0\|\mathbf{v}_2\|^2 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad t_0 = \frac{\big(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\big)}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\,.$$

Ale v tomto bodě je

$$F(t_0) = \|\mathbf{v}_1\|^2 - \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}{\|\mathbf{v}_2\|^2} > 0\,.$$

To je právě uvedená Schwarzova nerovnost.

Ze Schwarzovy nerovnosti plyne v obecném vektorovém prostoru se skalárním součinem trojúhelníková nerovnost

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \le \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|\,.$$

Abychom uvedený vztah dokázali, uvažujeme

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 &= (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\|^2 + 2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + \|\mathbf{v}_2\|^2 \le \\ &\le \|\mathbf{v}_1\|^2 + 2\|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\| + \|\mathbf{v}_2\|^2 = \big(\|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|\big)^2\,,\end{aligned}$$

kde jsme použili Schwarzovu nerovnost.

V každém vektorovém prostoru V se skalárním součinem definuje vztah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$ normu. Obecně nemusí být norma ve vektorovém prostoru definována skalárním součinem, ale ve vektorovém prostoru V_n, který odpovídá euklidovskému prostoru E_n, tomu tak je.

Nyní můžeme dát geometrickou interpretaci skalárního součinu. Uvažujme dva nenulové vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ z prostoru V_n. Nechť jsou tyto vektory reprezentovány vázanými vektory $\overrightarrow{CB}$ a $\overrightarrow{CA}$. Pak vektor $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ lze reprezentovat vázaným vektorem $\overrightarrow{BA}$. V prostoru E_n jsou body A, B a C vrcholy trojúhelníka se stranami $a = d(C,B) = \|\mathbf{v}_1\|$, $b = d(C,A) = \|\mathbf{v}_2\|$ a $c = d(B,A) = \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|$. Podle definice skalárního součinu platí vztah

$$c^2 = \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|^2 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\cdot(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 - 2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) = a^2 + b^2 - 2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\,.$$

Jestliže srovnáme tento vztah s kosinovou větou $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, kde γ je úhel v trojúhelníku při vrcholu C, dostaneme pro hodnotu skalárního součinu výraz

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\|\cos\gamma\,,$$

kde γ je úhel mezi vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$. Tohoto vztahu se používá pro výpočet úhlu mezi dvěmi nenulovými vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ ve V_n, resp. v E_n.

Z uvedeného vztahu je zřejmé, že vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ jsou kolmé, často se říká *ortogonální*, právě tehdy, když $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

Na závěr shrneme naše úvahy:

Euklidovský prostor E_n je vlastně dvojice (E_n, V_n), kde E_n je množina bodů a V_n je n-rozměrný vektorový prostor se skalárním součinem.

Každým dvěma bodům $A, B \in E_n$ je přiřazen právě jeden vektor $\mathbf{v} \in V_n$, konkrétně vektor, který odpovídá vázanému vektoru $\overrightarrow{AB}$.

Každému bodu $A \in E_n$ a vektoru $\mathbf{v} \in V_n$ je přiřazen právě jeden bod $B \in E_n$, konkrétně bod B takový, že vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ odpovídá vektoru $\mathbf{v}$.

`Poznámka.` Tato zobrazení musí mít jisté vlastnosti, které zde nebudeme vypisovat. Jde v podstatě o to, abychom pomocí souřadnic mohli pro každé dva body A, $B \in E_n$ a vektor $\mathbf{v} \in V_n$ psát $\overrightarrow{AB} = (B - A) \in V_n$ a $B = A + \mathbf{v}$.

`Poznámka.` S vektorovými prostory V jste se seznámili na přednášce z lineární algebry. Na rozdíl od vektorového prostoru je euklidovský prostor E_n vlastně dvojice (E_n, V_n), kde E_n je množina a V_n n-dimenzionální vektorový prostor, pro kterou jsou definována uvedená zobrazení. V matematice se struktura takového typu nazývá *afinní prostor* modelovaný vektorovým prostorem V_n. Rozdíl je v tom, že ve vektorovém prostoru je dán speciální prvek, nulový vektor $\mathbf{0}$, kdežto v afinním prostoru takový speciální prvek není.

Tedy euklidovský prostor E_n je afinní prostor, který je modelovaný n-dimenzionálním vektorovým prostorem se skalárním součinem.

Kartézské souřadnice v prostoru E_n

Všechny geometrické pojmy v euklidovském prostoru E_n lze formulovat pouze pomocí uvedených operací mezi body prostoru E_n a vektory vektorového prostoru V_n, který moduluje E_n. Při konkrétních výpočtech ale potřebujeme popsat tyto objekty pomocí množiny čísel. Proto se v těchto prostorech zavádějí souřadnice. My budeme používat nejjednodušší, tzv. kartézský systém souřadnic, který nyní zavedeme.

V prostoru E_n vybereme bod P, který budeme nazývat *počátek souřadnic*. Každému bodu $X \in E_n$ je pak jednoznačně přiřazen vázaný vektor $\overrightarrow{PX}$. Tento vektor je reprezentantem volného vektoru $(X - P) = \mathbf{x} \in V_n$.

V prostoru V_n zvolíme bázi, která je tvořena jednotkovými ortogonálními vektory $\mathbf{e}_k$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$, kde $n = \dim V_n$. Pro vektory takové báze platí

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ i \neq k\,, \\ 1 & \text{pro } \ i = k\,. \end{cases}$$

Zde zavedený symbol δ_{ik} se nazývá *Kroneckerovo delta* a poměrně často se používá při výpočtech.

Každá taková uspořádaná množina $\mathfrak{S} = \big(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\big)$ se nazývá *kartézský souřadný systém* v E_n.

`Poznámka.` Slovo kartézský zde vyjadřuje, že jsou vektory $\mathbf{e}_k$ *ortonormální*, tj. navzájem kolmé, a jednotkové. Obecně lze za systém vektorů $\mathbf{e}_k$ zvolit libovolnou bázi prostoru V_n, ale v tom případě budou konkrétní výpočty složitější.

Protože vektory $\mathbf{e}_k$ tvoří bázi v prostoru V_n, lze každý vektor $\mathbf{v} \in V_n$ vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^{n} v_k\mathbf{e}_k\,,$$

kde $v_k \in \mathbb{R}$. Reálná čísla v_k se nazývají souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in V_n$ v bázi $\mathbf{e}_k$. Pro danou bázi $\mathbf{e}_k$ prostoru V_n jsme takto dostali zobrazení $V_n \to \mathbb{R}^n$, které každému vektoru $\mathbf{v}$ přiřazuje uspořádanou n-tici reálných čísel, jeho souřadnic. Proto se pro danou bázi zapisuje vektor $\mathbf{v}$ jako

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)\,,$$

kde v_k jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v}$. Všimněte si toho, že souřadnice vektorů báze jsou v tomto zápise $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Výhoda volby kartézského systému souřadnic spočívá v tom, že pro skalární součin vektoru $\mathbf{v}$ s vektorem báze $\mathbf{e}_k$ platí

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} v_i \delta_{ik} = v_k \,.$$

To znamená, že souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ jsou kolmé průměty vektoru $\mathbf{v}$ do směrů $\mathbf{e}_k$.

Navíc pro skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dostaneme

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i \Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} v_k \mathbf{e}_k \Big) = \sum_{i,k=1}^{n} u_i v_k \, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i,k=1}^{n} u_i v_k \delta_{ik} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \,. \tag{1}$$

Speciálně pro délku vektoru $\mathbf{v}$ máme vztah

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \,, \quad \text{tj.} \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} \,,$$

který odpovídá Pythagorově větě.

Nyní uvažujme pevně daný souřadný systém $\mathfrak{S} = \big(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\big)$ v E_n. Každému bodu $X \in E_n$ přiřadíme vázaný vektor $\overrightarrow{PX}$. Tomuto vázanému vektoru volný vektor $(X - P) = \mathbf{x}$ a volnému vektoru $\mathbf{x}$ jeho souřadnice x_k. Symbolicky lze tuto posloupnost zobrazení zapsat jako

$$X \mapsto \overrightarrow{PX} \mapsto X - P = \mathbf{x} \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n) \,.$$

Tímto způsobem pro daný souřadný systém $\mathfrak{S}$ přiřadíme každému bodu $X \in E_n$ uspořádanou n-tici reálných čísel, tj. prvek prostoru $\mathbb{R}^n$, tak zvaných souřadnic bodu X. Abychom vyjádřili rozdíl mezi souřadnicemi bodu X prostoru E_n, respektive vázanými vektory $\overrightarrow{PX}$ a volnými vektory $\mathbf{v}$, budeme toto přiřazení symbolicky psát jako

$$X \equiv \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \,.$$

Podíváme se trochu podrobněji na geometrický význam uvedené konstrukce souřadnic bodu z hlediska euklidovského prostoru E_n. Volbou bodu $P \in E_n$ jsme vlastně zvolili počátek souřadného systému. Pro samotný bod P je $P - P = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, tj. souřadnice počátku P jsou $\boldsymbol{p} = [0, 0, \dots, 0]$

Volné jednotkové navzájem ortogonální vektory báze $\mathbf{e}_k$ odpovídají v prostoru E_n výběru bodů $X_k = P + \mathbf{e}_k$ v E_n takových že vázané vektory $\overrightarrow{PX_k}$, které začínají v bodě P jsou jednotkové a navzájem kolmé. Poznamenejme, že souřadnice těchto bodu jsou $X_k \equiv \boldsymbol{x}_k = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$, kde 1 je právě na k-tém místě. Vázané vektory $\overrightarrow{PX_k}$ určují v E_n vzájemně kolmé orientované přímky, které se nazývají souřadnicové osy. Pro daný bod $X \in E_n$ pak sestrojíme jeho kolmé průměty na souřadnicové osy a souřadnice x_k bodu X jsou orientované vzdálenosti těchto průmětů od bodu P, tj. $x_k > 0$, pokud průmět leží na polopřímce PX_k s počátkem v bodě P, a $x_k < 0$ v opačném případě.

Jestliže jsou X a Y dva body v E_n, platí pro každé $P \in E_n$ mezi vázanými vektory vztah $\overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XY}$. Jestliže označíme $\mathbf{v} = Y - X \in V_n$ vektor, který odpovídá vázanému vektoru $\overrightarrow{XY}$, lze uvedený vztah zapsat jako

$$\mathbf{v} = Y - X = (Y - P) - (X - P) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \,.$$

Tedy jestliže jsou souřadnice bodu $X \equiv \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a bodu $Y \equiv [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ má vektor $\mathbf{v} = Y - X$ souřadnice

$$\mathbf{v} = Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)\,.$$

Podobně dostaneme pro souřadnice bodu $Y = X + \mathbf{v}$ vztah

$$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n] = \boldsymbol{x} + \mathbf{v} = [x_1 + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n]\,,$$

kde $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jsou souřadnice bodu $X \in E_n$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in V_n$.

Vzdálenost bodů X a Y v E_n definovali jako délku vázaného vektoru $\overrightarrow{XY}$. Jestliže tedy jsou souřadnice bodů X a Y rovny $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$, je vzdálenost těchto bodů dána vztahem

$$d(X, Y) = \|Y - X\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}\,.$$

`Poznámka.` Důvod, proč se souřadnice v prostoru E_n zavádí poměrně složitým způsobem, i když intuitivní zavedení souřadnic je z geometrického hlediska zcela zřejmé, je v tom, že souřadnice bodů závisí na volbě souřadného systému $\mathfrak{S}$. Uvědomte si, že bod $X \in E_n$ je zcela konkrétní objekt, kdežto jeho souřadnice jsou pouze pomocný pojem. Jestliže má bod X vzhledem k souřadnému systému $\mathfrak{S}$ souřadnice $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a vzhledem k jinému souřadnicovému systému $\mathfrak{S}'$ souřadnice $\boldsymbol{x}' = [x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]$, umožňuje uvedená konstrukce najít poměrně jednoduše vztah mezi těmito dvěma popisy. Pomocí těchto vztahů mezi souřadnicemi v různých kartezských systémech souřadnic se definují objekty různého typu jako například skaláry, vektory, tenzory atd.

Lineární útvary v E_n

Zatím jsme se zabývali popisem bodů v euklidovském prostoru E_n. Dalšími velmi jednoduchými útvary v prostoru E_n jsou lineární útvary, tzv. k-rozměrné nadroviny v E_n. Ty jsou zobecnění pojmů přímka a rovina v dvou- nebo tří-rozměrném prostoru.

Nechť je dán bod $A \in E_n$ a k lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k \in V_n$. *k-rozměrnou nadrovinou* $\mathcal{L}_k$ v E_n, která prochází bodem A a je rovnoběžná s vektory $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, nazýváme množinu všech bodů $X \in E_n$ takových, že vektor $X - A$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_i$.

Toto tvrzení lze zapsat tak, že prvek $X \in E_n$ je prvkem nadroviny $\mathcal{L}_k$ právě tehdy, když existují reálná čísla t_1, t_2, …, t_k taková, že

$$X - A = \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{v}_k t_k = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i t_i\,. \tag{2}$$

`Poznámka.` 0-rozměrné nadroviny jsou body, jedno-rozměrné nadroviny se nazývají přímky a pro 2-rozměrné nadroviny používáme, zejména v E_3 název roviny.

Rovnice (2) popisuje nadrovinu $\mathcal{L}_k$ bez ohledu na výběr souřadného systému $\mathfrak{S}$ v E_n. Jestliže v E_n pevně zvolíme souřadný systém $\mathfrak{S} = (P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a souřadnice bodu A a vektoru $\mathbf{v}_i$ jsou v tomto souřadném systému

$$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]\,, \qquad \mathbf{v}_i = \big(v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n}\big)\,, \quad i = 1,\, 2,\, \dots,\, k\,,$$

dává rovnice (2) pro souřadnice $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ bodu X nadroviny $\mathcal{L}_k$ vztah

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i t_i\,, \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{v}_k t_k\,, \qquad t_1,\, \dots,\, t_k \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

nebo ve složkách

$$x_r = a_r + v_{1,r} t_1 + v_{2,r} t_2 + \ldots + v_{k,r} t_k\,, \qquad r = 1,\, 2,\, \dots,\, n\,, \quad t_1,\, t_2,\, \dots,\, t_k \in \mathbb{R}\,.$$

Rovnice (3) se nazývají *parametrické rovnice* nadroviny.

Speciálně, přímka, která prochází bodem A a je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, je popsána parametrickou rovnicí

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v} t\,, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{nebo} \quad x_r = a_r + v_r t\,, \quad r = 1,\, 2,\, \dots,\, n\,,$$

a rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, má parametrické rovnice

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{u} s + \mathbf{v} t\,, \quad s, t \in \mathbb{R}\,, \quad \text{tj.} \quad x_r = a_r + u_r s + v_r t\,, \quad r = 1,\, 2,\, \dots,\, n\,.$$

Uvedeme ještě jeden popis nadrovin v E_n. Jestliže je v prostoru E_n dáno $(n-1)$ lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_i$, $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n-1$, existuje, až na násobek právě jeden nenulový vektor $\mathbf{n} \in V_n$, který je kolmý na všechny vektory $\mathbf{v}_k$, $k = 1,\, 2,\, \dots,\, n-1$, tj. pro který platí

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_k = 0\,, \quad k = 1,\, 2,\, \dots,\, n-1\,.$$

Jestliže je A bod $(n-1)$-rozměrné nadroviny $\mathcal{L}_{n-1}$, je pro každý bod $X \in \mathcal{L}_{n-1}$ vektor $X - A$ kolmý k vektoru $\mathbf{n}$. To znamená, že platí

$$\mathbf{n} \cdot (X - A) = 0\,.$$

Každý takový vektor $\mathbf{n}$ se nazývá *normálový vektor* nadrovině $\mathcal{L}_{n-1}$.

Jestliže má bod A souřadnice $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ a normálový vektor souřadnice $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$, platí pro souřadnice $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ bodu X nadroviny $\mathcal{L}_{n-1}$ rovnice

$$\mathbf{n} \cdot \big(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\big) = 0\,, \quad \text{tj.} \quad n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + \ldots + n_n(x_n - a_n) = 0\,. \tag{4}$$

Pro lineárně nezávislé vektory $\mathbf{v}_r = (v_{r1}, v_{r,2}, \dots, v_{r,n})$, kde $r = 1,\, 2,\, \dots,\, n-1$, lze formálně sestrojit vektor $\mathbf{n}$, který je na ně kolmý pomocí determinantu

$$\mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1\,, & \mathbf{e}_2\,, & \dots\,, & \mathbf{e}_n \\ v_{1,1}\,, & v_{1,2}\,, & \dots\,, & v_{1,n} \\ v_{2,1}\,, & v_{2,2}\,, & \dots\,, & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1}\,, & v_{n-1,2}\,, & \dots\,, & v_{n-1,n} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

V třírozměrném prostoru se tato operace nazývá *vektorový součin* vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a budeme jej značit jako

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3 = \\ &= \big(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1\big)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

`Poznámka:` Ve fyzice se v třírozměrném prostoru pro jednotkové vektory ve směru souřadných os používá často značení

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)\,, \qquad \mathbf{j} = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)\,, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\,.$$

Toto značení souvisí s tzv. kvaterniony, s jejichž pomocí můžeme popisovat infinitezimální, tj. "nekonečně malé", rotace kolem souřadných os.

Vektorový součin má následující vlastnosti:

1. Pro každé vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ je $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$;
2. Pro každé vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ a a, $b \in \mathbb{R}$ je $(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = a\mathbf{u} \times \mathbf{w} + b\mathbf{v} \times \mathbf{w}$;
3. Pro každé vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ je $\big\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\big\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \sin\alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, tj. $\big\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\big\|$ je obsah rovnoběžníka se stranami $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$;
4. Pro každé vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ je

   $$\mathbf{u} \cdot \big(\mathbf{v} \times \mathbf{w}\big) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

   Toto rovnost geometricky znamená, že $\big|\mathbf{u} \cdot \big(\mathbf{v} \times \mathbf{w}\big)\big|$ je rovna objemu rovnoběžnostěnu s hranami $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$.

   Speciálně z ní plyne, že vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý na vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$
5. Pro každé vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ je $\mathbf{u} \times \big(\mathbf{v} \times \mathbf{w}\big) = \big(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\big)\,\mathbf{v} - \big(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\big)\,\mathbf{w}$.

Je-li v E_n dáno k lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$, existuje právě $(n-k)$ lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, …, $\mathbf{n}_{n-k}$, které jsou kolmé na každý vektor $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, tj. pro které platí

$$\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{v}_s = 0\,, \qquad r = 1, 2, \ldots, n-k\,, \quad s = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Jestliže je $\mathcal{L}_k$ k-rozměrná nadrovina v E_n, která prochází bodem A a je rovnoběžná s vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, je pro každý bod X této nadroviny vektor $X - A$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$. Proto je kolmý ke každému vektoru $\mathbf{n}_r$, $r = 1, 2, \ldots, n-k$ a body této nadroviny $\mathcal{L}_k$ popsat rovnicemi

$$\mathbf{n}_r \cdot (X - A) = 0\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n-k\,.$$

Má-li bod A souřadnice $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ a souřadnice vektorů $\mathbf{n}_r$, kde $r = 1, 2, \dots, n-k$, jsou $\mathbf{n}_r = (n_{r,1}, n_{r,2}, \dots, n_{r,n})$ je nadrovina $\mathcal{L}_k$ popsána soustavou rovnic

$$\mathbf{n}_r \cdot \big(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\big) = 0\,, \qquad r = 1, \dots, n-k\,, \tag{7}$$

neboli

$$n_{r,1}(x_1 - a_1) + n_{r,2}(x_2 - a_2) + \dots + n_{r,n}(x_n - a_n) = 0\,, \qquad r = 1, \dots, n-k\,.$$

Geometrický význam tohoto popisu je ten, že k-rozměrnou nadrovinu popisujeme jako průnik $(n-k)$ různých $(n-1)$–rozměrných nadrovin v E_n, které jsou dány rovnicemi (7).

Jestliže je k-rozměrná nadrovina $\mathcal{L}_k$ v E_n rovnoběžná s lineárně nezávislými vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, nazývá se každý nenulový vektor $\mathbf{n}$, který je kolmý na všechny vektory $\mathbf{v}_i$, *normálový vektor* k nadrovině $\mathcal{L}_k$. Každá přímka, která je rovnoběžná s normálovým vektorem se nazývá *normála* k nadrovině $\mathcal{L}_k$. Jestliže bod A leží v nadrovině $\mathcal{L}_k$, je normála k nadrovině $\mathcal{L}_k$, která prochází bodem A dána parametrickou rovnicí

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{n}t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ke k-rozměrné nadrovině $\mathcal{L}_k$ existuje právě $n-k$ lineárně nezávislých normálových vektorů $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-k}$. Každá $(n-k)$-rozměrná nadrovina, která je rovnoběžná s lineárně nezávislými normálovými vektory se nazývá normálová nadrovina k $\mathcal{L}_k$. Je-li A daný bod nadroviny $\mathcal{L}_k$, jsou parametrické rovnice normálové nadroviny, která prochází bodem A

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{n}_1 t_1 + \mathbf{n}_2 t_2 + \dots + \mathbf{n}_{n-k} t_{n-k}\,, \quad t_1, t_2, \dots, t_{n-k} \in \mathbb{R}\,.$$

Z předešlých úvah plyne, že k-rozměrnou nadrovinu $\mathcal{L}_k$, která prochází bodem A a je rovnoběžná s lineárně nezávislými vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, lze popsat buď pomocí parametrických rovnic

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \dots + \mathbf{v}_k t_k\,, \quad t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R} \tag{8}$$

nebo pomocí řešení soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{n}_r \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0\,, \quad r = 1, 2, \dots, n-k\,, \tag{9}$$

kde $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-k}$ jsou lineárně nezávislé normálové vektory k nadrovině $\mathcal{L}_k$.

Z výše uvedených úvah by mohlo být zřejmé, že parametrický popis nadrovin souvisí s tečnými vektory a popis nadroviny pomocí soustavy lineárních rovnic, tj. jako průnik $(n-1)$–rozměrných nadrovin, s normálovými vektory. Později uvidíme, že tento princip platí i pro obecné plochy.

`Poznámka.` Krátce připomenu vztah mezi těmito dvěma popisy, který by měl být znám z lineární algebry.

Snadno nahlédneme, že lineární rovnicí

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_n x_n = b\,, \tag{10}$$

kde alespoň jedno $n_k \neq 0$, je dána $(n-1)$-rozměrná nadrovina $\mathcal{L}_{n-1}$ v E_n, jejíž normálový vektor je $\mathbf{n} = (n_1, n_2 \ldots, n_n) \neq \mathbf{0}$.

Z lineární algebry by mělo být známo, že obecné řešení $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ rovnice (10) lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}\,,$$

kde $\boldsymbol{a}$ je jedno řešení nehomogenní rovnice (10) a $\mathbf{v}$ je obecné řešení homogenní rovnice

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 + \ldots + n_n v_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0\,. \tag{11}$$

Je také známo, že množina všech řešení homogenní rovnice (11) tvoří vektorový prostor. V našem případě je báze v tomto prostoru tvořena $n-1$ lineárně nezávislými vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$, které jsou kolmé na normálový vektor $\mathbf{n}$. Obecné řešení lineární rovnice (10) tedy je

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{v}_{n-1} t_{n-1}\,, \quad t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}\,,$$

což je parametrická rovnice $(n-1)$-rozměrné nadroviny, která je dána rovnicí (10).

Jestliže je nadrovina dána jako řešení soustavy k lineárních rovnic

$$\begin{array}{c} n_{1,1}x_1 + n_{1,2}x_2 + \ldots + n_{1,n}x_n = b_1\,, \\ n_{2,1}x_1 + n_{2,2}x_2 + \ldots + n_{2,n}x_n = b_2\,, \\ \vdots \\ n_{k,1}x_1 + n_{k,2}x_2 + \ldots + n_{k,n}x_n = b_k\,, \end{array} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{c} \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{x} = b_1\,, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{x} = b_2\,, \\ \vdots \\ \mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{x} = b_k\,, \end{array} \tag{12}$$

kde $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory, je její obecné řešení

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}\,,$$

kde $\boldsymbol{a}$ je jedno řešení nehomogenní rovnice (12) a $\mathbf{v}$ je obecné řešení homogenní rovnice

$$\begin{array}{c} n_{1,1}v_1 + n_{1,2}v_2 + \ldots + n_{1,n}v_n = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} = 0\,, \\ n_{2,1}v_1 + n_{2,2}v_2 + \ldots + n_{2,n}v_n = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v} = 0\,, \\ \vdots \\ n_{k,1}v_1 + n_{k,2}v_2 + \ldots + n_{k,n}v_n = \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{v} = 0\,. \end{array} \tag{13}$$

Protože předpokládáme, že jsou normálové vektory lineárně nezávislé, má vektorový prostor řešení bázi tvořenou $(n-k)$ lineárně nezávislými vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-k}$ a obecné řešení soustavy (12) je

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{v}_{n-k} t_{n-k}\,, \quad t_1, t_2, \ldots, t_{n-k} \in \mathbb{R}\,,$$

tj. parametrické rovnice $(n-k)$-rozměrné nadroviny.

Naopak od parametrického popisu nadroviny (8) přejdeme k jejímu popisu pomocí soustavy rovnic (9) tak, že z rovnic (8) vyloučíme parametry $t_1, t_2, \ldots, t_k$. To lze udělat tak, že najdeme $(n-k)$ lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{n}_r$, $r = 1, 2, \ldots, n-k$, které jsou kolmé na vektory $\mathbf{v}_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$, tj. pro každé r a s platí $\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{v}_s = 0$. Když napíšeme parametrické rovnice (8) ve tvaru

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{v}_k t_k\,,$$

je ihned vidět, že pro každé $r = 1, 2, \ldots, n-k$, platí

$$\mathbf{n}_r \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{v}_k t_k = 0\,,$$

což je soustava rovnic (9), která popisuje danou nadrovinu.

Zobrazení intervalu $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$ a parametrické rovnice křivky

Ukázali jsme, že když zvolíme kartezský systém souřadnic $\mathfrak{S}$, lze euklidovský prostor E_n ztotožnit s prostorem $\mathbb{R}^n$, který budeme chápat jako vektorový prostor se skalárním součinem, kde pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ a $a \in \mathbb{R}$ je

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\,, \qquad a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)\,, \qquad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

Zobrazení $\mathbf{f} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$, kde $\mathcal{I}$ je interval v $\mathbb{R}$, lze chápat jako zobrazení intervalu $\mathcal{I}$ do euklidovského prostoru E_n. Pak je každému bodu $t \in \mathcal{I}$ přiřazen právě jeden bod $X \in E_n$. Za jistých předpokladů o zobrazení $\mathbf{f}$ jako je například spojitost, můžeme takové zobrazení geometricky interpretovat jako parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$ v E_n.

Tyto rovnice budeme psát jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) = \mathbf{x}(t)\,, \quad \text{kde} \quad t \in \mathcal{I}\,. \tag{14}$$

Pomocí souřadnic jsou rovnice (14)

$$x_i = x_i(t)\,, \quad \text{kde} \quad t \in \mathcal{I}\,, \qquad i = 1,\, 2,\, \dots,\, n\,.$$

Definice. Nechť je $\mathbf{f} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ a t vnitřní bod množiny $\mathcal{I}$. Pokud existuje $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{\big\|\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t) - \mathbf{A}h\big\|}{h} = 0\,, \tag{15}$$

nazývá se zobrazení $\mathbf{f}$ *diferencovatelné* v bodě t a lineární vektorová funkce proměnné h definovaná jako

$$\mathrm{d}\mathbf{f}(t; h) = \mathbf{A}h$$

se nazývá *diferenciál zobrazení* $\mathbf{f}$ v bodě t.

`Poznámka.` Z rovnice (15) plyne

$$\mathbf{A} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)}{h}\,.$$

Definice. Pokud existuje limita

$$\mathbf{f}'(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\mathbf{f}(t+\Delta) - \mathbf{f}(t)}{\Delta} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}(t)\,, \tag{16}$$

nazývá se *derivace zobrazení* $\mathbf{f}(t)$ v bodě t.

Podobně jako pro funkci jedné reálné proměnné platí

Věta. Zobrazení $\mathbf{f} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ je diferencovatelné v bodě t právě tehdy, když existuje derivace $\mathbf{f}'(t)$ a jeho diferenciál je

$$\mathrm{d}\mathbf{f}(t, h) = \mathbf{f}'(t)\, h\,.$$

Jestliže napíšeme (16) pomocí složek, dostaneme

$$\mathbf{f}'(t) = \left(\lim_{\Delta \to 0} \frac{f_1(t+\Delta) - f_1(t)}{\Delta}, \lim_{\Delta \to 0} \frac{f_2(t+\Delta) - f_2(t)}{\Delta}, \dots, \lim_{\Delta \to 0} \frac{f_n(t+\Delta) - f_n(t)}{\Delta} \right) =$$
$$= \big(f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t)\big)\,.$$

Tedy derivace zobrazení $\mathbf{f} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ najdeme tak, že derivujeme každou jeho složku.

Geometrická interpretace derivace zobrazení intervalu $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$.

Jestliže zobrazení $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) = \mathbf{x}(t)$, kde $t \in (a,b)$, interpretujeme jako parametrické rovnice křivky $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ a $t_0 \in (a,b)$, leží body $\mathbf{x}(t_0)$ a $\mathbf{x}(t_0+\Delta)$ na křivce $\mathcal{C}$. Přímka, která prochází těmito body, je rovnoběžná s vektorem

$$\mathbf{x}(t_0+\Delta) - \mathbf{x}(t_0) \sim \frac{\mathbf{x}(t_0+\Delta) - \mathbf{x}(t_0)}{\Delta}\,.$$

Z geometrického pohledu přejde pro $\Delta \to 0$ tato přímka v tečnu ke křivce $\mathcal{C}$ v jejím bodě $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$. Proto je vektor

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\mathbf{x}(t_0+\Delta) - \mathbf{x}(t_0)}{\Delta} = \mathbf{x}'(t_0) \tag{17}$$

tečný vektor ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\mathbf{x}_0$ a *parametrické rovnice tečny* ke křivce $\mathcal{C}$ v tomto bodě jsou

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{x}'(t_0)\,s\,, \qquad s \in \mathbb{R}\,. \tag{18}$$

`Poznámka.` Aby byly parametrické rovnice (18) skutečně parametrické rovnice přímky, musíme předpokládat, že je vektor $\mathbf{x}'(t_0)$ nenulový. Pokud je $\mathbf{x}'(t_0) = 0$ neznamená to ještě, že křivka $\mathcal{C}$ nemá v bodě $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ tečnu. Může se totiž stát, že když budeme křivku $\mathcal{C}$ popisovat jinými parametrickými rovnicemi, dostaneme v tomto bodě nenulovou derivaci, a tedy nenulový tečný vektor. Proto se budeme při popisu křivky pomocí paremetrických rovnic $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ bodům, ve kterých je $\mathbf{x}'(t) = 0$ vyhýbat.

Fyzikální interpretace derivace zobrazení intervalu $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$.

Budeme-li považovat proměnnou t za čas, můžeme interpretovat zobrazení $t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ jako pohyb bodu X v prostoru $E_n \sim \mathbb{R}^n$. Pak jsou $\mathbf{x}(t)$, resp. $\mathbf{x}(t+\Delta)$, polohy bodu X v čase t, resp. $t+\Delta$. Vektor

$$\overline{\mathbf{v}}(t,\Delta) = \frac{\mathbf{x}(t+\Delta) - \mathbf{x}(t)}{\Delta}$$

pak interpretujeme jako průměrmou vektorovou rychlost bodu X v intervalu $(t, t+\Delta)$. Limita $\Delta \to 0$ pak dává *vektor rychlosti* bodu X v čase t, tj.

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\mathbf{x}(t+\Delta) - \mathbf{x}(t)}{\Delta} = \mathbf{x}'(t)\,. \tag{19}$$

Z podobných důvodů se ve fyzice interpretuje druhá derivace zobrazení $\mathbf{x}(t)$ v čase t jako zrychlení $\mathbf{a}(t)$ bodu X, tj.

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}(t) = \mathbf{x}''(t)\,.$$